

電流磁效應

8-1 電流的磁效應

8-2 載流導線的磁場

8-3 載流導線在磁場中所受的磁力

8-4 帶電質點在磁場中的運動



矗立在丹麥哥本哈根公園中厄斯特的雕像，供人們緬懷他在電磁學上的貢獻。



To experiment is not to set up experiments blindly, but rather a great scientific art.

做實驗不是盲目地將之架設起來就好了，它反而更像是一項偉大的科學藝術創作。

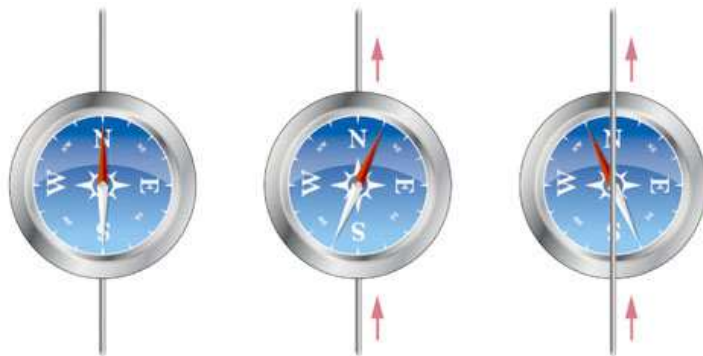
— 厄斯特（Hans Christian Oersted, 1777-1851）

東西方對於磁的現象發現均甚早，中國在春秋戰國時期就製作「司南」（利用磁石用以指向南北方向的裝置），後經改良作為指南針，並傳入西方。由於指南針對於古時候航海，貿易，戰爭和文化交流具有重大的影響，故被列為中國的四大發明之一。

1269年，法國的馬理古（Pierre de Maricourt，生卒年不詳）對磁現象進行有系統的研究。他用小磁針在球形磁石表面上移動並描繪其指向，獲得類似地球子午線的曲線，這些曲線匯集在磁石的兩個端點上，他稱之為磁極。英國人吉爾伯特（本書第六章曾提過）繼續馬理古的研究並予以擴展，於1600年出版《論磁石、磁鐵、和最大的磁石——地球》一書，為磁學的研究揭開新的一頁。書中明白揭示磁與電的許多差異，並指出地球本身具有磁性，相當於一個大磁鐵，磁針因為地磁的作用而能指引方向。

在吉爾伯特之後的兩百年間，電學和磁學分別獨立地發展著。這段期間有人發現磁針會受到閃電或其他放電的現象而偏轉。1731年7月有一英國商人將許多湯匙和刀叉放在箱子內，突然狂風暴雨，雷電交加，落雷擊中箱子，後來發現箱內的湯匙和刀叉竟然能吸引鐵釘。美國人富蘭克林想到，既然閃電可以使鐵質材料磁化，那來頓瓶的電荷如果放電的話，也應該可以使鐵質材料磁化，1751年他果然成功作出來頓瓶放電使鋼針磁化的實驗。於是人們認為電和磁之間可能有某種關連，並開始正視此一問題，也有人認為這就是電流造成的結果。

十九世紀初，伏打發明了電池，電池可以提供穩定的電流來做實驗。這使得丹麥人厄斯特（Hans Christian Oersted，1777-1851）於1819至1820年間想到利用電流來做實驗，觀察導線通過電流時，能否對旁邊的磁針產生影響。起初，他將導線安置與磁針垂直，結果磁針不受任何影響。最後他將導線改為與磁針平行，果然看見磁針受到電流的影響而明顯偏轉，如圖 8-1 所示。



▲圖 8-1 (a)磁針沿地磁方向，導線未通電流，磁針不受影響；(b)導線通以電流，上方的磁針向右偏轉；(c)將磁針改置於導線下方，磁針向左偏轉。

後來厄斯特使用更大的電流，多次重複此實驗，確認了導線通過電流時，會使附近的磁針偏轉，也就是電流在其周圍會產生磁場（如圖 8-2），厄斯特在 1820 年正式公開發表此一磁效應。

厄斯特的發現使得電和磁兩種現象有了關連，開啟了一扇新的物理學的研究大門，吸引了許多科學家相繼投入電磁學的實驗與探討。但是厄斯特的發現是定性的，在定量上並無著墨。法國人阿拉戈（Francois Arago, 1786-1853）在丹麥得知此訊息，兩個月後在法國科學院報告了厄斯特的發現，掀起了法國科學家對電流磁效應研究的熱潮。一星期後，法國人安培（Andr -Marie Amp re, 1775-1836）提出了電流與所生磁場方向的關係（即安培右手定則），以及電流通過的兩平行導線之間的作用力。又一個月後，法國的兩位科學家必歐（Jean-Baptiste Biot, 1774 - 1862）和沙伐（Felix Savart, 1791-1841）兩人在科學院會議中提出了導線通以電流時，導線周圍所建立的磁場的公式，即現在所稱的必歐－沙伐定律，展開了更進一步的研究與應用。

厄斯特的發現彷彿是點燃電磁學定律的火種，使許多重大發現如燎原般快速地展開。厄斯特發現電流的磁效應，開啟了電磁學理論的新紀元。本章即由介紹安培右手定則及必歐－沙伐定律開始，繼而討論電流與帶電質點在磁場中所受之作用力及其應用。



▲圖 8-2 厄斯特觀察到電流能使附近的磁針偏轉。

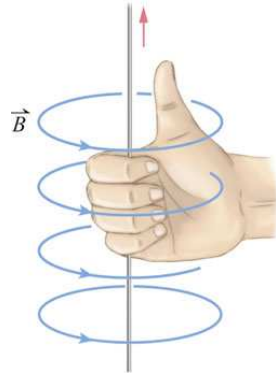
8-1 電流的磁效應

1. 安培右手定則

圖 8-3 中的導線通以電流，可以觀察到周圍的鐵屑受磁化而作同心圓狀排列，可見載流導線的周圍會產生磁場。安培提出電流與所生磁場方向的關係，如圖 8-4 所示，以右手握住導線，拇指伸出所指為電流方向，其他四指彎曲為磁場在導線四周的方向，稱為安培右手定則。



▲圖 8-3 通過電流的導線會使附近的鐵屑大致排列成同心圓狀。



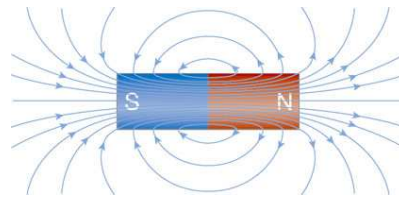
▲圖 8-4 安培右手定則。

磁場與電場類似，都是向量，其符號為 \vec{B} 。磁場的量值也可以用力線來表示，稱為磁力線。磁力線的密集程度與磁場量值成正比，而磁力線上某點的切線方向表示該位置磁場的方向，也就是磁針在此位置時 N 極所指的方向。



電力線與磁力線

我們可以透過電力線和磁力線的概念來描述空間各位置電場和磁場的方向與量值，但兩者有一很大的不同處，即靜電荷場源產生的電場中，電力線是起於正電荷，止於負電荷，不是封閉的；磁力線則為封閉的曲線。例如在圖 8-5 中，條形磁鐵外部的磁力線是由 N 極到 S 極，內部則由 S 極到 N 極，形成封閉曲線。

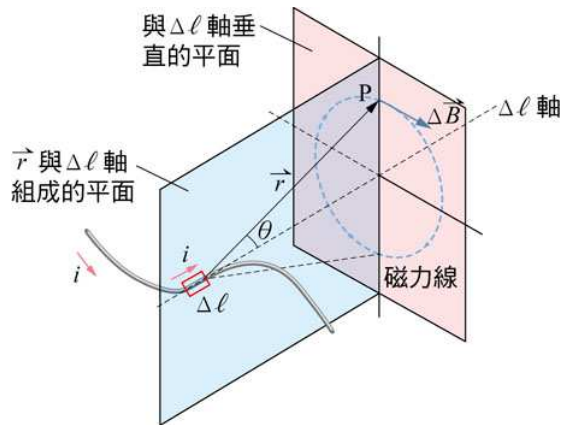


▲圖 8-5 條形磁鐵外部的磁力線是由 N 極到 S 極，內部則由 S 極到 N 極，形成封閉曲線。

2. 必歐－沙伐定律

一導線有電流通過，可以在空間中造成磁場。導線的每一小段對磁場的產生都有貢獻，必歐－沙伐定律（Biot-Savart law）就是描述其中任一小段電流在空間中某一點產生的磁場。有了一小段電流造成的磁場貢獻之後，然後依導線是直的或是不同的彎曲情形，再予以疊加就可以得到整個導線在此點所造成的磁場了。

如圖 8-6 所示，一導線有電流 i 通過，我們將依必歐－沙伐定律來討論其中一小段 Δl 在 P 點造成磁場的貢獻 $\Delta \vec{B}$ 。 Δl 長度甚小，至 P 點的距離為 r ，若以位置向量 \vec{r} 表示，其方向為由 Δl 至 P 點。 Δl 的延長線視為導線在此位置的切線，此切線可稱為 Δl 軸。



▲圖 8-6 電流的一小段 Δl 在 P 點所生磁場 $\Delta \vec{B}$ 方向如圖中所示。

圖中藍色平面為 \vec{r} 與 Δl 軸構成的平面的一部分，而紅色平面與 Δl 軸垂直亦與藍色平面垂直。如同安培右手定則，以右手握 Δl 軸，拇指指向電流方向，則四指彎曲所指的方向即為磁場方向。所以 Δl 產生的磁場中通過 P 點的磁力線為圖中紅色平面上的圓周，而 P 點處的磁場 $\Delta \vec{B}$ 之方向為圖中圓周在 P 點的切線方向，可見 $\Delta \vec{B}$ 的方向同時垂直於 \vec{r} 與 Δl 軸所構成的平面。 Δl 有電流 i 通過，在 P 點產生磁場的貢獻為 $\Delta \vec{B}$ ， $i \Delta l$ 可視為 $\Delta \vec{B}$ 的場源，根據必歐和沙伐的研究得知， $\Delta \vec{B}$ 之量值與場源 $i \Delta l$ 成正比，且與 P 點至 Δl 距離 r 的平方成反比，這與電場的情況類似，不同的是 $\Delta \vec{B}$ 的量值還與 $\sin \theta$ 成正比， θ 為 \vec{r} 與 Δl 軸的夾角（參考圖 8-6）。若以數學式表示則為

$$\Delta B \propto \frac{i \Delta l \sin \theta}{r^2}, \text{ 式中的比例常數通常寫為 } \frac{\mu_0}{4\pi},$$

即

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} = \frac{i \Delta \ell \sin \theta}{r^2} \quad \text{8-1 式}$$

式中磁場量值 ΔB 的單位為特斯拉^註 (tesla, 符號為 T), 電流 i 的單位為安培, 導線長度 $\Delta \ell$ 與距離 r 的單位均為公尺, 而 μ_0 為一常數, 稱為真空的磁導率 (magnetic permeability), 其值為

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A} = 12.57 \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$$

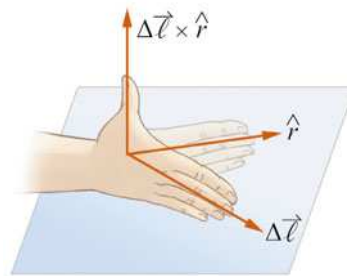
而 (8-1) 式中之比例常數 $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ 。

(8-1) 式僅表示磁場的量值, 若欲同時表示磁場的量值和方向, 則可方便地以下列的向量式表示之

$$\Delta \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} = \frac{i \Delta \vec{\ell} \hat{r}}{r^2} \quad \text{8-2 式}$$

上式即為必歐 — 沙伐定律

的內容。式中 \hat{r} 為單位向量 (無因次), 其量值為 1, 方向沿著位置向量 \vec{r} ; $\Delta \ell$ 為載流的線段向量, 其量值為線段的長度 $\Delta \ell$, 方向為流經其上的電流方



▲圖 8-7 利用右手來決定向量積的方向。

向。 $\Delta \vec{\ell} \times \hat{r}$ 為 $\Delta \vec{\ell}$ 和 \hat{r} 的向量積 (vector product), 其量值定義為

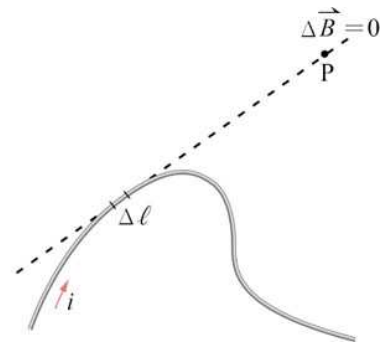
$$|\Delta \vec{\ell} \times \hat{r}| = |\Delta \vec{\ell}| |\hat{r}| \sin \theta = \Delta \ell \sin \theta \quad \text{8-2 式}$$

式中 θ 為兩向量之間的夾角 (小於 180°)。

$\Delta \vec{\ell} \times \hat{r}$ 的方向同時垂直於 $\Delta \vec{\ell}$ 和 \hat{r} , 即垂直於此兩向量所構成的平面, 也可由如圖 8-7 所示的方法決定之。先將四手指順著第一個向量 $\Delta \vec{\ell}$ 的方向伸直, 然後以小於 180° 的角度彎向第二個向量 \hat{r} , 則大拇指所指的方向即為向量積的方向。

^註 特斯拉的定義將在第三節中說明。

由(8-3)式可知，當 $\Delta \vec{\ell}$ 和 \hat{r} (或 \vec{r})平行時， $\theta = 0^\circ$ 或 180° ，其向量積為零，此一小段載流導線在其切線方向上任何位置沒有磁場的貢獻，如圖8-8所



▲圖8-8 一小段載流導線在其切線方向任何位置沒有磁場的貢獻。

欲計算整個導線在空間中某位置產生的磁場時，我們將導線分成許多小段，先利用必歐-沙伐定律計算出導線上每一小段的磁場貢獻之後，再將這些小貢獻依向量相加的方法求和即可。不過計算的難易程度與導線的形狀有關，下一節我們將討論幾種不同幾何形狀的載流導線所產生的磁場。



磁場的單位 — 特斯拉

特斯拉 (Nikola Tesla, 1856-1943, 圖8-9) 是出生於克羅埃西亞的科學家，移民美國成為美國公民。特斯拉在物理學有很大的成就，而且也是大發明家。最大的成就之一就是交流發電機的發明與交流電的使用。另外，替美國尼加拉發電站製造發電機組，此發電站至今仍是世界著名水力發電站之一。他還有其他許許多多的發明，例如無線傳訊、無線電遙控技術、收音機、雷達、傳真機、真空管、霓虹光管等等，因而造福了人類。為了紀念他，國際單位制中將磁場的單位以他來命名。



▲圖8-9 23歲時的特斯拉

強度為1 特斯拉的磁場是很大的。我們都知道地球有如一個大磁鐵，地球附近存在著磁場。地表的磁場大約為 5×10^{-5} 特斯拉左右，平常另取特斯拉的萬分之一做為磁場單位，稱為高斯 (gauss, 符號為 G 或 Gs)，即

$$1 \text{ T} = 10^4 \text{ gauss}$$

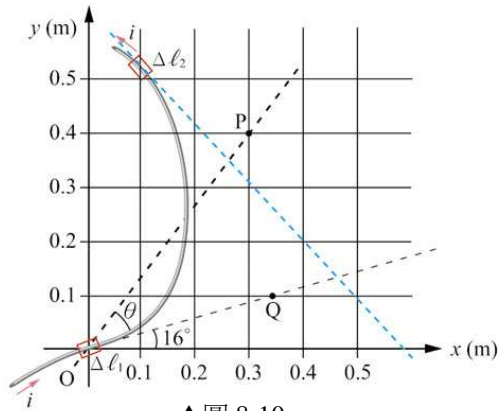
臺北市的地磁約為 0.45 高斯 (即 4.5×10^{-5} 特斯拉)。

.....

