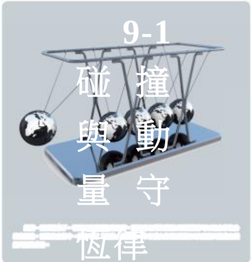
CH 9



9-1 碰撞與動量守恆律

拉開一顆球再放手，看到球兒滴答地敲打著，這些球之間的碰撞以及運動都可以用力學的分析來討論，而這些分析中，總少不了「動量」的概念。本章將介紹各種碰撞以及動量與能量在碰撞問題的應用。

CHAPTER 9 9-1 碰撞與動量守恆律

∴圖 9-1 打棒球時揮棒擊球，籃球碰到籃板反彈都是碰撞。

物理學中所稱的**碰撞**（collision）指的是一個系統的運動狀態，在一很短的時間內會發生顯著的變化。例如撞球時以白球撞擊另外一顆色球、打棒球時揮棒擊球、籃球碰到籃板反彈（圖 9-1）、扣下鎗械扳機射出子彈、兩輛車子相撞…等，都是碰撞，煙火的爆炸也可以碰撞相關定理來描述。

碰撞過程常常歷經很短暫的時間，系統的力學狀態突然改變，在這極短的時間間隔內，通常很難確定每一瞬間的作用力，因此要運用上冊第四章中所描述的牛頓第二運動定律，實際上有其困難的地方。如果只想了解碰撞前後物體運動狀態的變化，探討碰撞前後系統的動量與能量是否變化，就是一個很有用的方法。

在第六章中我們介紹了動量的概念，考慮有交互作用的多質點系統，當作用在系統上的外力和為零時，多質點系統遵守動量守恆律，即(6-19)式：

$$\sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i \text{ 為定值}$$

也就是系統不受外力作用，則其總動量維持不變，系統總動量 $\vec{p}$ 是一個定值，此系統在碰撞後的總動量 $\vec{p}'$ 等於碰撞前的總動量 $\vec{p}$ ，即：

$$\vec{p}' = \vec{p} \tag{9-1}$$

在一些碰撞問題中，作用在系統上的外力（如重力或是摩擦力）不一定為零，但是由於碰撞過程常常是在

極短暫時間中發生，因此系統所受到的衝量極微小，通常可以忽略，因此碰撞前後系統的總動量一般亦可視為守恆的。

例題　9-1

請判斷以下的兩個例子，若將子彈與木塊視為一系統，碰撞過程水平方向上是否遵守系統的動量守恆？

(1) 水平射擊一子彈，射穿固定於水平面的木塊。

(2) 水平射擊一子彈，射穿原靜止在光滑水平面的木塊。

解　在第(1)小題中，對木塊、子彈兩個物體所組合的系統而言，

地面對木塊施力，使木塊固定在地面上，

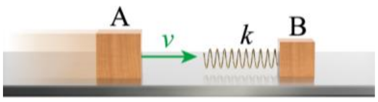
此外力作用下，系統的水平動量不會守恆。

但在第(2)小題例子中，地面無摩擦且木塊可自由移動，

系統的水平方向動量在任一瞬間都是守恆的。

自我練習

光滑平面上物體 A 接近連接一彈簧的 B 物體，則：



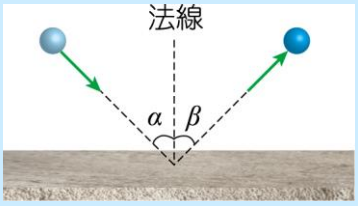
(1)若 B 物體被固定在地面上，則 A、B 所組成的系統在碰撞過程中是否遵守總動量守恆與力學能守恆？

(2)若 B 物體可自由移動，則 A、B 所組成的系統在碰撞過程中是否遵守總動量守恆與力學能守恆？

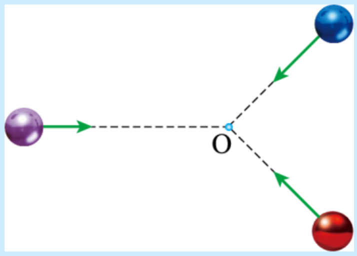
例題 9-2

以下的兩個例子中，請說明選取哪幾個物體為系統時，系統會在哪一個方向的動量守恆？

(1) 一小球被擲向光滑水平地面後反彈跳起。在碰撞發生前後，其入射速度及反彈速度分別與鉛垂法線夾角 α 及 β 。



(2) 光滑平面上運動的三質點在 O 點發生碰撞而且結合成一體。



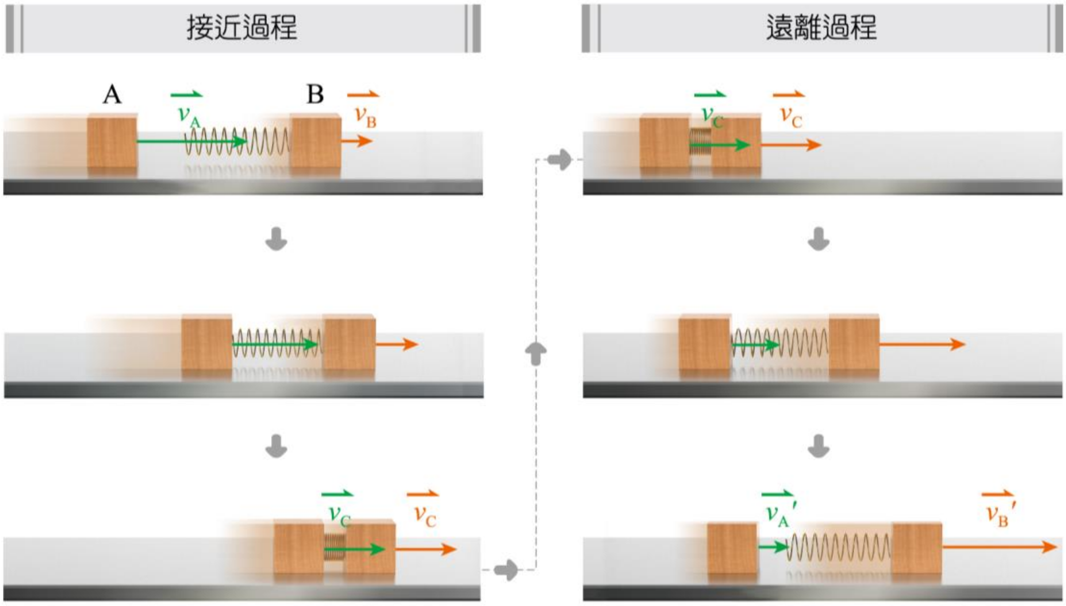
解 (1)光滑地面與小球的作用力稱為正向力，小球所受的正向力的方向與地面垂直向上，所以小球在水平方向並未受力的作用，故以小球為系統而言，小球水平方向動量守恆；鉛直方向動量發生改變。

(2)將三質點視為一系統，鉛直方向的合力為零，水平方向上三質點相互的作用力為內力，必互相抵消，內力合為零，不會影響系統的質心運動，所以水平面上的系統動量守恆。

想一想

如果在例題 9-2 第(1)小題中，將地球與小球視為一個系統，則鉛直方向上是否遵守系統動量守恆？

考慮在光滑水平面上一維空間的碰撞，如圖 9-2 所示，有質量分別為 m_A 與 m_B 的 A 與 B 兩物體，起始時 A 和 B 兩物體一前一後，分別以 $\vec{v_A}$ 與 $\vec{v_B}$ 的初速度向右方移動，由於 $v_A > v_B$，因此 A 物體向 B 物體靠近（且 $v_A > v_C > v_B$，$\vec{v_C}$ 為系統質心速度）。當兩物體開始接觸時，因物體變形而產生互相推擠的交互作用力，此交互作用力是一對作用力和反作用力，當碰撞結束後兩物體分離，此時兩