範例 8-1

圖 8-10 中一導線的電流 i 為 10 A，
導線通過原點處的一小段 Δl_1 長度為
0.010 m，其切線方向與 x 軸成 16° ，則

- (1) Δl_1 小段在圖中 P 和 Q 點造成的磁場
量值和方向各為何？
- (2) 圖中導線上另有一小段 Δl_2 (圖中藍
色虛線為 Δl_2 的切線)，此小段對於
P 點和 Q 點造成的磁場方向為何？



▲圖 8-10

[解答] (1) 設 Δl_1 小段在圖中 P 點造成的磁場為 $\Delta \vec{B}$ ，其量值 ΔB_1 為：

$$\Delta B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta l_1 \sin \theta}{r^2}$$

，式中的 θ 為 \vec{OP} 與 \vec{OQ} 兩方向的夾角，由

圖中很容易看出 \vec{OP} 方向與 x 軸的夾角為 53° ，故

$$\theta = 53^\circ - 16^\circ = 37^\circ$$

。且 O 與 P 的距離為 0.50 m。

$$\text{故 } \Delta B_1 = (10^{-7} \text{T} \cdot \text{m/A}) \frac{(10 \text{A})(0.010 \text{m}) \sin 37^\circ}{(0.50 \text{m})^2} = 2.4 \times 10^{-8} \text{T}$$

由安培右手定則可知 $\Delta \vec{B}_1$ 的方向為垂直出紙面。

Δl_1 小段在圖中 Q 點造成的磁場為零，因為 Q 點在 Δl_1 的切線上，
必歐-沙伐定律公式中的 θ 為零。

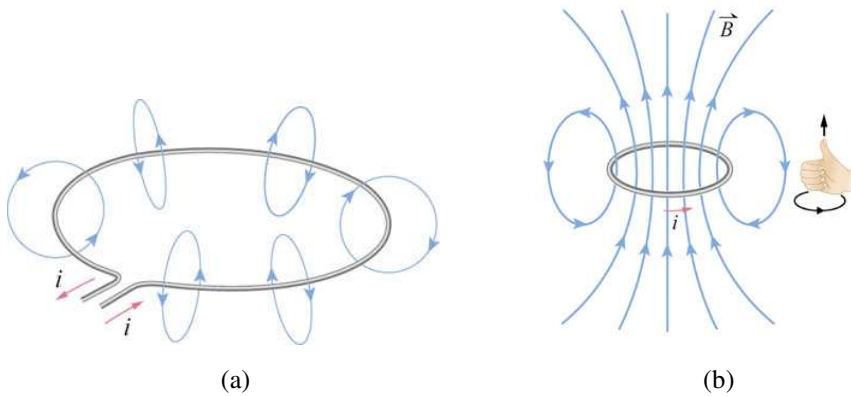
- (2) 由安培右手定則可知 Δl_2 小段在圖中 P 點造成的磁場方向為垂直入
紙面。在 Q 點造成的磁場方向則為垂直出紙面。

8-2 載流導線的磁場

本節我們將具體利用必歐－沙伐定律來計算幾種不同幾何形狀的載流導線所產生的磁場，如果數學處理的程度超出高中程度時，則僅列出其結果。

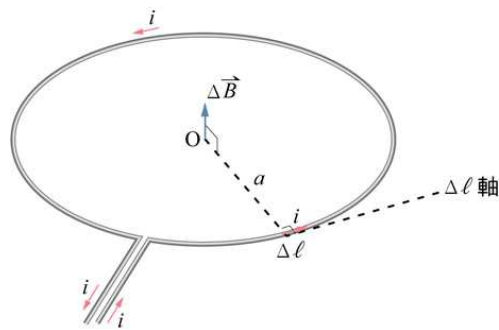
1. 載流圓形線圈中心的磁場

考慮圖 8-11 中的圓形線圈，當線圈通以電流時，根據必歐－沙伐定律，線圈上每一小段產生的磁場方向在圈內都是向上，如圖中各小段的磁力線所示。各小段在圓心處產生磁場的貢獻和之方向為垂直圈面向上，而磁場的量值是多少呢？



▲圖 8-11 (a)圖中載流圓形線圈每一小段產生的磁場方向在圓內都是向上；(b)整個線圈的電流在線圈內產生向上的磁場。

若通過圓形線圈的半徑為 a ，通過的電流為 i ，在圖 8-12 中，設線圈的圈任一小段 Δ 在圓心處產生的磁場為 Δ ，根據必歐－沙伐定律公式，其量值 $\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta \ell \sin \theta}{r^2}$ ，式中的 r 為圓的半徑 a ，而 θ 為 $\Delta \ell$ 軸與該處半徑的夾角，顯然為 90° 。



▲圖 8-12 圖中載流圓形線圈中一小段 $\Delta \ell$ 在圓心產生的磁場量值為 ΔB ，方向向上。

所以

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta \ell}{a^2}$$

圓周上每一小段產生的磁場方向相同，都是向上，所以把各小段的貢獻取向量和時，可以將量值直接相加，即圓心處的磁場 B 量值為

$$\begin{aligned} B &= \Sigma \Delta B \\ &= \Sigma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta \ell}{a^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Sigma \Delta \ell}{a^2} \end{aligned}$$

上式中的 $\Sigma \Delta \ell$ 為各小段的長度相加，也就是圓周長 $2\pi a$ ，故得圓心處的磁場 B 量值為

$$B = \frac{\mu_0 i}{2a}$$

8-4 式

其方向為向上。

對於載流圓線圈在圓心所產生磁場的方向可用以下方式決定：右手四指沿電流方向彎曲，此時拇指伸出的方向即是線圈中心軸上的磁場方向，如圖 8-11(b) 所示。

如果導線繞成 N 匝，則圓心處的磁場 B 量值成為 N 倍，而方向相同。

線圈內其他位置磁場的計算，則需要較繁難的數學處理，超出高中的程度，不過基本原理是相同的。

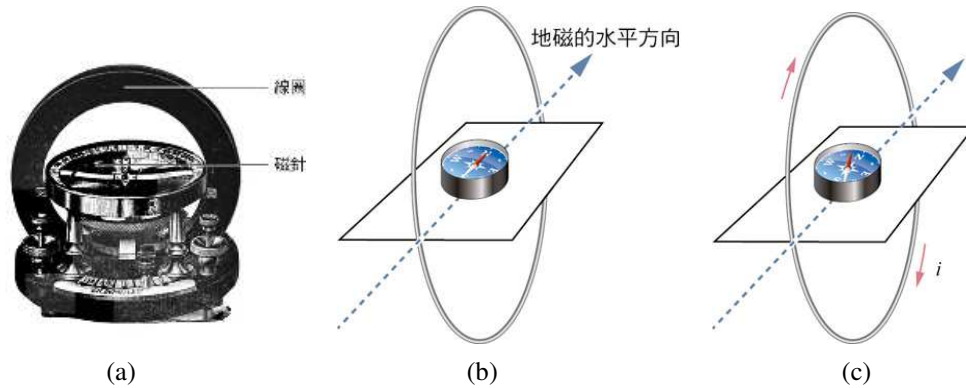


想一想

1. (8-4) 式是整個線圈在圓心所產生的磁場，半個線圈產生的磁場是否 (8-4) 式的一半？
2. 若一條導線通以電流 i ，導線中有一段半徑為 a 的圓弧，此弧所對的圓心角為 θ (弧度為單位)，則此弧在線圈圓心處產生磁場的貢獻為何？

範例 8-2

1837 年科學家想到利用載流線圈和地磁的作用，來測定電流（如果地磁的水平分量為已知）或測定地磁的水平分量（如果電流為已知），圖 8-13(a)為此種裝置，稱為正切電流計；圖(b)和(c)為其原理簡圖，線圈鉛直豎立，中心處水平方向置一磁針，使磁針在地磁的南北方向。圖(b)中線圈未通電流，圖(c)則通以電流，磁針會偏一角度。設線圈有 10 匝，半徑為 0.20 m，通過電流後磁針偏轉了 30° ，若該處地磁的水平分量為 $4.5 \times 10^{-5} \text{ T}$ ，求通過的電流。



▲圖 8-13 (a)正切電流計；(b)線圈未通電流，磁針在地磁的水平方向；(c)線圈通以電流，磁針偏轉。

[解答] 在圖 8-14 中，設地磁的水平分量為 B_e ，方向為指向地磁北極，也是線圈未通電流時磁針的方向。因為電流產生的磁場與地磁垂直，使磁針的 N 極偏轉 θ 角。若電流產生的磁場量值為 B ，則因

$$\tan \theta = \frac{B}{B_e}, \text{ 故 } B = B_e \tan \theta$$

由題意 $B_e = 4.5 \times 10^{-5} \text{ T}$ ； $\theta = 30^\circ$ ，

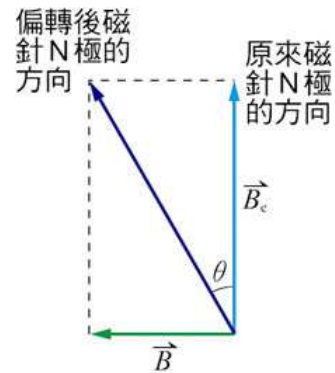
$$\text{得 } B = (4.5 \times 10^{-5} \text{ T}) \tan 30^\circ$$

$$= 2.6 \times 10^{-5} \text{ T}$$

因為線圈有 10 匝，由 (8-4) 式知線圈中心的磁場為

$$B = 10 \times \frac{\mu_0 i}{2a} = (10) \frac{(4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) i}{2(0.20 \text{ m})} = 2.6 \times 10^{-5} \text{ T}$$

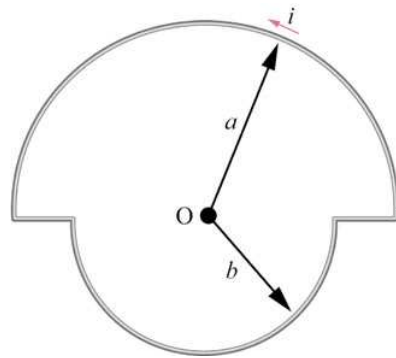
故得 $i = 0.83 \text{ A}$



▲圖 8-14 \vec{B}_e 為地磁的水平分量； \vec{B} 為電流所產生的磁場，兩者同時作用在磁針，使磁針偏轉 θ 角。

範例 8-3

一形狀如圖 8-15 所示之封閉線圈，兩半圓的半徑各為 a 和 b 。若通以逆時針方向的電流 i 時，則圓心 O 點的磁場為何？



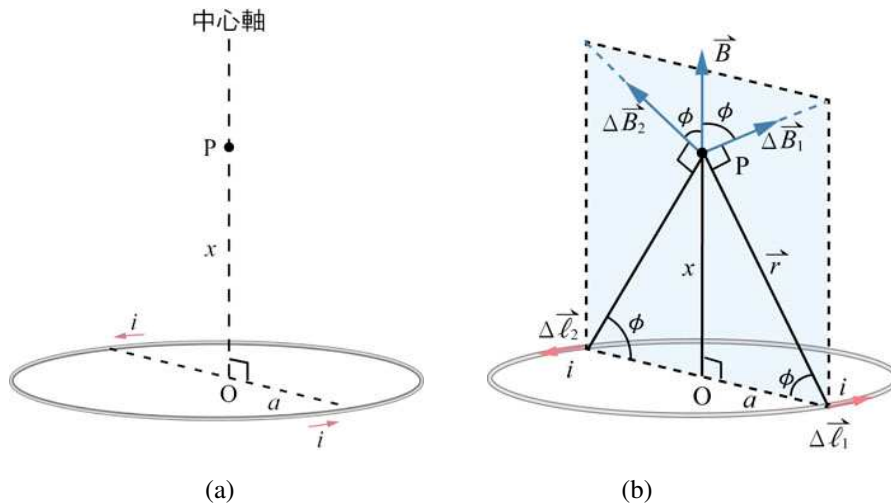
▲圖 8-15

[解答] 由必歐-沙伐定律知，兩小段載流直導線在 O 點所生磁場為零，而兩半圓上任一小段電流在 O 點所生磁場的方向均向外垂直於紙面，故在圓心 O 點處的磁場為兩者之和，即

$$B = \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 i}{2a} + \frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 i}{2b} = \frac{\mu_0 i (a+b)}{4ab}, \text{ 方向為垂直出紙面。}$$

2. 載流圓線圈中心軸上一點的磁場

圖 8-16(a) 中，一載流圓線圈的半徑為 a ，通過的電流為 i ，電流方向標示於圖中。中心軸為過圓心 O 而垂直於圈面的直線， P 為中心軸上之一點， P 與 O 的距離為 x 。我們要計算此電流在 P 點所產生的磁場。



▲圖 8-16 (a) P 為載流圓線圈中心軸上之一點；(b) 求電流在 P 點產生的磁場時，分析兩小段電流 $\Delta \vec{\ell}_1$ 和 $\Delta \vec{\ell}_2$ 對磁場的貢獻圖。

如圖 8-16(b)所示，考慮線圈中任一小段 $\Delta \vec{\ell}_1$ ，此小段至 P 的位置向量為 \vec{r} ，其量值為 $r = \sqrt{a^2 + x^2}$ 。 $\Delta \vec{\ell}_1$ 在 P 點產生的磁場為 $\Delta \vec{B}_1$ ，由必歐-沙伐定律知其量值為 $\Delta B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta \ell_1 \sin \theta}{r^2}$ ，其中 θ 為 \vec{r} 與 $\Delta \vec{\ell}_1$ 兩向量的夾角，從圖中可以明顯看出 $\theta = 90^\circ$ 。故

$$\Delta B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta \ell_1 \sin 90^\circ}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta \ell_1}{r^2}$$