∴圖 9-2　以理想彈簧來模擬兩物體間因形變所造成之作用力，碰撞前後彈性位能為零。

物體的速度分別為 $\vec{v}_A{}'$ 和 $\vec{v}_B{}'$（$v_A{}' < v_B{}'$），碰撞過程中，由於所受外力為零，故總動量是守恆的。

如果碰撞過程中，只有保守力作功，由第八章的討論可知系統的總力學能守恆（$E = K + U = K' + U'$）。由於碰撞過程的時間很短，系統中各物體的高度幾乎不變，重力位能在碰撞前後不變。碰撞後兩物體恰不接觸時，物體恢復原狀，若以理想彈簧來模擬兩物體間因形變所造成之作用力（圖 9-2），因彈力為保守力，又碰撞前後彈性位能相等（$U = U' = 0$），故力學能守恆可以寫為：

$$K = K' \tag{9-2}$$

也就是碰撞結束後系統總動能與碰撞前相等者，稱為**彈性碰撞**（elastic collision）。

如果有一部分的內力不為保守力，則不像保守力作功下系統的位能可以儲存後再釋放，非保守力作功一定造成力學能之損耗，此時碰撞結束後系統總動能減少，稱為**非彈性碰撞**（inelastic collision）。如果兩物體在碰撞後連結在一起，以相等的速度運動，稱為**完全非彈性碰撞**（completely inelastic collision）。

便利貼

碰撞類型	碰撞過程		碰撞前後
彈性碰撞	動量守恆	力學能守恆	總動能不變
非彈性碰撞	動量守恆	力學能不守恆	總動能減少
完全非彈性碰撞	動量守恆	力學能不守恆	總動能減少最多

例題 9-3

質量為 m 的質點 A 與等質量的靜止質點 B 在光滑水平地面發生碰撞。已知質點 A 的初速為 v_0，末速為 $\frac{v_0}{3}$，且方向與初速相同，則：

(1) A、B 兩質點系統的質心速度為何？

(2) 碰撞後質點 B 的末速度為何？

(3) 此碰撞為非彈性碰撞或為彈性碰撞？

解 (1)A、B 的質心速度 $=\frac{m_A v_A + m_B v_B}{m_A + m_B} = \frac{m v_0}{m+m} = \frac{v_0}{2}$。

(2)A、B 兩物體在任一瞬間的動量和皆相等，

$$m_A \vec{v_A} + m_B \vec{v_B} = m_A \vec{v_A}' + m_B \vec{v_B}'，$$

$$m v_0 + 0 = m\frac{v_0}{3} + m_B v_B'，\quad v_B' = \frac{2}{3}v_0。$$

(3)利用碰撞前後動能的變化可以判斷碰撞的種類，

碰撞前的動能 $K = \frac{1}{2}m v_0^2 + 0$，

碰撞後的動能 $K' = \frac{1}{2}m(\frac{v_0}{3})^2 + \frac{1}{2}m(\frac{2v_0}{3})^2 = \frac{5}{18}m v_0^2$，

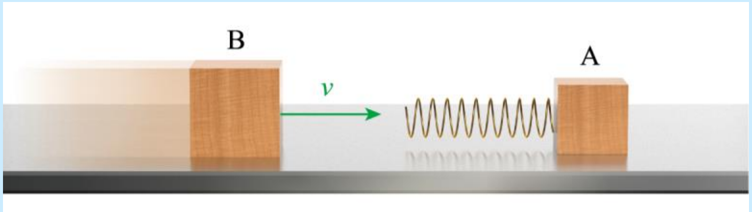
可看出碰撞後動能損失 $\frac{4}{18}m v_0^2$，故為非彈性碰撞。

自我練習

質量為 $3m$ 的質點 A 與質量為 m 且靜止的質點 B，在光滑水平面上發生碰撞，質點 A、B 的大小相同，已知質點 A 碰撞前的速率為 v，碰撞後的速率為 $\frac{v}{2}$，且為同一方向，則此碰撞為彈性碰撞或為非彈性碰撞？

例題　9-4

一力常數為 k 的輕彈簧，固定在一質量為 m 且靜止於光滑水平地面的木塊 A 上，另一質量為 $2m$ 的木塊 B 以速度 v 碰撞彈簧，兩者在同一直線上運動，如圖所示，則彈簧的最大位能為何？



思路：從接觸彈簧開始，B 物的速度因彈力而減小，A 物的速度亦因彈力而增加，彈簧的壓縮量也增大。對能量而言，彈性位能的增大，也指出兩物的總動能逐漸減少。當 A、B 速度相等時，彈簧壓縮量最大，彈性位能也最大。

解　從接觸彈簧開始，B 物的速度受到彈力而減小，A 物的速度會增加，彈簧的壓縮量也增大。對能量而言，彈性位能的增大，也指出兩物的動能和逐漸減少。當 A、B 速度相等時，設其速度為 v'，此刻的彈簧壓縮量最大，彈性位能也最大，因為下一時刻，B 物的速度將小於 A 物的速度，兩物逐漸分開。

利用動量守恆，$2m\times v+0=2m\times v'+m\times v'$，$v'=\frac{2}{3}v$，

再利用力學能守恆，$\frac{1}{2}\times 2m\times v^2+0=\frac{1}{2}\times 2m\times v'^2+\frac{1}{2}\times m\times v'^2+U$，

$mv^2=\frac{2}{3}mv^2+U$，$U=\frac{1}{3}mv^2$。

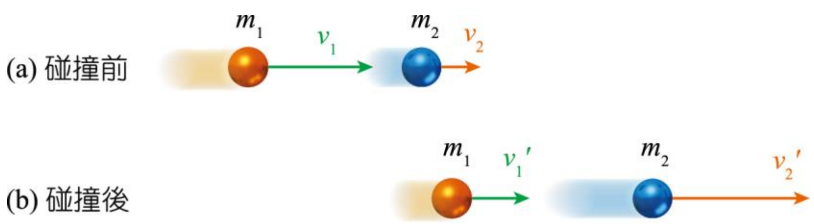
想一想

例題 9-4 中，以 A、B 兩物體及彈簧為一系統，彈簧的恢復力對 A、B 兩物體而言，是屬於內力或外力？

CHAPTER 9 9-2 彈性碰撞

一、直線上的彈性碰撞

現在討論一維的彈性碰撞，考慮在 x 軸上運動之兩物體，其質量各為 m_1 和 m_2，速度分別為 v_1 與 v_2（$v_1 > v_2$），兩物體發生**正面碰撞**（head on collision），即兩物體碰撞前後的速度維持在同一直線上，質量為 m_1 的物體入射速度在兩物體質心連線上，碰撞後的速度分別為 v_1' 和 v_2'，如圖 9-3 所示。



∴圖 9-3　在一直線上運動，質量各為 m_1 和 m_2 的兩物體發生彈性碰撞示意圖。

由於碰撞前後的總動量是守恆的，由(9-1)式可得：

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1v_1' + m_2v_2' \tag{9-3}$$

移項後得：

$$m_1(v_1 - v_1') = -m_2(v_2 - v_2') \tag{9-4}$$

由於兩物體作彈性碰撞，因此兩物體的總動能在碰撞前後相等，即：

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \tag{9-5}$$

由(9-5)式得：

$$m_1(v_1^2 - v_1'^2) = -m_2(v_2^2 - v_2'^2) \tag{9-6}$$

將(9-6)式和(9-4)式兩式互相比較，可得 $v_1 + v_1' = v_2 + v_2'$ 或

$$v_1 - v_2 = v_2' - v_1' \tag{9-7}$$

式中 $v_1 - v_2$ 為碰撞前的相對接近速度，而 $v_2' - v_1'$ 則為碰撞後的相對分離速度，在一維的彈性碰撞的情況下，兩物體碰撞前的相對接近速度與碰撞後的相對分離

速度相等。由(9-4)式和(9-7)式兩式，經過聯立運算可解得：

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \tag{9-8}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 \tag{9-9}$$