$\Delta \vec{B}_1$ 的方向需同時垂直於 \vec{r} 和 $\Delta \vec{\ell}_1$ 。圖中淺藍色平面垂直於 $\Delta \vec{\ell}_1$ ，故 $\Delta \vec{B}_1$ 需在此平面上，並與 \vec{r} 垂直。圖中顯示出 $\Delta \vec{B}_1$ 的方向正符合所求，且遵守安培右手定則。

圖中與 $\Delta \ell_1$ 對應的長度相等之另一小段 $\Delta \ell_2$ ，在 P 點產生磁場的 $\Delta \vec{B}_2$ 之量值與 $\Delta \vec{B}_1$ 相同，兩者方向不同，與中心軸的夾角則相同，設夾角為 φ 。由對稱性可知， $\Delta \vec{B}_1$ 與 $\Delta \vec{B}_2$ 在垂直於中心軸的分量相等但方向相反，互相抵銷，而平行於中心軸的分量則相同。所以計算整個線圈在 P 點產生的磁場量值時，僅需將各小段 $\Delta \ell$ 產生的磁場 $\Delta \vec{B}$ 平行於中心軸的分量 $\Delta B \cos \varphi$ 相加即可。故 P 點磁場的量值為

$$\begin{aligned} B &= \Sigma \Delta B \cos \varphi = \Sigma \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Delta \ell_1}{r^2} \cos \varphi = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i \Sigma \Delta \ell}{r^2} \cos \varphi \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i 2\pi a}{r^2} \cos \varphi \end{aligned}$$

由圖中很容易看出 $\cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ ，代入上式得

$$B = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad \text{8-5 式}$$

按照安培右手定則可知 P 點處磁場的方向向上。

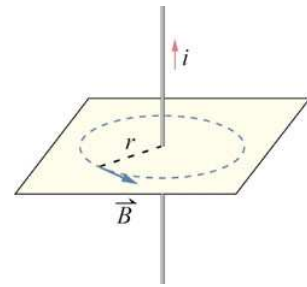
若 $x=0$ ，則 P 即為線圈的中心點 O ，由 (8-5) 式可得線圈中心的磁場，結果與 (8-4) 式相同。若 $x \gg a$ ，則 P 位於中心軸上距離線圈甚遠處，(8-5) 式中分母的 a^2 可以略去，故此處之磁場與 x 的三次方成反比。

3. 載流無限長直導線產生的磁場

圖 8-17 中，載有電流 i 的無限長直導線，在與導線相距 r 處所產生的磁場 \vec{B} ，可由必歐－沙伐定律計算求得。但由於計算過程涉及積分，超出本書程度，故此處僅引用其計算的結果，所得磁場的量值為

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

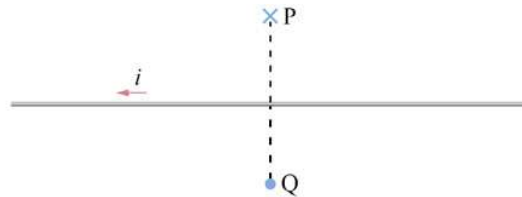
8-6 式



▲圖 8-17 載流長直導線所生磁場的方向沿著以導線為中心軸的圓周的切線方向。

由上式可知，長直導線在空間中所生磁場的量值與導線的垂直距離成反比，而與電流的大小成正比。至於磁場方向則可由安培右手定則得知，是在以導線為軸心、半徑為 r 的圓周切線上，如圖 8-17 所示。

圖 8-18 中無限長直導線在水平方向，電流由右方流向左方，且 P 和 Q 兩點至導線的距離相等。導線在此兩點產生的磁場量值相等，但是方向相反。



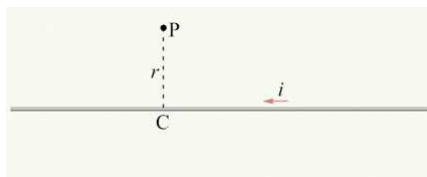
▲圖 8-18 載流無限長直導線在 P 和 Q 點產生的磁場方向相反

P 點的磁場方向為垂直入紙面，通常以符號 \times 或 \otimes 表示此方向。Q 點的磁場方向為垂直出紙面，通常以符號 \cdot 或 \odot 表示此方向。

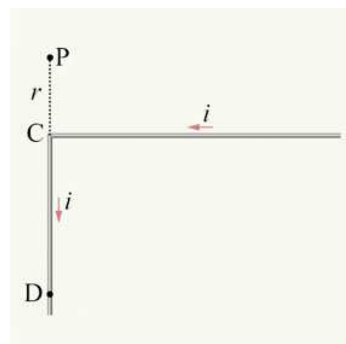


想一想

圖 8-19(a) 中，一載流無限長直導線在 P 處產生的磁場量值為 B 。若將此導線在 C 點處彎折成直角，如圖 8-19(b) 所示，圖中的 P 點位於 DC 的延長線上，P 處的磁場為 B' 。 B' 是否為 B 的一半？



(a)

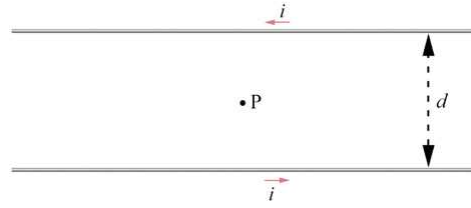


(b)

▲圖 8-19

範例 8-4

在圖 8-20 中，兩載流無限長直導線互相平行，相距 d ，電流同為 i 。圖中的 P 點在兩導線之正中間位置。



▲圖 8-20

(1) 若電流方向相反時，求電流在 P 點產生的磁場。

(2) 若電流方向相同時，求電流在 P 點產生的磁場。

[解答] (1) 由安培右手定則知兩電流在 P 點產生的磁場方向相同，均為垂直出

紙面的方向，而其量值也相等，均為 $\frac{\mu_0 i}{2\pi(d/2)}$ ，故 P 點的磁場量

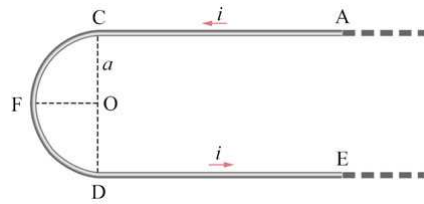
$$\text{值為 } B = 2 \times \frac{\mu_0 i}{2\pi(d/2)} = \frac{2\mu_0 i}{\pi d}。$$

(2) 若兩電流方向相同，則兩電流在 P 點產生的磁場量值相等，但是方向

相反，故抵銷為零。

範例 8-5

在圖 8-21 中，一導線載有電流 i 從右方甚遠處至圖中 C 點時，導線彎成半圓形 CFD ，導線在 D 點成為與原方向相反折回至甚遠處。若半圓的半徑為 a ，求圓心 O 點的磁場。



▲圖 8-21

[解答] O 點的磁場來自三個貢獻：

(1) 上面直導線電流產生的磁場：量值為 $\frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$ ，方向為垂直出紙面。

(2) 半圓部分產生的磁場：量值為 $\frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 i}{2a}$ ，方向為垂直出紙面。

(3) 底下直導線電流產生的磁場：量值為 $\frac{1}{2} \times \frac{\mu_0 i}{2\pi a}$ ，方向為垂直出紙

面。（與(1)相同）

$$O \text{ 點的磁場為這三者的向量和，即 } B = \frac{\mu_0 i}{2a} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right)，$$

方向為垂直出紙面。

範例 8-6

圖 8-22 中有兩無限長直導線，相距 d ，通以相同的電流 i ，但是方向相反，其一方為垂直出紙面，另一方為垂直入紙面（設紙面為垂直於兩導線的平面）。圖中紙面上的 P 點在兩導線連線的垂直平分線上，與兩導線的連線中點距離為 x 。求兩導線在 P 點產生的磁場。

[解答] 參考圖 8-23，左邊電流在 P 點產生的磁場為 \vec{B}_1 ，方向為垂直 PA，已標示於圖中，其量值為

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}, \text{ 式中的 } r = \sqrt{(d/2)^2 + x^2}, \text{ 即}$$

$$B_1 = \frac{\mu_0 i}{2\pi \sqrt{(d/2)^2 + x^2}}$$

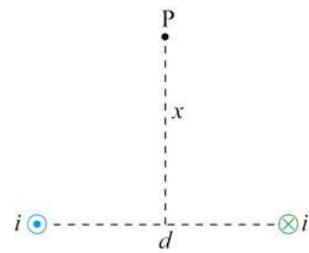
右邊電流在 P 點產生的磁場為，方向為垂直 PC，也已標示於圖中，其量值與 B_1 相等。由對稱性可知， \vec{B}_1 與 \vec{B}_2 之向量和 \vec{B} 的方向為向上，其量值為

$$B = 2 B_1 \cos \theta$$

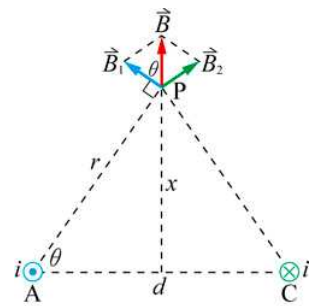
$$\text{因 } \cos \theta = \frac{(d/2)}{r} = \frac{(d/2)}{\sqrt{(d/2)^2 + x^2}}$$

故

$$B = 2 \times \frac{\mu_0 i}{2\pi \sqrt{(d/2)^2 + x^2}} \cdot \frac{(d/2)}{\sqrt{(d/2)^2 + x^2}} = \frac{2\mu_0 i d}{2(d^2 + 4x^2)}$$



▲圖 8-22

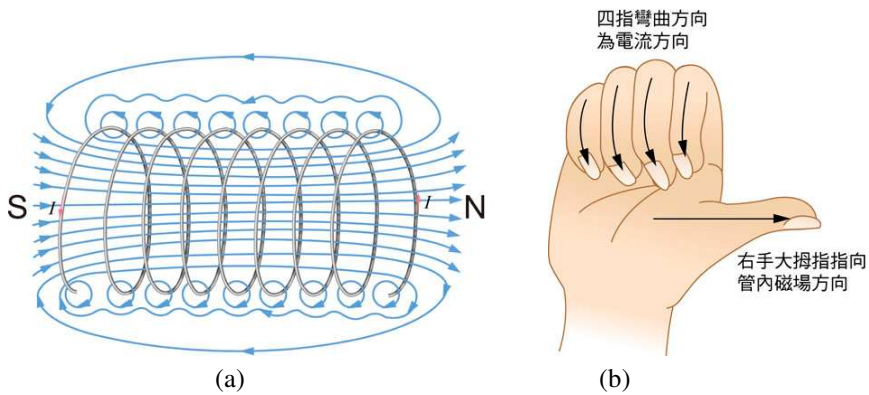


▲圖 8-23

4. 螺線管電流產生的磁場

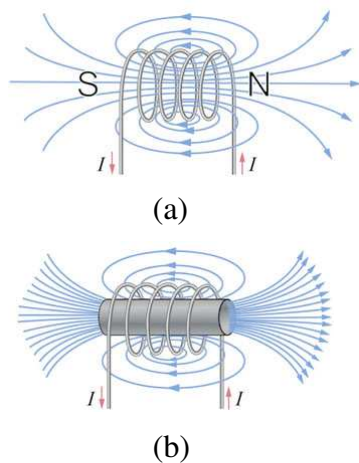
長導線所繞成的均勻螺旋形線圈，稱為螺線管（solenoid）。當螺線管載有電流時，在空間中任一點的磁場，為每一匝圓線圈所生磁場的向量和。如圖 8-24(a)所示，在管外各匝線圈所生的磁場有部分相互抵銷之現象，故磁場甚弱且不均勻。但在管內，各匝線圈所生磁場則有相加之趨勢，故其磁場甚強且相當均勻。管長愈 s 長，且線圈愈均勻緊密纏繞，管內所生的磁場就愈均勻。

螺線管內的磁場方向與中心軸平行，可如圓線圈一般決定之，如圖 8-24(b)所示。磁力線從螺線管的一端發出，再回到另一端，並由管內回到原出發點，形成一封閉曲線。螺線管內外的磁場分布與長磁棒相似，其發出磁力線之一端可視為 N 極，而另一端則可視為 S 極。



▲圖 8-24 (a)螺線管外側的磁場甚弱，管內磁場則甚均勻；
(b)管內磁場的方向可由右手決定。

如果在螺線管內插入一軟鐵心便成電磁鐵，如圖 8-25 所示。當螺線管未通以電流時無磁性，但若通以電流，則軟鐵心被磁化後使管內磁性大為增強，遠較單純螺線管或天然磁石的磁性大得多。工業用的強力電磁鐵可作為起重機，如圖 8-26 所示，在搬運鐵製物品時非常方便，也可用以區分磁性和非磁性的物件。



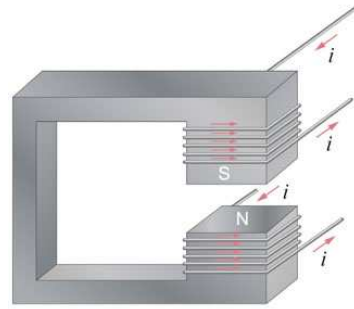
▲圖 8-25 通電流的螺線管內放入軟鐵心，可使管內磁場強度大幅增加。(a)空心的螺線管；
(b)插有軟鐵心的螺線管。



▲圖 8-26 工業用的電磁鐵起重機，可搬運鐵製物品，或用以區分磁性和非磁性物件。

5. 均勻磁場

一磁場中各位置的磁場量值和方向都相同者，稱為均勻磁場。電流通過的螺線管內部（圖 8-24）是常見的均勻磁場之一。另外，以鐵質材料做成類似圖 8-27 所示的形狀，並繞以線圈通過同方向的電流成為電磁鐵。在兩平面磁極之間（不靠近平面的邊緣）可視為均勻磁場。均勻磁場在理論研究和實際應用都很重要，以下兩節的討論以均勻磁場為主。