由於我們假設碰撞過程中系統所受的外力和為零，因此系統的質心作等速運動，即碰撞前後系統的質心速度 v_C 保持不變。由第六章質心的速度 v_C 為：

$$v_C = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \tag{6-10}$$

配合(9-3)式可得：

$$v_C = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2} \tag{9-10}$$

碰撞過程中兩物體最靠近時，系統動能最小，定義此時系統的動能 K_C 為：

$$K_C = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) v_C^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\left(\frac{m_1 v_1' + m_2 v_2'}{m_1 + m_2}\right)^2$$

$$K_C = \frac{1}{2}\frac{(m_1 v_1' + m_2 v_2')^2}{m_1 + m_2} \tag{9-11}$$

動動手

跳得更高

1. 材料：彈力球二個，一大一小（也可以是籃球與網球）。
2. 實驗過程：將小彈力球放在大彈力球上，讓兩個球緊靠在一起，使其同時自由落下，可見到落地之後，小彈力球會跳得比原先放開的位置還高。

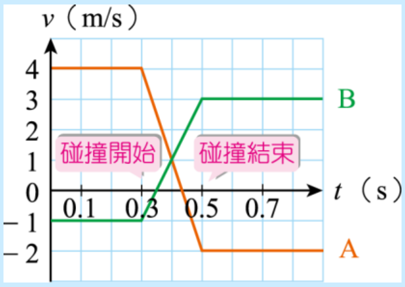
9

例題 9-5

兩球 A、B 於一直線上做正面碰撞，其速度 v 和時間 t 的關係近似右圖。

(1) 依據圖形如何斷定為彈性碰撞。

(2) 若 A 球 2 公斤，則 B 球的質量為何？



解

(1)A、B 碰撞前相對接近速度 $= v_A - v_B = 4-(-1) = 5$（m/s），

A、B 碰撞後相對分離速度 $= v_B' - v_A' = 3-(-2) = 5$（m/s）。

兩者相等，屬於彈性碰撞。

(2)碰撞前後兩球的動量守恆，力學能亦守恆，

$m_A v_A + m_B v_B = m_A v_A' + m_B v_B'$，

$2\times 4 + m_B \times (-1) = 2\times(-2) + m_B \times 3$，

$m_B = 3$（kg）。

自我練習

例題 9-5 中，在 0.3～0.5 秒的碰撞期間內，A、B 系統質心速度是否改變？

若物體 m_2 原先為靜止（$v_2 = 0$），即在一直線上運動的物體 m_1 和靜止的物體 m_2 發生一維彈性碰撞，(9-8)式和(9-9)式兩式可以改寫為以下兩式：

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad (9\text{-}12)$$

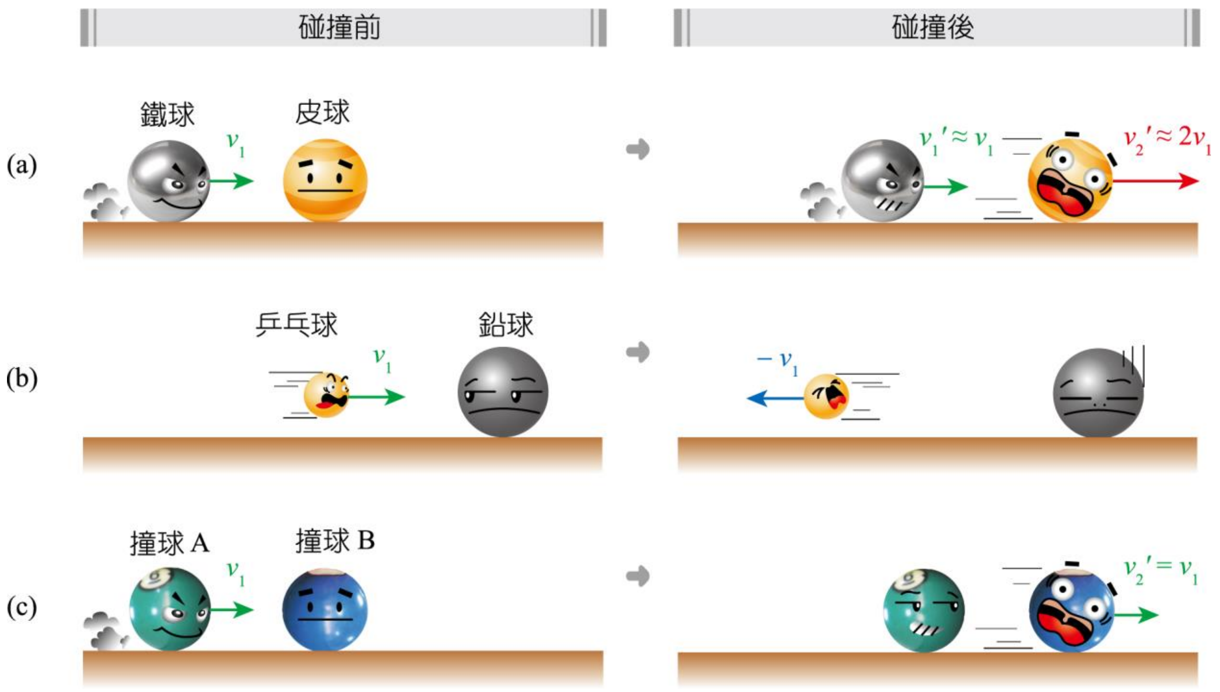
$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \qquad (9\text{-}13)$$

以下討論三種特殊的情況下的末速：

(a) 若 $m_1 \gg m_2$，即 A 物體撞到一個質量比其小很多的 B 物體，則由(9-12)式和(9-13)式兩式可得到 $v_1' \approx v_1$ 與 $v_2' \approx 2v_1$。例如鐵球正面擊中皮球，碰撞後，鐵球的速度幾乎不變，而皮球以接近鐵球兩倍的球速向前飛出（圖 9-4(a)）。

(b) 若 $m_1 \ll m_2$，即 A 物體的質量較 B 物體小甚多，則 $v_1' \approx -v_1$ 與 $v_2' \approx 0$。典型的例子就是將乒乓球正面投向靜止的鉛球，兩球碰撞後，鉛球紋風不動而乒乓球則以接近原速率反向彈回（圖 9-4(b)）。

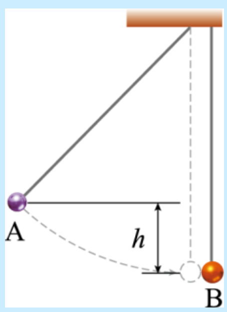
(c) 若 $m_1 = m_2$，即兩物體的質量相等，由(9-12)式和(9-13)式兩式可得 $v_1' = 0$ 與 $v_2' = v_1$，表示碰撞後 A 物體將靜止，而 B 物體將以 A 物體的原速度運動，亦即碰撞後兩物體的速度交換。例如在圖 9-4(c)中，兩質量相等的撞球正面碰撞，若左方的撞球撞擊靜止中的撞球 B，則碰撞後撞球 A 將靜止，而撞球 B 將以撞球 A 原速度向右運動。



∴圖 9-4　在直線上運動的兩物體發生彈性碰撞的三種特殊情況：(a) $m_1 \gg m_2$，(b) $m_1 \ll m_2$ 與(c) $m_1 = m_2$。

例題　9-6

有一小球 A 由圖所示位置靜止釋放後，在最低點處與小球 B 發生正面彈性碰撞。已知碰撞後小球 B 上升的最大高度為 $\frac{h}{4}$，則小球 B 的質量為 A 的幾倍？



9

思路：正面彈性碰撞前後，遵守水平動量守恆、力學能守恆。

解　A 球擺至最低點處的速度恰在水平方向上，此瞬間與 B 球在同一水平發生正面彈性碰撞，碰撞後 B 球向右擺動，

A 球自高度 h 擺至最低點時的速度 $v_A=\sqrt{2gh}$，

B 球在碰撞後的速度 v_B'，向右擺動最大高度為 $\frac{h}{4}$，

所以 $v_B'=\sqrt{2g\cdot\frac{h}{4}}=\sqrt{\frac{gh}{2}}$，利用正面彈性碰撞公式 $v_B'=\frac{2m_A}{m_A+m_B}v_A$，