▲圖 8-27 電磁鐵兩極之間的磁場近似均勻磁場。

8-3 載流導線在磁場中所受的磁力

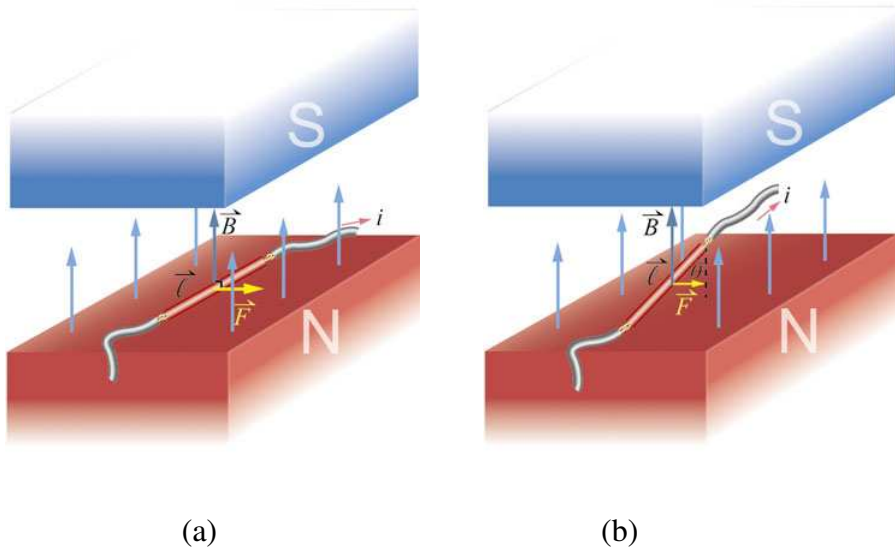
1. 載流導線在均勻磁場中所受的磁力

載流導線在磁場中受力的現象首先由安培所發現，他在 1825 年所發表的論文中，記載了電流在磁場中受力的關係。由實驗中得知長度為 ℓ 、電流為 i 的一段載流直導線，在均勻磁場 \vec{B} 中，若導線與磁場方向垂直，如圖 8-28(a) 所示，則導線所受磁力的量值 F 為

$$F = i\ell B \quad \text{8-7 式}$$

若導線與磁場的夾角為 θ ，如圖 8-28(b) 所示，則導線所受磁力的量值 F 為

$$F = i\ell B \sin \theta \quad \text{8-8 式}$$



▲圖 8-28 載流直導線在均勻磁場中的受力。
(a) 導線與磁場垂直時，受力量值為 $i\ell B$ ；
(b) 導線與磁場夾角為 θ 時，受力量值為 $i\ell B \sin \theta$ 。

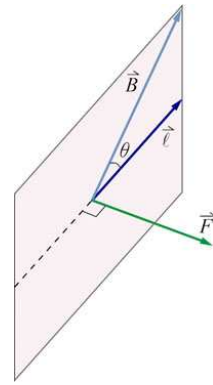
導線所受磁力 \vec{F} 的方向同時垂直於導線和磁場的方向，即垂直於導線和磁場所構成的平面，如圖 8-29 所示。若令 \vec{l} 的量值為導線的長度，方向為電流的方向，則 \vec{F} 可利用第一節學過的向量積來表示，即

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B} \quad \text{8-9 式}$$

當導線與磁場方向垂直時，磁力最大；而當兩者平行時，磁力為零。(8-9) 式中電流的單位為安培，導線長度的單位為公尺，磁場的單位為特斯拉，而磁力的單位則為牛頓。由此可知磁場單位特斯拉定義如下：

長度為 1 公尺 (m)、電流為 1 安培 (A) 的載流直導線，置於均勻磁場中，導線和磁場方向垂直，若導線受力為 1 牛頓 (N) 時，則

該磁場量值稱為 1 特斯拉 (T)，即 $1 \text{ T} = 1 \frac{\text{N}}{\text{A} \cdot \text{m}}$ 。



▲圖 8-29 導線所受磁力的方向即垂直於導線和磁場所構成的平面。

◎範例 8-7

如圖 8-30 所示，一邊長為 0.50 m 之正立方體，置於量值為 0.80 T、方向為 +x 向的均勻磁場中。立方體表面繞有曲折之導線，若導線上的電流為 0.30 A，則圖中 ab、bc 和 cd 各段導線所受的磁力為何？

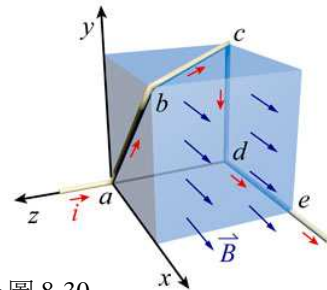
[解答] ab 段導線的長度為 $0.50\sqrt{2}$ m，

向的夾角為 45° ，因此所受的磁力量值

為 $(0.30 \text{ A}) \times (0.50\sqrt{2} \text{ m}) \times (0.80 \text{ T}) \sin 45^\circ = 0.12 \text{ N}$ ，方向為 -z 向。

bc 段導線的長度為 $0.50\sqrt{2}$ m，與磁場方向的夾角為 135° ，因此所受的磁力為 $(0.30 \text{ A}) \times (0.50\sqrt{2} \text{ m}) \times (0.80 \text{ T}) \sin 135^\circ = 0.12 \text{ N}$ ，方向為 -y 向。

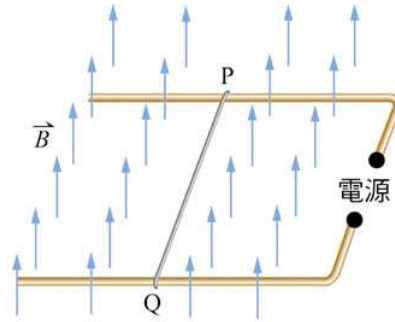
cd 段導線的長度為 0.50 m，與磁場方向的夾角為 90° ，因此所受的磁力為 $(0.30 \text{ A}) \times (0.50 \text{ m}) \times (0.80 \text{ T}) \sin 90^\circ = 0.12 \text{ N}$ ，方向為 +z 向。



►圖 8-30

範例 8-8

圖 8-31 的空間中有鉛直向上，量值為 0.12 T 的均勻磁場，水平面上有相距為 0.50 m 的平行軌條。質量為 0.10 kg 的 PQ 導線橫跨於兩軌條，與軌條之間的靜摩擦係數為 0.60。現在於 PQ 導線上通以電流，使 PQ 導線往左運動。試問



▲圖 8-31

- (1) PQ 導線上電流的方向為何？
- (2) 電流需要多大才能使 PQ 導線上開始運動？

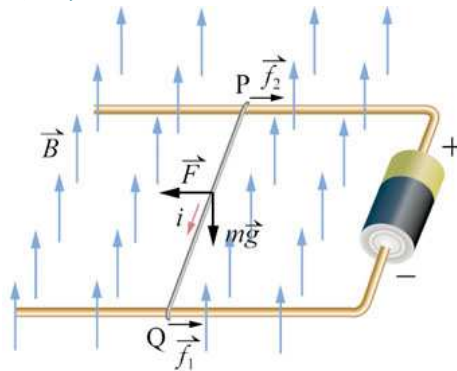
[解答] (1) 由題意知作用在導線的力需向左，磁場方向向上，根據 $\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B}$ 知，電流方向（即 $\vec{\ell}$ 的方向）為由 P 至 Q。

- (2) 參考圖 8-32，設通過導線的電流為 i ，PQ 導線受磁力為 $i\ell B$ ，方向向左。欲使 PQ 導線開始運動，磁力必須克服導線與軌條之間的最大靜摩擦力。最大靜摩擦力為圖中的 \vec{f}_1 和 \vec{f}_2 之和 ($f_1 = f_2$)，其量值為 $\mu_s mg$ (μ_s 為靜摩擦係數)，故

$$i\ell B \geq \mu_s mg$$

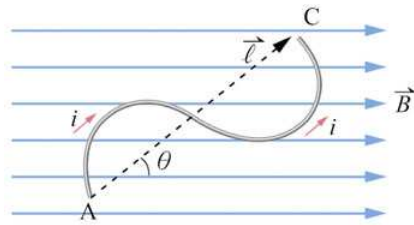
$$\text{電流為 } i \geq \frac{\mu_s mg}{\ell B} = \frac{(0.60)(0.10 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{(0.50 \text{ m})(0.12 \text{ T})} = 9.8 \text{ A}$$

故電流最小值為 9.8 A。



▲圖 8-31

若均勻磁場中的導線不是直的，例如在圖 8-33 中，一任意形狀的載流導線（標示為實線）在均勻磁場 \vec{B} 中所受的磁力為 \vec{F} ，則 \vec{F} 等於導線頭尾相連的載流直線 l 所受的磁力，即 $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ （ \vec{l} 的方向標示於圖中），其量值等於 $F = ilB \sin \theta$ ，式中 θ 為 \vec{l} 與磁場方向之間的夾角。

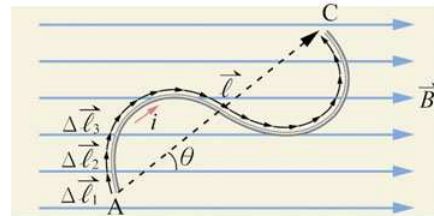


▲圖 8-33 一任意形狀的載流導線（A 到 C 的曲線）在均勻磁場中所受的磁力，等於其頭尾兩端相連的載流直線所受的磁力。

若導線為一封閉線圈，則 $\vec{l} = 0$ ，故 $\vec{F} = 0$ 。因此任一封閉線圈在均勻磁場中所受的磁力均為零。

科學短文 任意形狀的載流導線在均勻磁場中受力的計算

載流直導線在均勻磁場中受力為 $\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$ ，導線如果不是直的，受力要怎樣計算呢？如圖 8-34 所示，在均勻磁場 \vec{B} 中，一彎曲導線 AC 載有電流 i 。將導線 AC 分成許多小段 $\Delta \vec{l}_1$ 、 $\Delta \vec{l}_2$ 、 $\Delta \vec{l}_3$ 等等，各小段的方向為電流流經該小段的方向。每一小段均可視為長度甚小的直導線，所受的磁力為



▲圖 8-34 將 AC 導線分成許多小段，各小段受力的總和為整個導線所受的力。

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F}_1 &= i\Delta \vec{l}_1 \times \vec{B} \\ \Delta \vec{F}_2 &= i\Delta \vec{l}_2 \times \vec{B} \\ \Delta \vec{F}_3 &= i\Delta \vec{l}_3 \times \vec{B} \text{ 等等。} \end{aligned}$$

整個導線受力 \vec{F} 為各小段受力和，即

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \Delta \vec{F}_1 + \Delta \vec{F}_2 + \Delta \vec{F}_3 + \dots \\ &= i (\Delta \vec{l}_1 + \Delta \vec{l}_2 + \Delta \vec{l}_3 + \dots) \times \vec{B} \end{aligned}$$

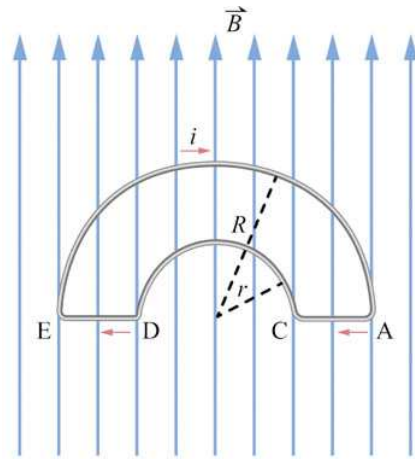
上式中括號內為各小段的向量和，等於 \vec{AC} 。若 \vec{AC} 以 \vec{l} 表示，則整個導線所受的磁力為

$$\vec{F} = i\vec{l} \times \vec{B}$$

此式的意義為：一任意形狀的載流導線在均勻磁場 \vec{B} 中所受的磁力 \vec{F} 等於其頭尾相連的載流直線 l 所受的磁力。

範例 8-9

圖 8-35 中有量值為 0.20 T 均勻磁場，方向向上。兩半圓和兩直線段組成一封閉線圈，圈面和磁場平行。兩半圓的半徑分別為 $R=0.80\text{ m}$ 和 $r=0.40\text{ m}$ 。線圈通以 10 A 的電流，方向如圖中所示。求



▲圖 8-35

- (1) AC 段導線所受的磁力。
- (2) C 至 D 半圓導線所受的磁力。
- (3) DE 段導線所受的磁力。
- (4) E 至 A 半圓導線所受的磁力。
- (5) 整個線圈所受的磁力。

[解答] (1) AC 段導線所受的磁力量值為

$$(10\text{ A})(0.40\text{ m})(0.20\text{ T}) = 0.80\text{ N}, \text{ 方向為垂直入紙面。}$$

(2) C 至 D 半圓導線所受的磁力量值為

$$(10\text{ A})(0.80\text{ m})(0.20\text{ T}) = 1.6\text{ N}, \text{ 方向為垂直入紙面。}$$

(3) DE 段導線所受的磁力量值為

$$(10\text{ A})(0.40\text{ m})(0.20\text{ T}) = 0.80\text{ N}, \text{ 方向為垂直入紙面。}$$

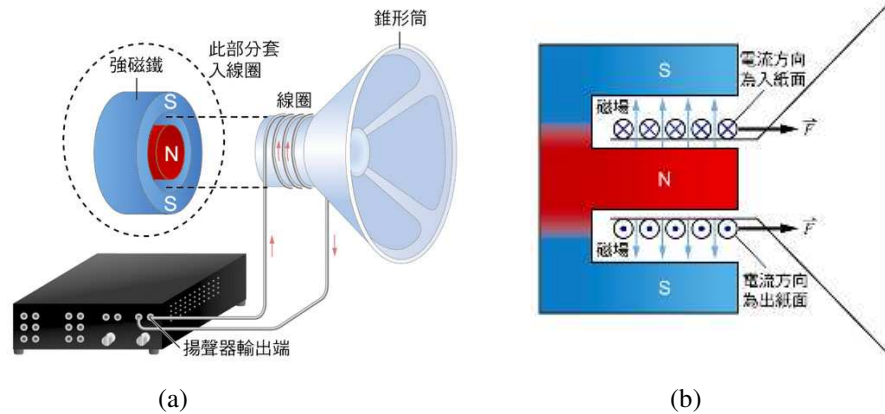
(與 AC 段導線相同)

(4) E 至 A 半圓導線所受的磁力量值為

$$(10\text{ A})(1.6\text{ m})(0.20\text{ T}) = 3.2\text{ N}, \text{ 方向為垂直出紙面。}$$

(5) 整個線圈所受的磁力為以上四者之向量和，由於入紙面方向和出紙面方向的磁力量值相等，故合力為零。

動圈式揚聲器是載流導線在磁場中受力的一種應用。如圖 8-36 所示，揚聲器有一個可沿軸向振動的短線圈，套在一個圓柱形的強磁鐵上，中心軸是 N 極，外圍環形部分是 S 極，因此磁場的形狀沿徑向往外輻射，和線圈導線垂直。當變化的電流輸入線圈時，線圈受磁力的作用而前後振動，帶動連接的圓錐形筒，使筒周圍的空氣隨之振動，因此產生聲音。