所以 $\sqrt{\frac{gh}{2}}=\frac{2m_A}{m_A+m_B}\cdot\sqrt{2gh}$，$\frac{1}{2}=\frac{2m_A}{m_A+m_B}$，

可得 $3m_A=m_B$，$\frac{m_B}{m_A}=3$。

自我練習

例題 9-6 中，A 球反彈的高度為何？

例題 9-7

在鈾分裂反應器中產生的高速中子，應用在某些核反應中必須使中子減速，而利用正面彈性碰撞的減速效果最好。設中子與 (1)鉛 ^{206}Pb (2)碳 ^{12}C (3)氫 ^{1}H 作正面彈性碰撞，求各種情形下中子損失之動能的百分率，並判斷應選擇何種物質作為減速劑最好？

思路：兩質點發生正面彈性碰撞，利用動量守恆與力學能守恆，可以得到碰撞後的速度與動能。

解　中子（質量 m_n、速率 v_n）與其他粒子（質量 m）作正面彈性碰撞後，

中子速度 $v_n'=\frac{m_n-m}{m_n+m}v_n$，

中子損失的動能 $\Delta E=E-E'=\frac{1}{2}m_nv_n^2-\frac{1}{2}m_nv_n'^2=\frac{1}{2}m_nv_n^2[1-(\frac{m_n-m}{m_n+m})^2]$，

動能損失的百分率 $=\frac{\Delta E}{E}=1-(\frac{m_n-m}{m_n+m})^2=\frac{4m_nm}{(m_n+m)^2}$，

(1)鉛，$\frac{\Delta E}{E}=\frac{4\times1\times206}{(206+1)^2}\times100\%=1.92\%$。

(2)碳，$\frac{\Delta E}{E}=\frac{4\times1\times12}{(12+1)^2}\times100\%=28.4\%$。

(3)氫，$\dfrac{\Delta E}{E}=\dfrac{4\times1\times1}{(1+1)^2}\times100\%=100\%$。

中子撞擊氫原子後，中子停下來，而氫原子擁有中子原有動能，故應選擇質量與中子最接近的氫。

自我練習

質量為 m 的物體分別與質量為 $100m$ 以及質量為 $\dfrac{m}{100}$ 的物體發生正面彈性碰撞，求出這兩種情形下物體 m 損失之動能百分率。

二、平面上的彈性碰撞

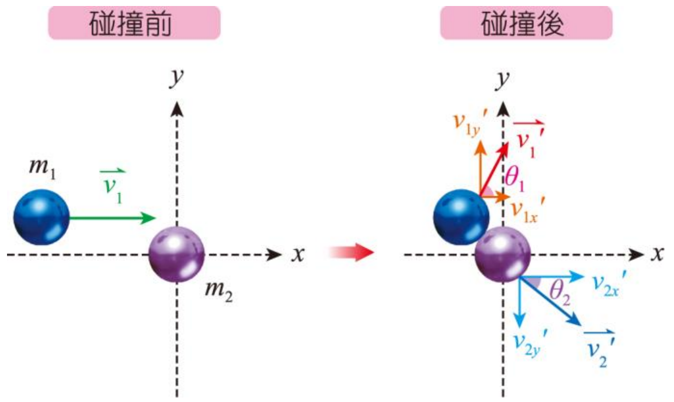
考慮在光滑的水平面上兩物體，如圖 9-5 所示，質量為 m_1 的物體以速度 $\vec{v_1}$ 沿著 $+x$ 方向非正面碰撞質量為 m_2 的靜止物體，兩物體發生二維彈性碰撞後分開，分別以 $\vec{v_1}'$ 和 $\vec{v_2}'$ 的速度在 xy 平面上運動，它們各與 $+x$ 方向夾角度 θ_1 和 θ_2，因此可知：$v_{1x}'=v_1'\cos\theta_1$、$v_{1y}'=v_1'\sin\theta_1$、$v_{2x}'=v_2'\cos\theta_2$ 與 $v_{2y}'=v_2'\sin\theta_2$，由於碰撞前後的總動量是守恆的，由(9-1)式可得：

$$m_1\vec{v_1}=m_1\vec{v_1}'+m_2\vec{v_2}' \tag{9-14}$$

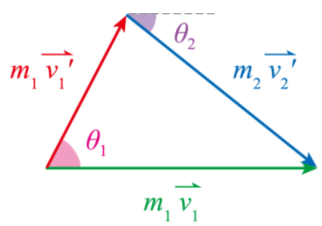
(9-14)式中各向量關係圖如圖 9-6 所示。分別考慮 x 與 y 方向的動量分量方程式，可得：

$$x\text{ 方向}\quad m_1v_1=m_1v_{1x}'+m_2v_{2x}' \tag{9-15}$$

$$y\text{ 方向}\quad 0=m_1v_{1y}'-m_2v_{2y}' \tag{9-16}$$



∴圖 9-5　平面上的彈性碰撞。



∴圖 9-6　(9-14)式中各向量關係圖。

9

由於兩物體作彈性碰撞，因此碰撞前後兩物體的總動能相等，即：

$$\frac{1}{2}m_1v_1^{\,2}=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2 \tag{9-17}$$

兩物體發生二維彈性碰撞後分開的例子中，由以上推導得到(9-15)式、(9-16)式和(9-17)式三個方程式，若式中質量 m_1 和 m_2 以及 m_1 的速度 $\overrightarrow{v_1}$ 為已知量，尚有 v_{1x}'、v_{1y}'、v_{2x}' 與 v_{2y}' 四個未知數待解，在一般情況下，三個方程式不足以解出四個未知數，也就是碰撞後兩物體的速度量值與方向無法完全解得。因此還必須至少測知 v_{1x}'、v_{1y}'、v_{2x}' 與 v_{2y}' 四個未知量之一，例如知道質量為 m_2 的物體碰撞後運動方向為 θ_2，其他物理量才能由給定的三個方程式(9-15)式、(9-16)式和(9-17)式完全解出。一般而言，二維空間的碰撞較一維空間的碰撞複雜很多，在此我們試舉一較簡易的例子求解：兩質量相等的物體在水平面上發生彈性碰撞。

例如撞球運動中，球的運動被侷限在球檯的二維平面上，當母球 A 撞到原先靜止的子球 B 時，根據動量守恆律，可得：

$$m_\mathrm{A}\overrightarrow{v_\mathrm{A}}+m_\mathrm{B}\overrightarrow{v_\mathrm{B}}=m_\mathrm{A}\overrightarrow{v_\mathrm{A}'}+m_\mathrm{B}\overrightarrow{v_\mathrm{B}'}$$

由於球的質量相同，$m_\mathrm{A}=m_\mathrm{B}$，且子球原先靜止，因此：

$$\overrightarrow{v_\mathrm{A}}=\overrightarrow{v_\mathrm{A}'}+\overrightarrow{v_\mathrm{B}'}$$

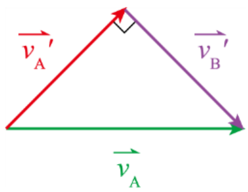
若兩撞球碰撞可視為彈性碰撞，所以力學能守恆：

$$\frac{1}{2}m_\mathrm{A}v_\mathrm{A}^{\,2}=\frac{1}{2}m_\mathrm{A}v_\mathrm{A}'^2+\frac{1}{2}m_\mathrm{B}v_\mathrm{B}'^2$$

由於球的質量相等，$m_\mathrm{A}=m_\mathrm{B}$，因此：

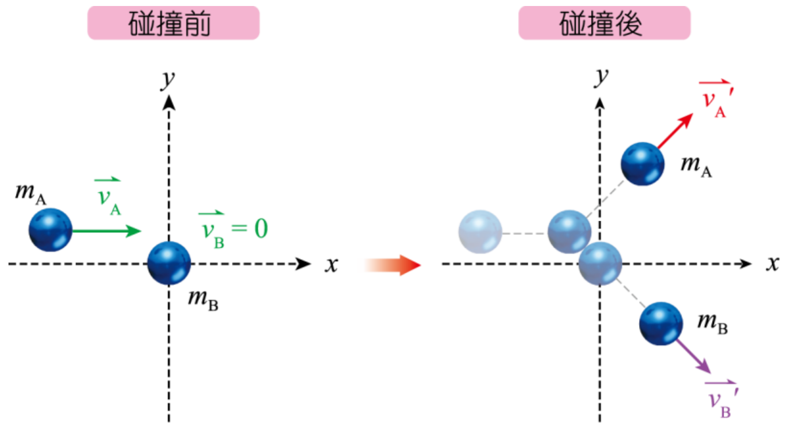
$$v_\mathrm{A}^{\,2}=v_\mathrm{A}'^2+v_\mathrm{B}'^2 \tag{9-18}$$

由(9-18)式可知 $\overrightarrow{v_\mathrm{A}}$、$\overrightarrow{v_\mathrm{A}'}$ 與 $\overrightarrow{v_\mathrm{B}'}$ 恰成以 $\overrightarrow{v_\mathrm{A}}$ 為斜邊之直角三角形，如圖 9-7，也就是碰撞後母球與子球的運動方



∴圖 9-7 $\overrightarrow{v_\mathrm{A}}$、$\overrightarrow{v_\mathrm{A}'}$ 與 $\overrightarrow{v_\mathrm{B}'}$ 恰成以 $\overrightarrow{v_\mathrm{A}}$ 為斜邊之直角三角形。

向垂直（如圖 9-8），這在撞球運動中是很重要的一課。



∴圖 9-8　質量相等的兩球在平面上的二維彈性碰撞，碰撞後兩球的運動方向互相垂直。

例題　9-8

A 物體的質量為 *m* 和質量亦為 *m* 的靜止 B 物體在一水平面上作彈性碰撞，碰撞後，A 物體和原運動方向夾 60°離開，則碰撞後 A、B 速率之比為何？

解　A、B 兩物的動量守恆 $m\vec{v}_A = m\vec{v}_A' + m\vec{v}_B'$，$\vec{v}_A = \vec{v}_A' + \vec{v}_B'$，

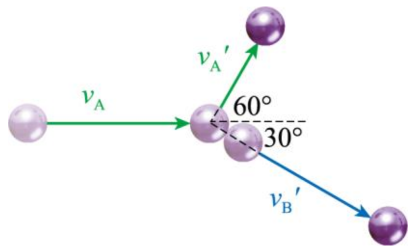
碰撞前後的動能守恆 $\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_A'^2 + \frac{1}{2}mv_B'^2$，$v_A^2 = v_A'^2 + v_B'^2$，

可得到 v_A、v_A'、v_B' 三個向量恰圍成一個直角三角形，

v_A' 與 v_B' 的夾角為 90°，如圖所示。

$v_A' = v_A\cos 60° = \frac{v_A}{2}$，$v_B' = v_A\cos 30° = \frac{\sqrt{3}v_A}{2}$，

$v_A' : v_B' = (\frac{1}{2}v_A) : (\frac{\sqrt{3}}{2}v_A) = 1 : \sqrt{3}$。



想一想

例題 9-8 中，若 A 球質量大於 B 球，球碰撞後 A、B 兩球速度的夾角還會維持 90°嗎？

CHAPTER 9 9-3 非彈性碰撞

一、非彈性碰撞

第二小節中討論彈性碰撞，在碰撞結束後系統總動能可以回復為原值。然而日常生活中物體的碰撞大多屬於非彈性碰撞，在碰撞結束後系統總動能不能回復為原值，這常常是由於碰撞造成物體變形，無法恢復原狀或產生熱能所致，然而在碰撞前後的總動量仍是守恆的。

之前我們討論到非彈性碰撞在碰撞結束後，系統總動能不能回復為原值，碰撞伴隨動能的損失有多大呢？若在碰撞前後系統的總動能 K 與 K' 分別為：

$$K=\frac{1}{2}m_1v_1^{\,2}+\frac{1}{2}m_2v_2^{\,2} \tag{9-19}$$

$$K'=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2 \tag{9-20}$$

v_1 和 v_2 分別為兩物體的初始速度，發生非彈性碰撞後的速度分別為 v_1' 和 v_2'，由於碰撞過程中系統所受的外力和假設為零，因此碰撞前後系統的質心速度 v_C 保持不變，系統質心動能 K_C 為：

$$K_C=\frac{1}{2}\frac{(m_1v_1'+m_2v_2')^2}{m_1+m_2}$$

整理可得碰撞前後系統的總動能分別為：

$$K=K_C+\frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)(v_1-v_2)^2$$

$$K'=K_C+\frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)(v_1'-v_2')^2$$

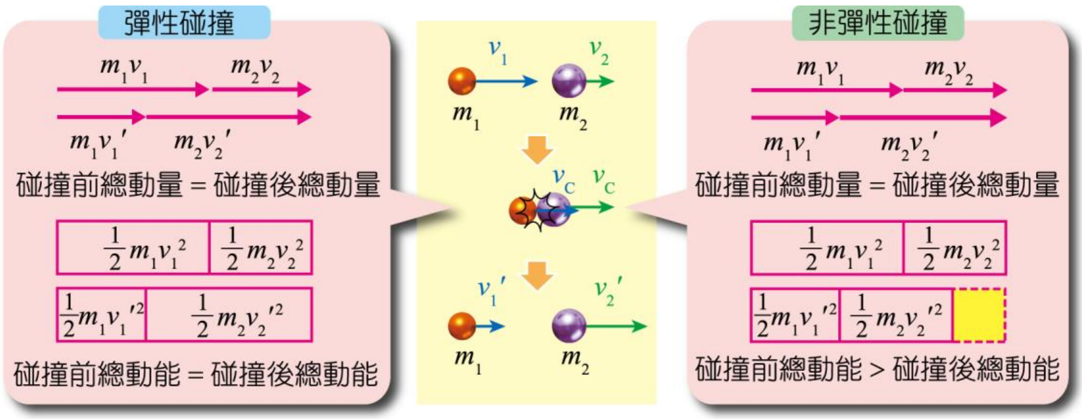
由於碰撞過程中能量不能被創生，非彈性碰撞結束後系統總動能不能回復為原值，因此碰撞後系統總動能較碰撞前系統總動能小，這一碰撞伴隨動能的損失量值為：

$$K-K'=\frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1+m_2}\right)[(v_1-v_2)^2-(v_1'-v_2')^2] \qquad (9\text{-}21)$$

由本章第二節的彈性碰撞分析可知，二維的碰撞較一維碰撞複雜很多。當然二維的非彈性碰撞比起一維的非彈性碰撞也一定更加繁複，在分析上我們要把握住一個原則，也就是雖然非彈性碰撞中有動能的損失，即碰撞後總動能小於碰撞前總動能，但碰撞前後的總動量是守恆的。

Note

彈性碰撞與非彈性碰撞的比較：



例題 9-9

自高度 20 公尺靜止自由落下 0.1 公斤的球，若忽略空氣阻力的影響，已知碰撞地面後速度量值為碰撞前的一半，則：（設重力加速度 $g=10$ 公尺／秒 ²）

(1)第一次反彈的最大高度為何？　(2)碰撞過程中損失多少力學能？

解　(1) e 是碰撞後速率 v' 與碰撞前速率 v 的比值，$e=\frac{v'}{v}=0.5$，

球接近地面瞬間的速率 $v=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times10\times20}=2$（m/s），