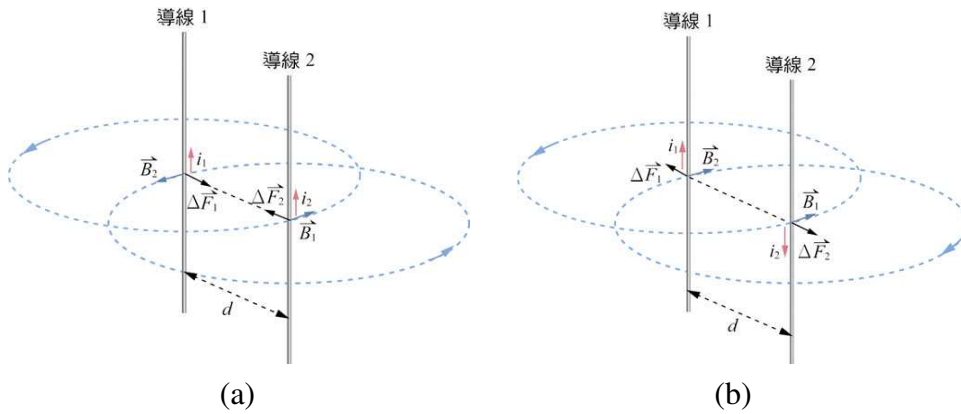


▲圖 8-36 動圈式揚聲器：(a)具有短線圈的錐形筒套入強磁鐵中，如示意圖(b)；(b)圖中⊗和⊙分別表示某瞬間電流的方向為入紙面和出紙面，此瞬間線圈受磁力向右。

2.兩平行載流長直導線之間的作用力

圖 8-37 中，一載流導線 1 會在附近範圍產生磁場，在此磁場中若有另一載流導線 2，則導線 2 會受到磁力。反過來，導線 2 也產生磁場，導線 1 在此磁場中同樣受到磁力。可見兩載流導線之間有交互作用存在。設圖中兩平行載流長直導線相距為 d ，導線 1 和導線 2 上的電流分別為 i_1 和 i_2 ，(a)圖為兩電流方向相同；(b)圖為兩電流方向相反。(a)圖中導線 1 的電流 i_1 在導線 2 處產生磁場為 \vec{B}_1 ，根據 (8-6) 式，其量值為

$$B_1 = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}$$



▲圖 8-37 兩載流長直導線之間有作用力存在。(a)電流方向相同時為引力；(b)電流方向相反時為斥力。

方向標示於圖中。導線 2 上長度為 ΔL_2 的一段（圖中未標出）在磁場中受導線 1 的磁力為 $\Delta \vec{F}_2$ ，由 (8-8) 式，其量值為

$$\Delta F_2 = i_2 \Delta L_2 B_1 \sin 90^\circ = \frac{\mu_0 i_1 i_2 \Delta L_2}{2 \pi d}$$

方向為指向導線 1。故導線 2 上單位長度受到導線 1 的磁力量值為

$$\frac{\Delta F_2}{\Delta L_2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2 \pi d}$$

同樣的方法來分析電流 i_1 受到電流 i_2 所產生磁場的作用力，可知導線 1 上長度為 ΔL_1 的一段所受導線 2 的磁力 $\Delta \vec{F}_1$ 的量值為

$$\Delta F_1 = \frac{\mu_0 i_1 i_2 \Delta L_1}{2 \pi d}$$

方向為指向導線 2。導線 1 上單位長度受到導線 2 的磁力量值為

$$\frac{\Delta F_1}{\Delta L_1} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2 \pi d}$$

可見此兩導線電流方向相同時，其間有互相吸引的作用力，而導線上單位長度的作用力相等，即

$$\frac{\Delta F_1}{\Delta L_1} = \frac{\Delta F_2}{\Delta L_2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2 \pi d}$$

8-10 式

若兩導線上的電流方向相反，如圖 8-37(b)所示，則同理可推得兩導線之間的作用力為斥力，導線上單位長度的作用力亦如 (8-10) 式。

我們可以利用 (8-10) 式來了解 SI 制定義電流的單位—安培為：在真空中，兩無限長直導線互相平行，相距 1 公尺，通以相等的電流，若導線上彼此之間每公尺的作用力為 2×10^{-7} 牛頓，則導線上的電流定義為 1 安培。安培是國際單位制中七個基本單位之一。



想一想

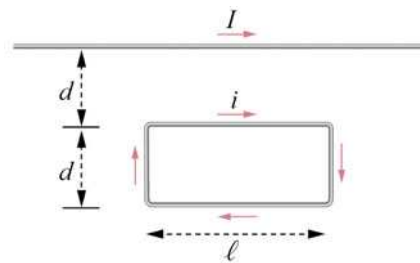
圖 8-38 中有三條等間隔的長直導線 a, b 和 c, 分別通以 1 A, 2 A 和 4 A 的電流, 電流方向已標示於圖中。三導線所受的磁力方向分別為何?



▲圖 8-38

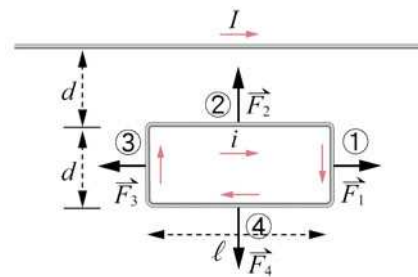
範例 8-10

圖 8-39 中有一無限長直導線，載有 $I=30\text{ A}$ 的電流，另有一矩形線圈，通有 $i=20\text{ A}$ 的電流，電流的方向已標示於圖中。已知圖中的 $d=4.0\text{ cm}$ ， $\ell=8.0\text{ cm}$ 。求此線圈與圖中長直導線之間的作用力。



▲圖 8-39

[解答] 將圖 8-40 線圈分成四部分，先決定各段所受磁力的方向。因為長直導線在線圈位置所產生的磁場方向均勻垂直入紙面，由 (8-9) 式 (即 $\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B}$)，可知各段所受磁力的方向如圖所示。由對稱性可知圖中的第 1 段和第 3 段所



▲圖 8-40

受的磁力量值相等，方向相反，故可相銷。而第 2 段和第 4 段雖然方向相反，但是量值不等，第 2 段較靠近長直導線，所受的磁力較大。長直導線在第 2 段位置產生的磁場量值為 $\frac{\mu_0 I}{2\pi d}$ ，故第 2 段受的磁力量值為 $F_2 = i\ell \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$ （方向向上）。長直導線在第 4 段位置產生的磁場量值為 $\frac{\mu_0 I}{2\pi(2d)}$ ，故第 4 段受的磁力量值為

$$F_4 = i\ell \frac{\mu_0 I}{2\pi(2d)} \quad (\text{方向向下})。$$

$$\begin{aligned} \text{故整個線圈所受磁力為 } & i\ell \frac{\mu_0 I}{2\pi d} - i\ell \frac{\mu_0 I}{2\pi(2d)} = \frac{\mu_0 i\ell I}{4\pi d} \\ & = (10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}) \frac{(20 \text{ A})(30 \text{ A})(0.080 \text{ m})}{(0.040 \text{ m})} \\ & = 1.2 \times 10^{-4} \text{ N, 方向向上。} \end{aligned}$$

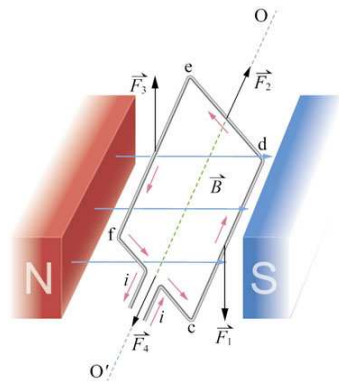


想一想

在範例 8-10 中，封閉線圈所受的磁力不為零，此一結果是否與課文第 56 頁的討論，封閉線圈所受磁力為零相抵觸？

3. 電動機的原理

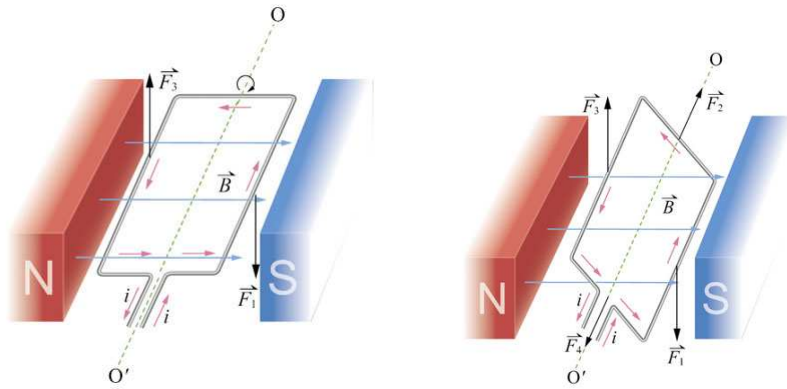
一載流封閉線圈在均勻磁場中所受的總磁力雖然為零，但其合力矩卻未必等於零，因此會造成線圈的轉動。如圖 8-41 所示，一載流線圈在均勻磁場中，其中 cd、de、ef、和 fc 各段所受磁力分別為 \vec{F}_1 、 \vec{F}_2 、 \vec{F}_3 和 \vec{F}_4 ，因為 \vec{F}_1 和 \vec{F}_3 ， \vec{F}_2 和 \vec{F}_4 分別量值相等，方向相反；故線圈所受的總磁力為零。而 \vec{F}_2 和 \vec{F}_4 兩力的作用線均在線圈的中心軸 OO' 上，對線圈不造成力矩，但是 \vec{F}_1 和 \vec{F}_3 不作用在同一直線上，對線圈造成力矩，會使得線圈繞 OO' 軸轉動。



▲圖 8-41 載流線圈在均勻磁場中受總磁力為零，但是合力矩不為零。

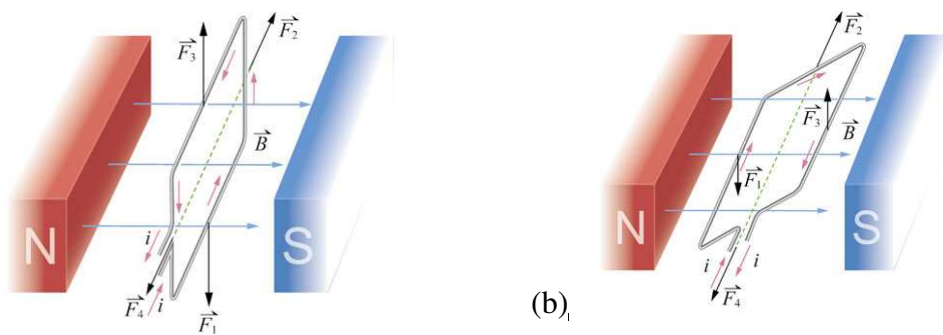
載流封閉線圈在磁場中受力矩作用的現象，可以應用在電動機（俗稱馬達）上。電動機是將電能轉為力學能的裝置，其原理大致如下。

圖 8-42(a)中，線圈固定於磁場中，但可以繞中心軸轉動。圖中圈面與磁場平行，與圖 8-41 類似， \vec{F}_1 和 \vec{F}_3 對線圈造成力矩，會使得線圈繞 OO' 軸以圖中所示的方向轉動。當線圈轉成圖 8-42(b)的位置時 \vec{F}_1 和 \vec{F}_3 兩力的量值和方向雖然與(a)圖相同，但是兩力間的距離減小，使得和形成的力矩也減小，不過力矩的方向仍然相同。



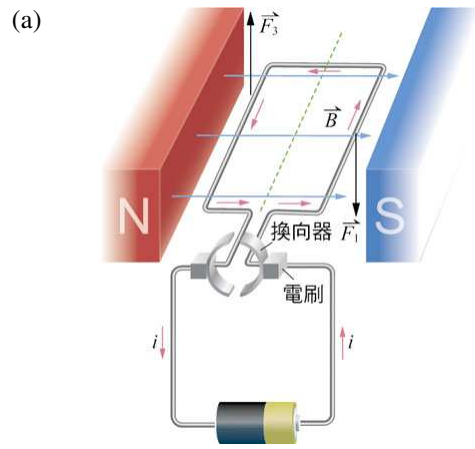
▲圖 8-42 (a) \vec{F}_1 和 \vec{F}_3 形成一對力偶，對線圈造成力矩，使線圈轉動；(b)線圈轉成圖中的位置時，力矩減小，但是方向相同。

當圈面轉成與磁場垂直的瞬間，如圖 8-43(a)所示，線圈所受力矩為零，但線圈因有慣性而不立即停止，仍繼續轉動。當線圈成為圖 8-43(b)所示的位置時，如果電流的方向不變，則線圈會受到反方向的力矩，致使線圈不能維持同一方向轉動。

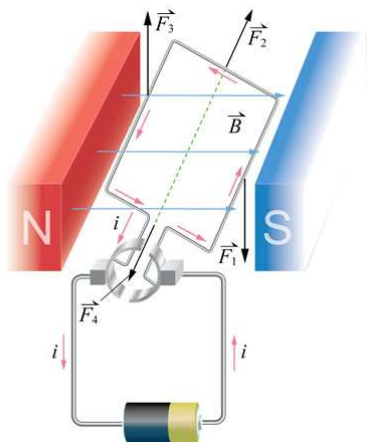


▲圖 8-43 (a)圈面與磁場垂直的瞬間，線圈所受力矩為零；
(b)在此位置時，若電流的方向不變，線圈會有反方向的力矩。

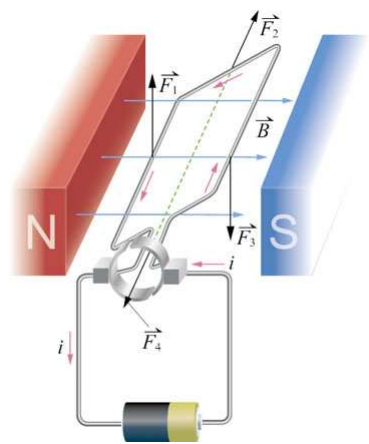
為使線圈能以同一方向轉動，在線圈電流的輸入和輸出兩端需有特殊設計。在直流電動機中，線圈的兩端各連接至一半圓形金屬片，這兩個半圓形金屬片不相接觸，稱為換向器。兩固定的電刷與換向器的兩半圓保持接觸，兩電刷的另一端分別接至直流電源的兩端，如圖 8-44 所示，(a)、(b)和(c)三圖中線圈所受的力矩方向都相同，維持同一方向轉動。



(b)



(c)