9

所以球反彈瞬間遠離地面的速率 $v' = ev = \frac{v}{2} = 10$（m/s），

反彈最大高度 h'，$\frac{1}{2}mv'^2 = mgh'$，$h' = \frac{v'^2}{2g} = \frac{10^2}{2\times10} = 5$（m）。

(2)碰撞前的力學能 $= mgh = \frac{1}{2}mv^2 = 0.1\times10\times20 = 2$（J），

碰撞後的力學能 $= mgh' = \frac{1}{2}mv'^2 = 0.1\times10\times5 = 5$（J），

此為非彈性碰撞，碰撞後力學能僅剩原力學能的 $\frac{1}{4}$，

損失力學能為 $\frac{3}{4}\times20 = 15$（J）。

自我練習

如果相對接近速率與碰撞後的相對分離速率的比值固定，則第二次反彈的高度為何？

二、完全非彈性碰撞

若兩物體碰撞後其速度相同，即兩物體碰撞後合為一體，就是完全非彈性碰撞，則碰撞後合體的速度恰為系統的質心速度 $\vec{v}_C$：

$$\vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \vec{v}_C$$

由非彈性碰撞在碰撞結束後，系統總動能不能回復為原值，碰撞伴隨動能的損失如(9-21)式，而完全非彈性碰撞後兩物體的速度相同，即 $v_1' = v_2'$，因此可得完全非彈性碰撞損失動能值為：

$$K - K' = \frac{1}{2}\left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)(v_1 - v_2)^2 = (K - K')_{max} \qquad (9\text{-}22)$$

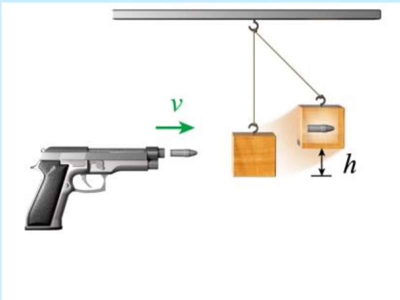
相對於非彈性碰撞而言，完全非彈性碰撞的動能損失是最大的。

便利貼

碰撞類型	碰撞過程		碰撞後		說明
彈性碰撞	動量守恆	保守力作用	恢復原狀	動能不變	碰撞前的相對接近速度等於碰撞後的相對分離速度的量值
非彈性碰撞	動量守恆	非保守力作用	不恢復原狀	動能變小	碰撞前的相對接近速度的量值（v_1-v_2）大於碰撞後的相對分離速度的量值（$v_2'-v_1'$）
完全非彈性碰撞	動量守恆	非保守力作用	不恢復原狀	動能變小	碰撞後兩者的速度相等

例題 9-10

圖中輕繩懸吊一木塊的裝置為衝擊擺（ballistic pendulum），它是用來測定高速運動子彈的速度。若子彈和木塊的質量分別為 m_1 和 m_2，木塊被擊中後，子彈陷入木塊中，不再穿出，而木塊盪高的高度為 h。求：



(1)子彈未射入木塊前的速度。　(2)損失之力學能。

思路：子彈射入木塊為完全非彈性碰撞，碰撞前後水平方向總動量守恆。

解　(1)子彈與木塊在水平方向作完全非彈性碰撞，

則利用動量守恆 $m_1\vec{v}+0=(m_1+m_2)\vec{v'}$，

而後木塊以 v' 速度擺至最大高度 h 處，

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2=(m_1+m_2)gh，\quad v'=\sqrt{2gh}$$ 代回上式，

$$v=\frac{m_1+m_2}{m_1}v'=\frac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2gh}，$$

可看出子彈初速 v 愈大，木塊盪高的高度愈大，

測量高度 h 可計算出子彈的初速 v。

(2)碰撞前系統的力學能 $E=\dfrac{1}{2}m_1v^2=\dfrac{1}{2}m_1(\dfrac{m_1+m_2}{m_1}\sqrt{2gh})^2$，

$E=\dfrac{(m_1+m_2)^2}{m_1}gh=\dfrac{m_1+m_2}{m_1}(m_1+m_2)gh$，

碰撞後系統的力學能 $E'=\dfrac{1}{2}(m_1+m_2)v'^2=(m_1+m_2)gh$，

損失的力學能 $=E-E'=(\dfrac{m_1+m_2}{m_1}-1)(m_1+m_2)gh=\dfrac{m_2}{m_1}(m_1+m_2)gh$。

想一想

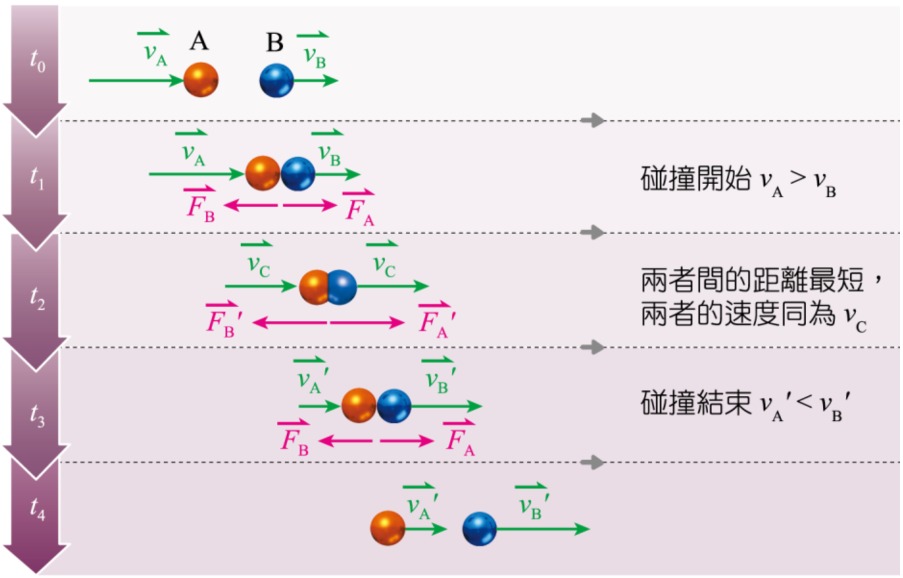
若木塊愈重，則子彈碰撞前後所損失的動能是愈多還是愈少？損失的動能哪裡去了？

延伸閱讀

延伸閱讀：碰撞過程的分析

碰撞過程歷時很短，一般說來我們在討論碰撞問題的時候，只需考慮碰撞前後的速度，再依動量守恆與能量關係即可求解。但是若仔細分解碰撞過程的各個階段，我們更可以知道兩物體碰撞過程中作用力作功，以及彈性位能與動能間關係。

若在一直線上有質量分別為 m_A 與 m_B 的兩物體，假設在時刻 t_0 時，A 和 B 兩物體分別以 $\vec{v_A}$ 與 $\vec{v_B}$ 的初速向右方移動且彼此相隔一段距離，如圖 9-9 所示。在時刻 t_1 時兩物體開始接觸，因物體變形而產生 AB 兩物體間交互作用力，分析可知 A 物體受到來自 B 物體的作用力 $\vec{F_B}$（與速度 $\vec{v_A}$ 的方向相反）而減速，而 B 物體則受到來自 A 物體的力 $\vec{F_A}$ 作用而加速，其中 $\vec{F_A}=-\vec{F_B}$ 且 $\vec{F_A}$ 與 $\vec{F_B}$ 二力的量值與物體變形的程度有關，不為恆定量值的力。自時刻 t_1 起，碰撞初期兩物體間距離逐漸縮短，但 A 物體因 $\vec{F_B}$ 作用而速度漸減，而 B 物體的速度則漸增。兩物體在時刻 t_2 時速度相等，為兩物體系統的質心速度 $\vec{v_C}$，此時兩物體間的距離達到最小值，而物體間交互作用力達到最大。



∴圖 9-9　兩物體的一維碰撞過程的各個階段分析。

延伸閱讀

時間間隔 $t_1 \to t_2$ 內為碰撞開始到兩物體間距離最短時，A 物體受到向左的作用力 $\vec{F_B}$，但是其位移的方向向右，故 $\vec{F_B}$ 對 A 物體作負功；同理 $\vec{F_A}$ 則對 B 物體作正功。$\vec{v_A}$ 的量值較 $\vec{v_B}$ 大，因此在同一時間內 A 物體的位移量值較 B 物體大，也就是說 $\vec{F_B}$ 所作負功的絕對值大於 $\vec{F_A}$ 所作正功的絕對值，因此就兩物體組成的系統而言，內力對系統所作的總功為負值，由功能定理可知在 $t_1 \to t_2$ 時間間隔內，系統的總動能減少，而減少的動能轉變為因物體變形而儲存的位能（類似於彈性位能）。

時刻 t_2 之後，A 物體仍持續減速，而 B 物體則繼續加速，相對運動下兩物體間的距離開始增長。在時刻 t_3 時，兩物體之間的交互作用力降至零，碰撞過程結束，此時兩物體的速度分別為 $\vec{v_A}'$ 和 $\vec{v_B}'$。時間間隔 $t_2 \to t_3$ 內為兩物體間距離最短時至碰撞結束，由於 $\vec{v_B}'$ 量值較 $\vec{v_A}'$ 大，因此在同一時間內，A 物體的位移量值較 B 物體小，就此兩物體組成的系統而言，內力所作的總功為正值，由功能原理可知這將使系統的總動能增加，而增加的動能正來自於時間間隔 $t_1 \to t_2$ 內累積位能的釋放。

統合說來，碰撞過程起先系統的總動能漸減，直到兩物體最接近時，其總動能最小，系統所減少的動能以位能的形式儲存在系統內；之後所儲存的位能釋放出來轉變為動能，系統總動能漸增。若所儲存的位能釋放能夠無損耗地完全轉換為動能，系統總動能在碰撞前後維持不變者，稱為彈性碰撞；若這過程中有能量的損耗，則稱為非彈性碰撞；若兩物體碰撞後合為一體一起運動，碰撞過程所減少的動能，完全無法轉換回動能者，稱為完全非彈性碰撞。

本章重點

9-1 碰撞與動量守恆律

1. 碰撞指的是一個系統的運動狀態，在一很短的時間內發生顯著的變化，碰撞前後的總動量是守恆的。
2. 如果碰撞過程中，只有保守力作功，系統的總力學能守恆，稱為彈性碰撞。
3. 碰撞結束後系統總動能回復為碰撞前的原值者，稱為彈性碰撞；碰撞結束後系統總動能不能回復為原值，稱為非彈性碰撞；如果兩物體在碰撞後具有相等速度，也就是兩個物體在碰撞後連結在一起運動，稱為完全非彈性碰撞。

9-2 彈性碰撞

4. 兩物體作一維彈性碰撞時，兩物體碰撞前的相對接近速度與碰撞後的相對分離速度相等。
5. 在 x 軸上運動質量各為 m_1 和 m_2 的兩物體發生彈性碰撞，其初速度分別為 v_1 和 v_2，碰撞後的速度分別為 v_1' 和 v_2'，各物理量之間關係為：

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2\text{，}\quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2\text{。}$$

6. 考慮在光滑的水平面上兩物體，發生二維彈性碰撞後分開，碰撞前後的總動量是守恆的，若兩物體作彈性碰撞，則碰撞前後兩物體的總動能相等。

9-3 非彈性碰撞

7. 非彈性碰撞伴隨有動能的損失，然而在碰撞前後的總動量仍是守恆的。
8. 兩物體作一維非彈性碰撞時，碰撞前的相對接近速度量值（$v_1 - v_2$）大於碰撞後的相對分離速度量值（$v_2' - v_1'$）。
9. 假設碰撞過程中系統所受的外力和為零，因此系統的質心作等速運動，即碰撞前後系統的質心速度 v_C 保持不變。系統的動能 K_C 為：

$$K_C = \frac{1}{2}\frac{(m_1 v_1' + m_2 v_2')^2}{m_1 + m_2}\text{。}$$

習題

觀念題

1. A 物體與 B 物體發生碰撞，則 A、B 兩物體的動量就會守恆嗎？
2. 兩物體 A 與 B 物體發生碰撞，則 A、B 兩物體的力學能只可能守恆或減少嗎？
3. 一球落至地面而反彈，可能與地面發生彈性碰撞或非彈性碰撞，則哪一種碰撞與地面間的作用力最大？哪一種碰撞球失去的能量最大？
4. 質量大的物體與質量小的物體發生正面碰撞時，質量大的物體的運動方向必不會改變？
5. 衝擊擺可以用來測子彈的速度，那麼你覺得可以修改這個裝置來驗證動量守恆嗎？

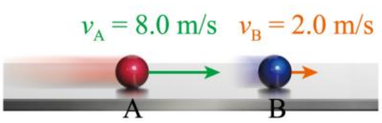
基礎題

■9-1 碰撞與動量守恆律

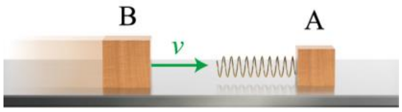
1. 質量 1.0 公斤和 2.0 公斤之滑車，用彈簧聯繫一起向東作 20 公尺／秒之等速運動，中途彈簧彈開以致 1.0 公斤滑車改向西以 40 公尺／秒之速度運動，則 2.0 公斤滑車之速度為何？

■9-2 彈性碰撞

2. 如右圖示，若 A、B 的質心速度為 6.0 公尺／秒，則作正面彈性碰撞後 A、B 的速度分別為何？



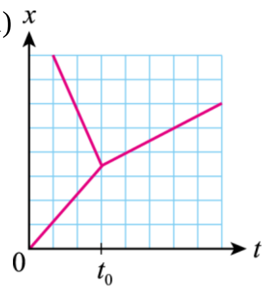
3. 一力常數為 k 的輕彈簧，固定在一質量為 m 且靜止於光滑水平地面的木塊 A 上，另一質量為 $2m$ 的木塊 B 以速度 v 正面碰撞彈簧，如圖所示，則彈簧的最大壓縮量為何？

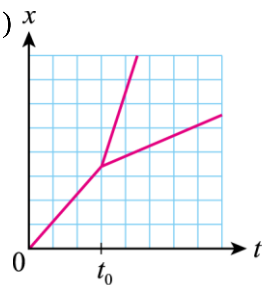


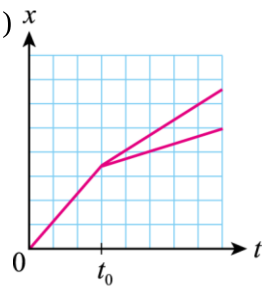
4. 一斜面的質量為 $M=2m$，一物體的質量為 m，同置於一光滑水平面上。物體以 v 的初速朝靜止的斜面運動，如右圖所示。若地面、斜面與物體間無摩擦，則物體沿斜面上升的最大高度為何？

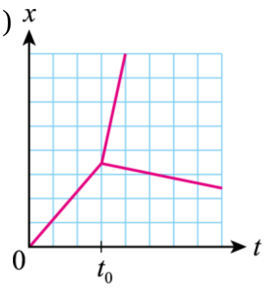
5. 質量 m_1 公斤之物體以 E 焦耳之動能和靜止之 m_2 公斤之物體作正面彈性碰撞，求在相距最近時的總動能。

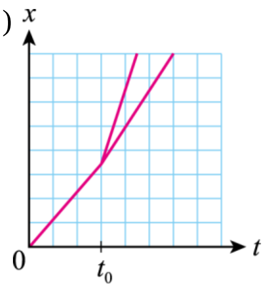
6. 在一光滑的水平直線軌道上，有一滑車以等速度朝正 x 方向移動。在某一時刻 t_0，此滑車分裂成兩截，仍繼續在直線軌道上運動。若在全部過程中，無質量損失且物體不受外力的作用，則下列哪一個位置－時間（$x-t$）圖，可能表示原來的滑車及其所分裂成的兩截滑車的運動？