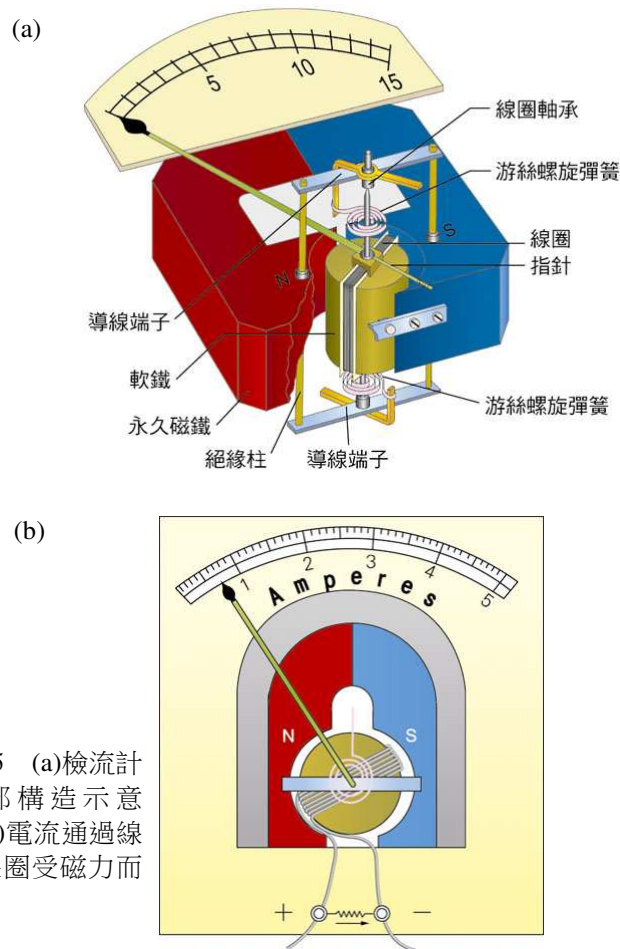


▲圖 8-44 由於線圈電流的輸入和輸出兩端連接換向器，並與電刷保持接觸，使得線圈所受的力矩皆在相同的方向。注意(a)、(b)和(c)三圖中電流的方向。

4.檢流計

在上一章中，我們曾提過安培計與伏特計，它們的核心元件為檢流計。檢流計是利用封閉線圈在磁場中受力矩作用的特性所製成之測量電流的儀表，其結構如圖 8-45 所示，原理如下。

檢流計的線圈置於永久磁鐵的固定磁場中，線圈上附有游絲彈簧。當線圈通電流時，會受磁力作用，使線圈轉動，但磁力所造成的力矩被游絲彈簧因變形產生的回復力矩所平衡，所以不會像馬達一般持續轉動下去。於是力矩的量值可以由游絲彈簧的形變量反映出來。因此測量連接在線圈上的指針偏轉角度，便可以得知線圈所受力矩的量值，因而測得通過線圈的電流數值。



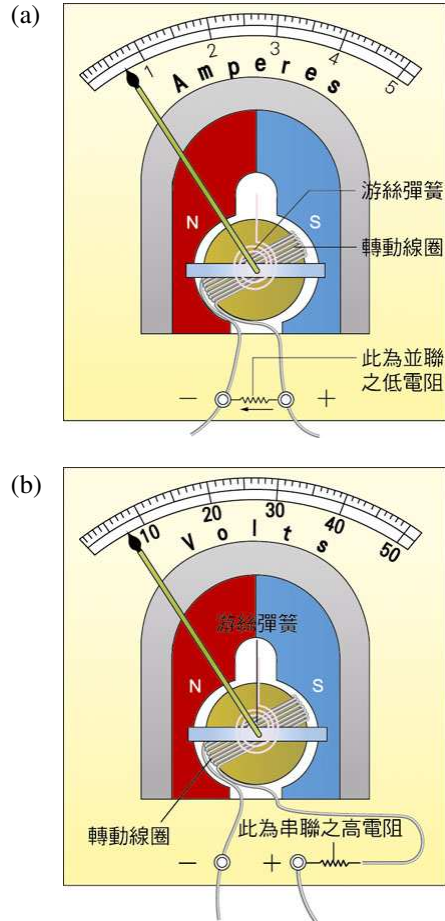
►圖 8-45 (a)檢流計的內部構造示意圖；(b)電流通過線圈，線圈受磁力而偏轉。



安培計與伏特計

通常線圈能承受的電流都很小，直接用來測量電流顯有不足。安培計為檢流計與一低電阻並聯而成，如圖 8-46(a)所示。大部分的電流通過低電阻的分路，因此可測得電路上較大的電流。另一方面，因為安培計內部有低電阻的分路，使得安培計的整體等效電阻甚小，使用時對電路電流的影響不大。

又因線圈能承受的電流很小，其兩端的最大電位差也很小。若將檢流計與一高電阻串聯，則成為伏特計，其兩端可以有較大的電位差，以利測量電路上的電壓，如圖 8-46(b)所示。另一方面，因為伏特計內部的電阻很大，與待測電路並聯測量其電壓時，通過伏特計的電流甚小，對電路的影響不大。



◀圖 8-46 (a)安培計為檢流計並聯一低電阻而成；(b)伏特計為檢流計串聯一高電阻而成。

.....

■ 電動機線圈所受的力矩

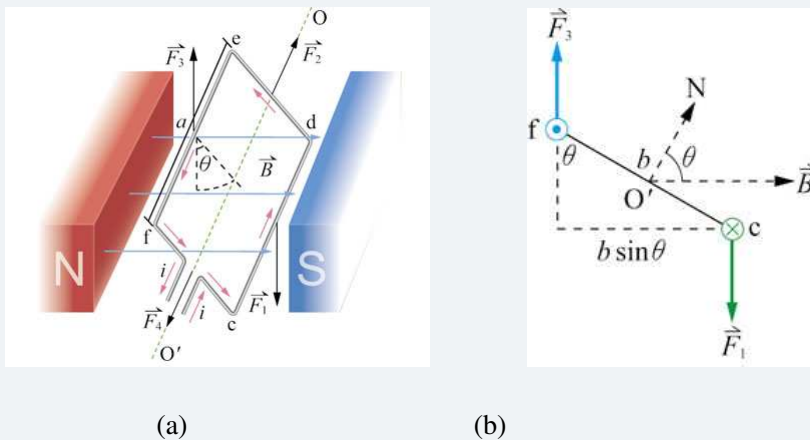
課文中曾敘述一載流封閉線圈在均勻磁場中所受的總磁力雖然為零，但其合力矩卻未必等於零，因此會造成線圈的轉動。線圈轉動的力矩要如何計算呢？在圖 8-47(a) 中，設向右的磁場為 \vec{B} ，線圈的長和寬分別為 a 和 b ，通過的電流為 i 。在圖中所示的瞬間，線圈受到磁力 \vec{F}_1 和 \vec{F}_3 的作用造成力矩 τ 。 \vec{F}_1 和 \vec{F}_3 的量值相等，皆為 iaB 。視線若為從(a)圖中的 O' 至 O 的方向，則眼睛看到情形如(b)圖所示，可以見到線圈的 cf 段，而圈面則垂直於圖中紙面。通常圈面的方向定義為與圈面垂直的方向，即圖中 $O'N$ 方向。設 θ 為 $O'N$ 方向與磁場 B 方向的夾角，則 \vec{F}_1 和 \vec{F}_3 造成的力矩 τ 等於 iaB 與 $b \sin\theta$ 的乘積，即

$$\tau = (iaB)(b \sin\theta) = iAB \sin\theta$$

上式中的 A (即 $A=ab$) 為線圈的面積。如果線圈繞有 N 匝，則力矩成為 N 倍，故

$$\tau = iNAB \sin\theta$$

上式力矩的計算雖然是以矩形線圈導出，實際上其他形狀的線圈也可適用，式中的 A 為線圈的面積。



▲圖 8-47 (a)載流線圈在磁場中受力矩作用而轉動；(b)視線為從 O' 至 O ，眼睛看到線圈的 cf 段，圈面則垂直圖中紙面。圈面的方向定義為與圈面垂直，即圖中 $O'N$ 方向。

8-4 帶電質點在磁場中的運動

1. 帶電質點在磁場中所受的力

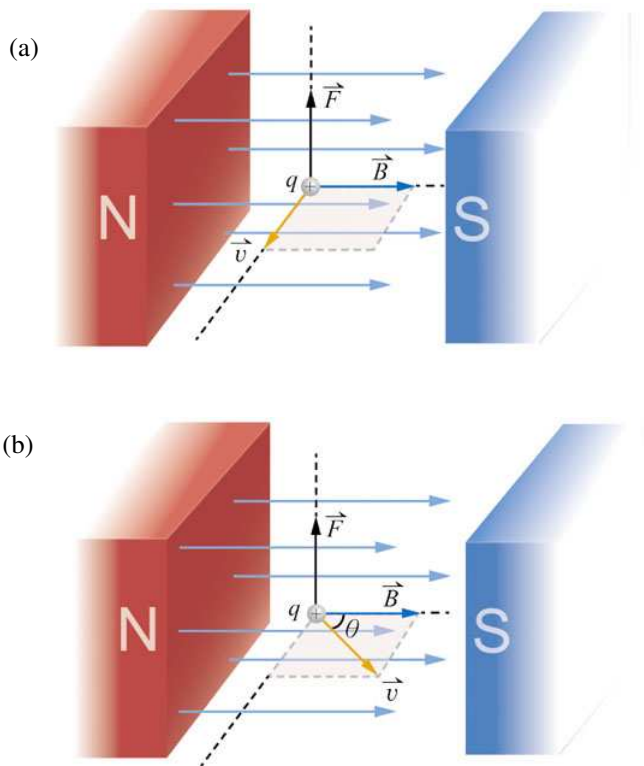
由前一節可知載流導線在磁場中會受磁力的作用，而電流乃是電荷集體移動形成，因此我們會想到載流導線之所以受力，會不會是由於導線內的電荷在磁場中運動受磁力的作用所致？

荷蘭人勞倫茲（Hendrik Antoon Lorentz, 1853-1928）在電子尚未發現之前的 1892 年曾提出理論。他指出電荷為 q 而速度為 \vec{v} 的帶電質點，在磁場中所受的磁力 F 量值為

$$F = qvB \sin \theta$$

8-11 式

式中 θ 為電荷速度與磁場方向之間的夾角，如圖 8-48 所示，這個理論後來經過實驗的證實。



◀圖 8-48 帶電質點在磁場中運動時受力的情形。
(a)速度與磁場垂直時，受力量值為 qvB ；(b)速度與磁場夾角為 θ 時，受力量值為 $qvB \sin \theta$ 。

圖 8-49 中，帶電質點速度 \vec{v} 與磁場兩方向的夾角為 θ ，可將速度 \vec{v} 分解為平行磁場與垂直於磁場兩分量，即 v_{\parallel} 與 v_{\perp} ，其中 $v_{\parallel} = v \cos \theta$ 及 $v_{\perp} = v \sin \theta$ 。由

$$F = qvB \sin \theta = q (v \sin \theta) B$$

$$= qv_{\perp}B$$

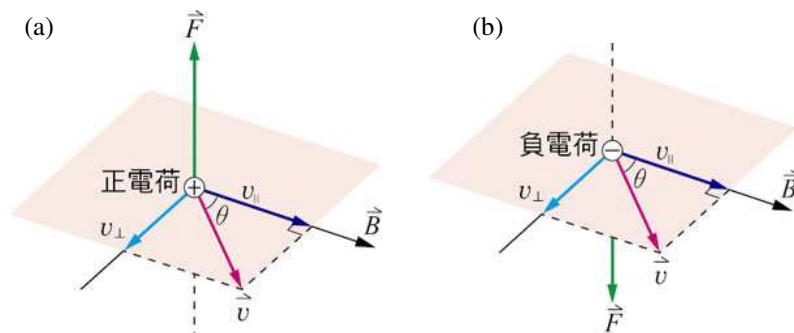
可以看出，造成對帶電質點之磁力正比於帶電質點的速度在垂直於磁場方向的分量 v_{\perp} ，而平行於磁場的速度分量 v_{\parallel} 並不產生磁力。

(8-11) 式中電荷所受的磁力 \vec{F} 的方向同時垂直於磁場 \vec{B} 和電荷的速度 \vec{v} 方向，此式可改寫成如下的向量積的數學形式，用以表示電荷所受磁力的量值及方向


$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$


8-12 式

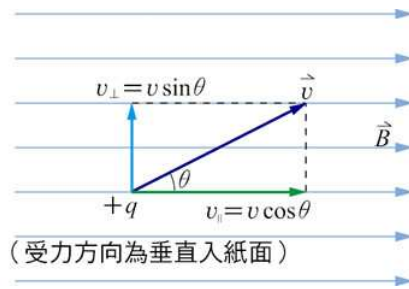
要注意的是電荷所受磁力的方向與電荷的正負有關，正電荷在磁場中運動時受磁力的方向即為 $\vec{v} \times \vec{B}$ 的方向；而負電荷受磁力的方向則與 $\vec{v} \times \vec{B}$ 的方向相反，如圖 8-50 所示。



▲圖 8-50 電荷所受磁力的方向與電荷的正負有關。(a)正電荷所受的磁力為 $\vec{v} \times \vec{B}$ 的方向；(b)負電荷所受的磁力與 $\vec{v} \times \vec{B}$ 的方向相反。

(8-12) 式的磁力有時稱為勞侖茲力 (Lorentz force) ，式中電荷的單位為庫侖，速度的單位為公尺/秒，磁場的單位為特斯拉，而力的單位則為牛頓。

 帶電質點在電磁場所受的力 $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} + q \vec{E}$ 亦稱為勞侖茲力。



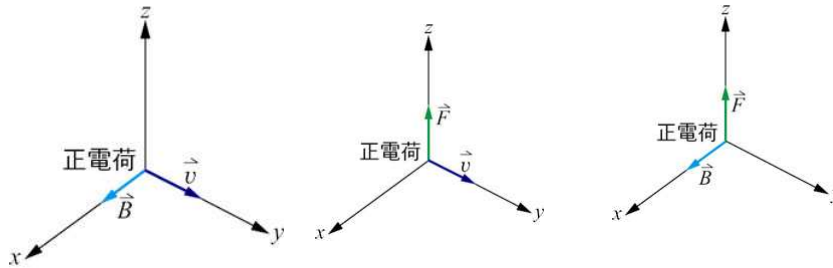
▲圖 8-49 帶電質點的速度在垂直於磁場方向的分量 v_{\perp} 造成磁力。



想一想

圖 8-51(a)、(b)和(c)中各有直角坐標系，空間中有均勻磁場，一正電荷從原點起運動。

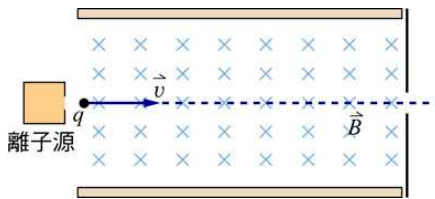
- (1) (a)圖已標示出磁場 \vec{B} 和質點初速 \vec{v} 的方向，請決定此時質點的受力方向。
- (2) (b)圖已標示出此時質點初速 \vec{v} 和受力 \vec{F} 的方向，請決定磁場所有可能的方向。
- (3) (c)圖已標示出磁場 \vec{B} 和此時質點受力 \vec{F} 的方向，請決定質點速度所有可能的方向。



▲圖 8-51

範例 8-11

如圖 8-52 所示兩平行金屬板間有均勻磁場 \vec{B} ，其量值為 $4.0 \times 10^{-2} \text{ T}$ ，方向為入紙面。帶正電的粒子從離子源射出後，自左端向右進入磁場。