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


習題

9-3 非彈性碰撞

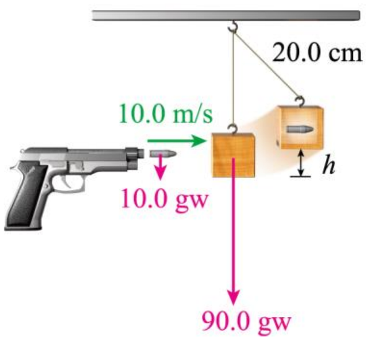
7. 質量為 M，速度為 $5v$ 向北運動的甲球和質量為 $3M$，速度為 $4v$ 向東的乙球作完全非彈性碰撞，則碰撞後損失多少動能？

8. 一子彈質量為 m，速率 v，水平射擊，恰可射穿一厚度為 d，質量為 M，且固定於水平面的均質木塊。現將同樣的木塊靜置於一光滑水平面上，未加以固定。用同樣子彈，相等的射速，水平射擊木塊。設阻力為定值，則可射入木塊的深度為何？

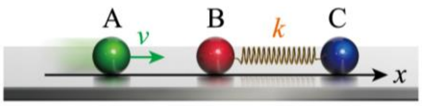
9. 一質量為 $4m$ 的甚大光滑平板水平放置，其上有一質量為 m 的銅幣，銅幣與平板間的動摩擦係數為 μ，重力加速度為 g，若用手一推，突然使平板以速度 v 運動，則銅幣對平板呈靜止，是在平板運動後若干時間？

10. 若一質量為 m，速率為 v 之物體，與另一質量為 $3m$ 之靜止物體作完全非彈性正面碰撞，則碰撞前後系統之總動能的損失率為若干？

11. 一單擺擺長 20.0 公分，擺錘為質量 90.0 公克的木塊，今有一質量 10.0 公克的子彈以 10.0 公尺／秒的水平速度向靜止的擺錘射入，且停留其內，如右圖所示。不計空氣阻力的影響，此單擺可上升之最大鉛直高度為多少公分？（設重力加速度 $g=10.0$公尺／秒^2）



12. 如圖所示，在光滑水平面上有一系統，由質量同為 m 的三個質點 A、B 和 C 組成。此三質點均在 x 軸上，且 B 和 C 之間以一條力常數為 k 的輕彈簧相連接，當 B 與 C 為靜止，且彈簧處於無伸縮狀態時，A 以速度 v 沿 x 軸前進與 B 發生完全非彈性碰撞。假設在 A 和 B 碰撞期間，C 保持靜止不動，且此時彈簧長度的縮短量可忽略不計。則彈簧長度的最大縮短量為何？

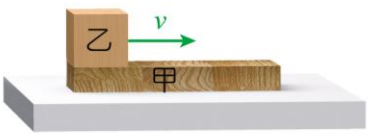


13. 甲、乙兩球在一直線上相向運動，作正面碰撞後，甲球速度的方向與原運動方向相反，乙球靜止。由此可知：　(A)碰撞前後的甲球動量的量值必較乙球小　(B)碰撞前，甲球的速率必較乙球小　(C)碰撞時，甲球所受的衝量較乙球大　(D)碰撞前，甲球的動能必較乙球小　(E)甲球的質量必較乙球小。

綜合題

1. 質量 m 之球自距地面 h 高度自由落下，若碰撞地面後的瞬間速率與碰撞前的瞬間速率的比值為 e，則當其達地反彈後，損失的力學能為若干？

*2. 如圖所示，在光滑水平面上有相互重疊之甲、乙兩木塊，其質量比為 2∶1。起初，甲木塊靜止在水平面上，而乙木塊在甲木塊上之左緣以初速 v 向右運動。

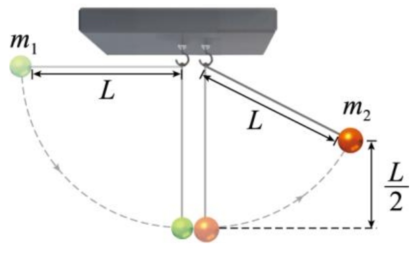


(1) 假設甲木塊夠長，使得乙木塊不會掉落到水平面上。一段時間後，甲、乙兩木塊以同一速度 v_f 運動，求 v_f。

(2) 請舉出甲、乙兩木塊系統間的內力為何？

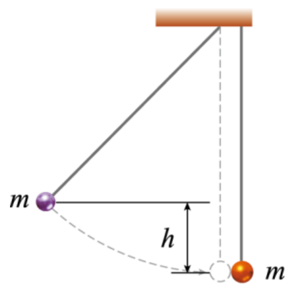
習題

3. 兩支長度皆為 L 的單擺，其擺錘的質量分別為 m_1 與 m_2。今將擺錘 m_1 拉起到水平位置後釋放，如右圖所示，已知兩擺錘在最低點處發生直線彈性碰撞，且碰撞後 m_2 上升的高度為 $\frac{L}{2}$，則 $\frac{m_2}{m_1}$ 之值為何？



4. 甲、乙為質量相等的兩質點，在光滑水平面上以同一速率 v，沿著不同方向分別作等速運動。隨後它們彼此碰撞而結合成一體，並以速率 $\frac{v}{2}$ 沿 x 軸方向前進。已知在過程中外力的合力為零，則甲質點在碰撞前的運動方向與 x 軸夾角是多少？
(A)0°　(B) 30°　(C) 45°　(D) 60°　(E) 90°。　【101 指考】

5. 如圖所示，兩小球的質量均為 m，以長度相等的兩細繩分別懸吊。其中一球仍靜止於懸吊位置，另一球則左移，使它升高 h，釋放後兩球相撞而結合為一，則結合體所能達到的最大高度若干？

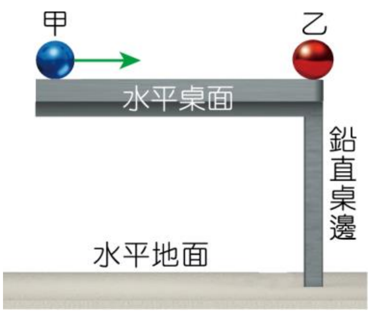


6. 一質量為 0.50 公斤之球體以 $v=20.0$ 公尺／秒的速度水平射至垂直的磚牆，入射點距地面的高 $h=4.90$ 公尺，球體以速度 v' 水平反彈而落至距牆基 15.0 公尺的地面上，求此球體碰撞磚牆時所損失的能量為若干？

7. 質量為 m_1 的甲物體，以初速度 v_0 朝 $+x$ 方向運動（ $v_0>0$ ），與質量為 m_2 ，原為靜止之乙物體產生一維碰撞。碰撞後甲物體之速度為 v_1 ；乙物體之速度為 v_2（朝 $+x$ 方向為正值），則下列敘述，何者為正確？
(A)如 $v_1>0$ ，則 m_1 一定大於 m_2　(B)如 $v_1=0$ ， $v_2=v_0$ ，則 m_1 一定等於 m_2　(C)如 $v_2-v_1=v_0$ ，則此碰撞一定是彈性碰撞　(D)如 $m_1v_1+m_2v_2=m_1v_0$ ，則此碰撞一定是彈性碰撞　(E)如 $v_1=v_2$ ，則此碰撞一定是非彈性碰撞。【89 日大】

題組

如圖所示，水平光滑桌面上的甲球向右等速滑行，過程中無滾動，接著與靜置於桌邊的乙球作正面彈性碰撞。已知甲、乙兩球半徑相同，質量分別為 2*m* 及 *m*，則：



1. 甲、乙兩球碰撞後瞬間速率的比值。
2. 碰撞後兩球各自落於水平地面上，落地過程中兩球僅受重力，落地點與鉛直桌邊底部的水平距離分別為 P 和 Q ，則甲、乙兩球落地點與鉛直桌邊底部的水平距離 P 和 Q 的比值為何？

【 改寫自 100 指考】