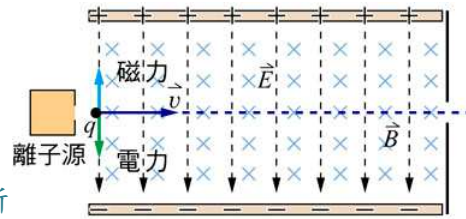


▲圖 8-52

- (1) 正離子剛進入磁場時，所受磁力的方向為何？
- (2) 若欲使正離子筆直通過此場，可在此範圍內加上電場，求此電場的方向。（忽略重力的影響。）
- (3) 若此範圍內加上的電場為 $1.2 \times 10^4 \text{ N/C}$ ，可以使正離子筆直通過，求正離子的速率。

[解答] (1) 由磁力 $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ 可知正離子所受的磁力方向向上。

(2) 因為正離子受磁力向上，故可施一電場使正離子受電力向下，使其所受合力需為零，而能筆直通過。正



▲圖 8-53

電荷受的電力與電場方向相同，所以施加電場的方向為向下，如圖 8-53 所示。

(3) 若正離子的電荷為 q ，所受電場的量值為 E ，正離子所受磁力的量值為 qvB ，電力需與磁力量值相等，即

$$qvB = qE$$

故
$$v = \frac{E}{B} = \frac{1.2 \times 10^4 \text{ N/C}}{4.0 \times 10^{-2} \text{ T}} = 3.0 \times 10^5 \text{ m/s}$$

由本題可知，如果需要某速度的帶電質點來進行實驗，則依據 $v = \frac{E}{B}$ ，只要適當調整所加的磁場和電場的比值，就可以得到所需速率的質點，相當於速率選擇器。

本題中帶電質點所受的電力和磁力的合力為零，即 $q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = 0$ ，

可見帶電質點的電量 q 被約分了，亦即 $v = \frac{E}{B}$ 也適用於帶負電荷的質點。

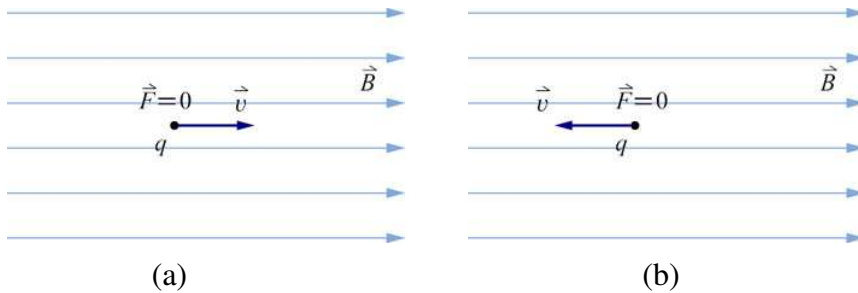
2. 帶電質點在均勻磁場中的運動

假設空間中僅有磁場，沒有電場，而且帶電質點的質量甚小，其所受的重力可以忽略。若帶電質點在磁場中靜止，質點並未受到磁力而保持靜止。若帶電質點在磁場中運動，則可能受到磁力作用。由於磁力的方向與質點的運動速度方向垂直，對質點不作功，不會改變質點的動能與速率。但是磁力對於質點的運動路徑有什麼影響呢？

空間中的磁場如果不是穩定的（穩定是指磁場不隨時間改變）或者不是均勻的（均勻是指各處的磁場皆相同），則運動的帶電質點所受的磁力較難處理，因此以下討論限於穩定且均勻磁場中的情況。

1. 帶電質點的速度方向與磁場平行

如圖 8-54 所示，(a)和(b)分別為帶電質點的速度方向與磁場相同或相反，兩方向的夾角為 0 或 180° ，由 (8-11) 式知，質點所受磁力為零，故平行於磁場方向維持等速運動。



▲圖 8-54 帶電質點的速度方向與磁場(a)相同，或(b)相反時，所受磁力為零，做等速運動。

2. 帶電質點的速度方向與磁場垂直

在均勻磁場 \vec{B} 中有質量為 m ，電荷為 q 的帶電質點以速度 \vec{v} 垂直於磁場運動，如圖 8-55 所示。由 (8-12) 式知質點所受磁力的方向與速度垂直，僅改變速度的方向。而磁力的量值為 $F = qvB$ ，維持不變。所以質點作等速圓周運動，磁力作為向心力，即

$$qvB = \frac{mv^2}{r}$$

上式中的 r 為圓周的半徑，其值為

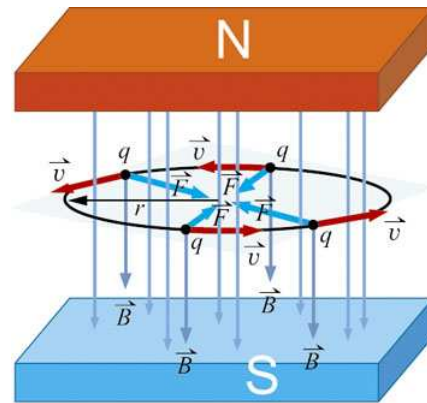
$$r = \frac{mv}{qB}$$

8-13 式

質點迴轉一周所需時間（即週期 T ）為

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

8-14 式



▲圖 8-55 帶電荷 q 的質點，其速度 \vec{v} 與磁場 \vec{B} 垂直時，所受的磁力 \vec{F} 作為向心力，使質點做半徑為 r 的等速圓周運動。

而質點每秒鐘迴轉的圈數稱為迴旋頻率（cyclotron frequency），以 f 表示，其值為

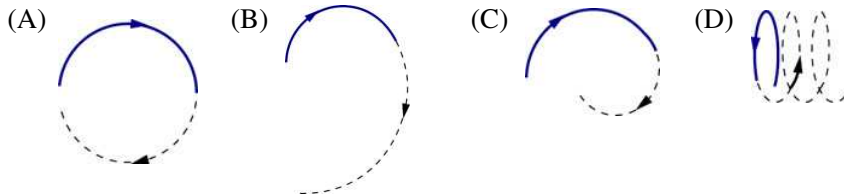
$$f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$$

質點迴旋之週期和頻率與電荷的質量、電量及磁場量值有關，但和電荷之速度無關。任何荷質比 q/m 相同的質點，在相同磁場中運動時，其迴旋週期與頻率均相同。



想一想

一帶電粒子在均勻磁場中作等速圓周運動，在某位置時突然與一不帶電的靜止粒子作完全非彈性碰撞（兩物體作完全非彈性碰撞後合為一體，碰撞前後瞬間總動量守恆。），下列四個圖，哪個是此粒子可能的運動路徑？（實線為碰撞前的路徑，虛線為碰撞後的路徑）



範例 8-12

一質子在與均勻磁場垂直的平面內作等速圓周運動，半徑 r 為 0.20 m。已知磁場的量值 B 為 0.30 T，質子的電量 q 為 1.6×10^{-19} C，質量 m 為 1.7×10^{-27} kg。求質子的動能。

[解答] 若設質子的質量為 m ，因質子在磁場中所受的磁力作為向心力，即

$$qvB = \frac{mv^2}{r} \text{ 得 } mv = qBr = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) (0.30 \text{ T}) (0.20 \text{ m})$$

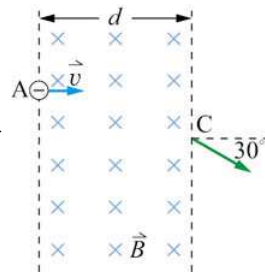
上式中的 mv 為質子的動量 p ，而動量與動能 K 的關係為

$$K = \frac{p^2}{2m} = \frac{(mv)^2}{2m}, \text{ 故得質子的動能為}$$

$$K = \frac{[(1.6 \times 10^{-19} \text{ C}) (0.30 \text{ T}) (0.20 \text{ m})]^2}{2 (1.7 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 2.7 \times 10^{-14} \text{ J}。$$

範例 8-13

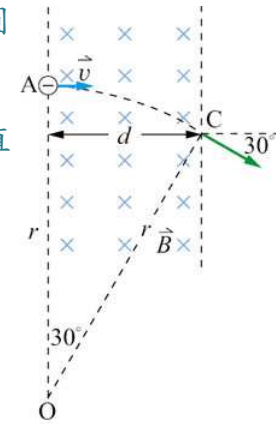
圖 8-56 中，兩虛線的間隔為 d ，其間有垂直入紙面的均勻磁場為 \vec{B} 。一帶有負電荷 $-q$ 的質點從左側的 A 點以速率 v 向右垂直入射此磁場，然後從右側的 C 點射出。射出時速度方向與原入射方向的夾角為 30° ，質點在磁場中運動路徑為一圓弧。求



▲圖 8-56

- (1) 圓弧路徑的半徑。
- (2) 質點的質量。
- (3) 質點從 A 至 C 所經過的時間。

[解答] (1) 參考圖 8-57，此帶電質點在均勻磁場中作等速圓周運動，A 至 C 的路徑為一圓弧。質點在 A 和 C 兩位置的速度方向為圓弧的切線方向，作垂直於此二位置的速度之直線，其交點 O 為圓心。



▲圖 8-57

由圖中的幾何關係可看出圓弧的半徑為

$$r = d / \sin 30^\circ = 2d。$$

- (2) 由 (8-13) 式 $r = \frac{mv}{qB}$ ，得質點的質量 m 為

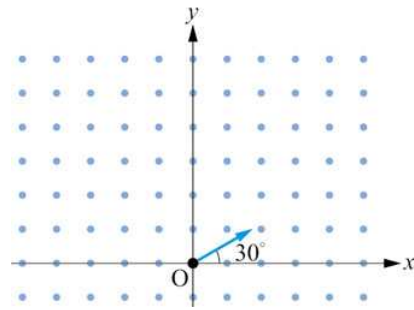
$$m = \frac{qBr}{v} = \frac{2qBd}{v}$$

- (3) 圓弧所對的圓心角為 30° ，為整個圓周的十二分之一，質點由 A 至 C 的時間 t 為圓運動週期 T 的十二分之一。

$$t = \frac{1}{12}T = \frac{1}{12} \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi \left(\frac{2qBd}{v} \right)}{qB} = \frac{\pi d}{3v}$$

範例 8-14

如圖 8-58 所示，在大區域的均勻磁場中，一質量為 m 、電量為 $-q$ 的電荷以量值為 v 、方向與 $+x$ 軸夾成 30° 角的速度，垂直於磁場自原點 O 射出，試問



▲圖 8-58

- (1) 經過多久時間此電荷首次通過 y 軸？
- (2) 此時其與原點之間的距離為何？

[解答] (1) 如圖 8-59 所示，電荷在磁場中作等

速圓周運動，其半徑 r 必與速度方

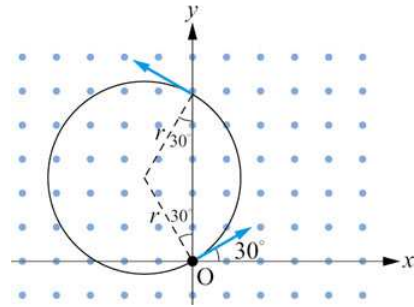
向垂直且 $r = \frac{mv}{qB}$ 為已知由此可定

出圓心位置。當其通過 y 軸時，相當於繞圓心轉過 120° ，

因此所需時間為 $t = \frac{T}{3} = \frac{2\pi m}{3qB}$ 。

(2) 此時與原點之距離為

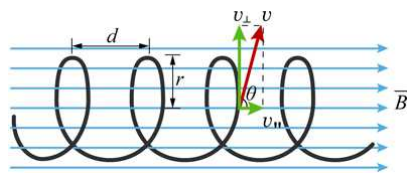
$$d = \sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}mv}{qB}。$$



▲圖 8-59

3. 帶電質點的速度方向與磁場不平行也不垂直

若帶電質點在均勻磁場中運動時，其速度的方向與磁場不平行也不垂直，如圖 8-60 所示。我們可將速度分解成平行磁場的分量 v_{\parallel} 和垂直磁場的分量 v_{\perp} 。依據本小節第 1 和 2 小標的討論可知， v_{\parallel} 的分量會使帶電質點沿磁場方向作等速率運動，而 v_{\perp} 的分量會使質點垂直磁場方向作等速圓周運動。



▲圖 8-60 速度 \vec{v} 分解成平行磁場的分量 v_{\parallel} 和垂直磁場的分量 v_{\perp} 。其中， v_{\parallel} 的分量會使帶電質點作等速率運動， v_{\perp} 的分量使質點作等速圓周運動。因此帶電質點同時作這兩種運動，使其路徑成為螺旋線。

因此帶電質點同時作這兩種運動，致使其路徑成為螺旋線 (helix)。

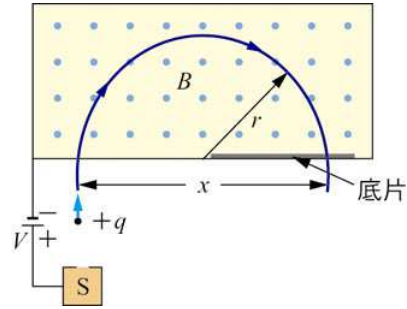
3.帶電質點在磁場中受力現象的應用

電荷在磁場中運動受力的現象有許多實際的應用，舉例如下：

1. 質譜儀

我們知道氧原子內有 8 個質子，但是穩定的氧原子內可能有 8 個、9 個或 10 個中子。像這樣質子數相同，而中子數不同的原子稱為同位素。質譜儀是利用帶電質點在磁場中受力的現象來測定同位素的質量或將它們分離的儀器。圖 8-61 所示為質譜儀原理的示意圖，圖中 S 為同位素正離子源，帶有正電荷 $+q$ 的離子自靜止起，經由電位差 V 加速後垂直進入一均勻磁場 \vec{B} ，圖中磁場的方向為出紙面。正離子在磁場中作圓周運動而投射在底片上的位置與強度，可以分析同位素的種類與含量。

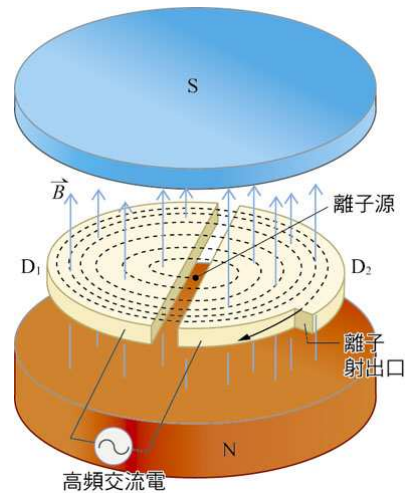
若離子的質量為 m ，由磁力作為向心力，得 $qvB = \frac{mv^2}{r}$ ，又離子的動能係由電位差加速 V 所得， $\frac{1}{2}mv^2 = qV$ ，將以上兩式消去 v ，可得離子的荷質比為 $\frac{q}{m} = \frac{2V}{B^2 r^2}$ 。若離子的電荷已知，則可由測量之半徑 r 而求得其質量 $m = \frac{qB^2 r^2}{2V}$ 。



▲圖 8-61 質譜儀原理示意圖 - 由電荷在磁場中運動而投射在底片的位置與強度可分析同位素之種類與含量。

2. 迴旋加速器

在研究原子核內部結構時，常常需要能量很高的粒子來撞擊各種原子核。迴旋加速器就是可以讓帶電粒子獲得很大能量的一種裝置。而其基本原理就是利用電場使帶電粒子加速，並利用磁場使其偏轉。圖 8-62 為其原理示意圖，圖中兩片 D 形盒（標示 D_1 和 D_2 ）置於向上的均勻磁場中，兩盒間有一道間隙分開。當電荷從中心處垂直於間隙射進盒內時，會在磁場中作圓周運



▲圖 8-62 迴旋加速器示意圖。

動，當通過間隙時，適時施加電位差，在間隙中有電場，可使電荷加速。由 $T = \frac{2\pi m}{qB}$ 知粒子迴旋的週期保持不變，每隔固定的半個週期，間隙兩側之電位高低關係便交換一次（電場方向改變一次），電荷復經此間隙時可再次加速。電荷的速率逐漸增加，由 $r = \frac{mv}{qB}$ 可知其迴旋半徑也隨之增大，當達到最大半徑時，便從 D 形盒射出，進入實驗區以進行各種碰撞實驗。

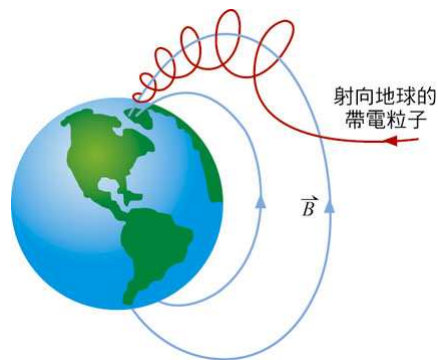


考慮相對論效應時的修正.....

依據本書附錄狹義相對論簡介可知：當粒子的速率非遠小於光速時，將呈現相對論效應，即粒子的質量會隨著速率的增加而變大，迴旋週期也會加大，並非保持固定。這將使得電場方向改變的週期與迴旋週期不再相同，造成無法確保粒子經過間隙時始終能獲得加速。改進的方法之一便是隨著粒子速率的增加，適當改變交流電源的頻率，使得電場方向的變化能與粒子迴旋的頻率保持同步。

3. 極光

當帶電的宇宙射線或來自太陽的帶電粒子（正電荷和負電荷粒子都有）朝地球射來時，會受到地球磁場的作用。雖然地磁不是均勻磁場，但是我們可以定性地瞭解。通常這些帶電粒子的速度有平行地球磁場之分量，會以螺旋線路徑向地球的南北兩極集中。但由於地球磁場並不均勻，因此其曲率半徑接近磁極時隨磁場增大而減小，如圖 8-63 所示。當這些大量高速帶電粒子與空氣中之氣體原子或分子碰撞時，使原子或分子游離。這些游離的原子或空氣分子（實際上是離子）再度與電子結合時，會發出光，形成極光，如圖 8-64 所示。地球磁場使這些



▲圖 8-63 帶電的粒子受地磁作用，其軌跡為半徑不等的螺旋線。



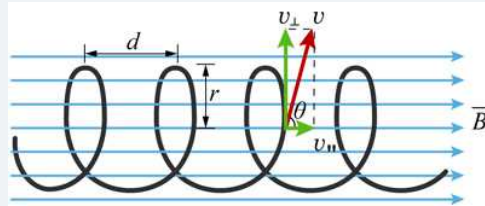
◀圖 8-64 向兩極移動的大量高速帶電粒子與空氣碰撞產生極光。

帶電粒子的路徑偏折，使人類免於這些粒子的傷害。



帶電質點的速度方向與磁場夾角為 θ

若帶電質點在均勻磁場中的速度 \vec{v} 的方向與磁場 \vec{B} 的夾角為 θ ，則可將速度分解成平行於磁場和垂直於磁場方向的兩個分量，即 v_{\parallel} 和 v_{\perp} ，其中 $v_{\parallel} = v \cos \theta$ ，並不造成磁力；而 $v_{\perp} = v \sin \theta$ ，此分量產生磁力 \vec{F} 。磁力的量值為 $F = qvB \sin \theta$ ，方向與速度垂直，並不改變速度的量值。因此質點一方面在垂直於磁場的平面以速率 v_{\perp} (即 $v \sin \theta$) 作等速圓周運動，另一方面又以速率 v_{\parallel} (即 $v \cos \theta$) 平行於磁場作直線等速運動，其軌跡稱為螺旋線，如圖 8-65 所示。



▲圖 8-65 帶電質點的速度可分解成平行和垂直於磁場的兩分量 (即 v_{\parallel} 和 v_{\perp})，其 v_{\perp} 使質點作圓運動， v_{\parallel} 使質點沿磁場作直線運動，其合成效果使軌跡為螺旋線。

由磁力作向心力得

$$qvB \sin \theta = \frac{m (v \sin \theta)^2}{r}$$

運動軌跡螺旋線的半徑 r 為

$$r = \frac{mv \sin \theta}{qB}$$

繞行一圈的時間 (週期) T 為

$$T = \frac{2\pi r}{v \sin \theta} = \frac{2\pi m}{qB}$$

週期與 (8-14) 式相同。質點繞行一周時，平行於磁場前進的距離稱為螺距 d ，

$$d = v_{\parallel} T = (v \cos \theta) \frac{2\pi m}{qB} = \frac{2\pi m v \cos \theta}{qB}$$

8-1 電流的效應

1. 1820 年丹麥人厄斯特發現導線通過電流時，會在其周圍會產生磁場，稱為電流的磁效應。
2. 安培提出電流與所生磁場方向的關係：若以右手握住導線，拇指伸出所指為電流方向，則其他四指彎曲為磁場在導線四周的方向，稱為安培右手定則。
3. 磁場與電場類似，都是向量，其符號為 \vec{B} ，磁場可用磁力線來表示。磁力線的密集程度表示磁場的量值，而磁力線上某點的切線方向表示該位置磁場的方向，也就是磁針在此位置時 N 極所指的方向。
4. 一小段載流導線對空間中某一點所生的磁場可寫成向量積的數學形式

$$\Delta \vec{B} = \frac{i \Delta \vec{\ell} \div \hat{r}}{r^2}$$

，稱為必歐-沙伐定律。磁場的單位為特斯拉（T）， μ_0 為一常數，稱為真空的磁導率，其值為 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ 。

8-2 載流導線的磁場

5. 一圓形線圈半徑為 a ，通過的電流為 i ，圓心處的磁場量值為 $B = \frac{\mu_0 i}{2a}$ ，其方向可用以下方式決定：右手四指沿電流方向彎曲，此時拇指伸出的方向即是圓心處的磁場方向。
6. 半徑為 a 的單匝圓線圈，通過的電流為 i ，其中心軸上距圓心 x 處所生的磁場量值為 $B = \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + x^2)^{3/2}}$ ，右手四指沿圓線圈之電流方向彎曲，拇指伸出的方向為線圈中心軸上的磁場方向。
7. 一載有電流 i 的長直導線，在距離 r 處的磁場量值為 $B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$ ，其方向可由安培右手定則決定。
8. 載流螺線管內的磁場，一端為 N 極，另一端為 S 極，其磁場方向可利用安培右手定則決定之。若螺線管上線圈的匝數愈密集，且長度愈長，則管內的磁場愈均勻。
9. 一磁場中各位置的磁場量值和方向都相同者，稱為均勻磁場。

8-3 載流導線在磁場中所受的磁力

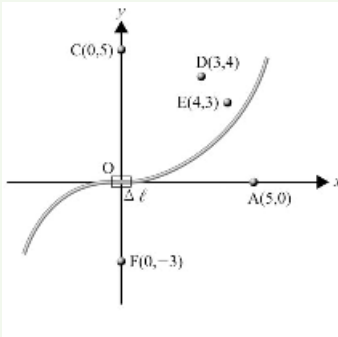
10. 長度為 l 、電流為 i 的一段載流直導線，在磁場 \vec{B} 中，其所受的力為 $\vec{F} = i \vec{l} \times \vec{B}$ 。若導線與磁場的夾角為 θ ，則磁力的量值為 $F = ilB \sin \theta$ 。
11. 長度一公尺、電流一安培的直導線，置於一均勻磁場中，並使之垂直於磁場方向。若所受的磁力為一牛頓，則此磁場之量值定義為一特斯拉。
12. 兩平行載流導線之間有作用力存在，若兩導線之電流方向相同，則作用力為引力；若兩導線之電流方向相反，則作用力為斥力。
13. 兩平行載流導線單位長度之間的作用力為 $\frac{\Delta F_1}{\Delta L_1} = \frac{\Delta F_2}{\Delta L_2} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi d}$ ，其中 i_1 和 i_2 為通過兩導線的電流， d 為兩導線之間的距離。
14. 真空中，兩無限長直導線互相平行，相距 1 公尺，通以相等的電流，若導線上彼此之間每公尺的作用力為 2×10^{-7} 牛頓，則導線上的電流定義為 1 安培。
15. 電動機的原理為利用載流線圈在磁場中受力造成力矩而轉動。
16. 檢流計是利用封閉線圈在磁場中受力矩而轉動，當此轉動對連接於線圈上的游絲彈簧造成反方向的力矩，這兩力矩平衡時，線圈偏轉的角度得以量出。
17. 將檢流計並聯一個低電阻，便成為測量電流的安培計。使用安培計時，須與待測電路串聯。
18. 將檢流計串聯一個高電阻，便成為測量電壓的伏特計。使用伏特計時，須與待測電路並聯。

8-4 帶電質點在磁場中的運動

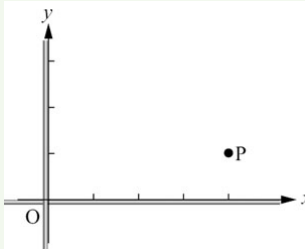
19. 速度為 \vec{v} 的電荷 q ，在磁場 \vec{B} 中所受的磁力為 $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$ ，有時稱為勞侖茲力。
20. 一電荷 q 、質量 m 、速度為 \vec{v} 的質點，在垂直於一均勻磁場 \vec{B} 的平面上運動時，受磁力的作用而作等速圓周運動，磁力即為所需的向心力，其半徑 $r = \frac{mv}{qB}$ ，週期 $T = \frac{2\pi d}{qB}$ ，迴旋頻率 $f = \frac{qB}{2\pi d}$ 。
21. 帶電質點在均勻磁場中運動時，若其速度方向與磁場不平行也不垂直，則其路徑為螺旋線。
22. 質譜儀和迴旋加速器的原理都是利用帶電粒子在磁場中受力而製成的儀器，前者可用來分析元素的同位素，而後者用來加速帶電粒子來進行各種碰撞實驗。

一、問答題

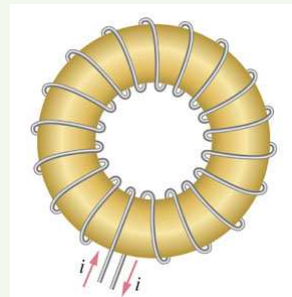
- 圖 8-66 所示的平面坐標中，有一載流導線經過原點 O 處時，有一小段直導線 Δl 與 x 軸平行。 xy 平面上有五個點，其坐標分別為 $A(5,0)$ ， $C(0,5)$ ， $D(3,4)$ ， $E(4,3)$ 和 $F(0,-3)$ 。請依大小順序寫出 Δl 段在這五個點產生的磁場貢獻。
- 如圖 8-67 所示， x 及 y 軸上各有一根絕緣的長直導線，載有大小相同的穩定電流，方向分別指向 $+x$ 及 $+y$ 軸。則在 $x-y$ 平面上 P 點的磁場方向為何？
- 一空心圓環的外面以導線纏繞著，並將導線通以電流，如圖 8-68 所示。環內磁場的方向為何？



▲圖 8-66

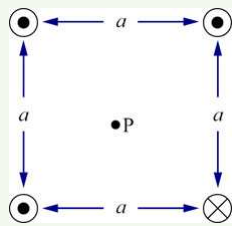


▲圖 8-67

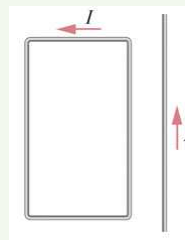


▲圖 8-68

- 圖 8-69 為四條相互平行並與紙面垂直的長直導線，導線恰通過邊長為 a 的正方形頂點。每條導線的電流大小相等，方向如圖所示，則在正方形之中心點 P 的磁場方向為何？
- 如圖 8-70 所示，在一長直導線旁置一矩形導線，兩者均通以電流 I ，則整個矩形線圈受到長直導線的磁力方向為何？

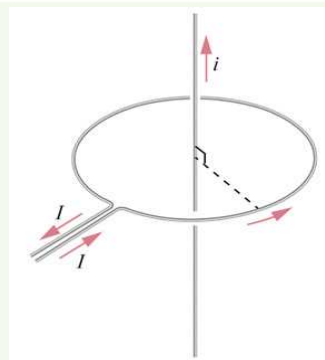


▲圖 8-69



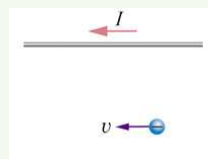
▲圖 8-70

6. 如圖 8-71 所示，一圓形線圈置載有電流 I ，線圈中心有一垂直於圈面的長直導線，載有電流 i ，兩電流的方向標示於圖中。直導線和線圈之間作用力的方向為何？
7. 將磁場單位特斯拉的因次以國際單位制中的七個基本物理量的因次來表示。（設電流以符號 I 表示）。
8. 一帶電質點在均勻磁場中運動，其速度方向與磁場方向不平行。此質點運動時其動量、動能及所受的磁力，三者何者保持不變？



▲圖 8-71

9. 一帶電粒子射入均勻磁場中，若此帶電粒子在磁場中沿 $+x$ 軸方向作直線運動，則此磁場與 $+x$ 軸之間的夾角為多少度？
10. 帶電質點分別在均勻重力場、電場、或磁場中的運動時，其可能的軌跡各為何？
11. 如圖 8-72 所示，水平載流導線正下方，有一電子自某點向左方向射出，其初速度 v 與導線電流 I 同向，則電子一開始會往哪個方向彎曲運動？（忽略重力）

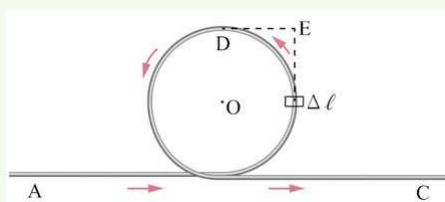


▲圖 8-72

二、計算題

8-1 電流的磁效應

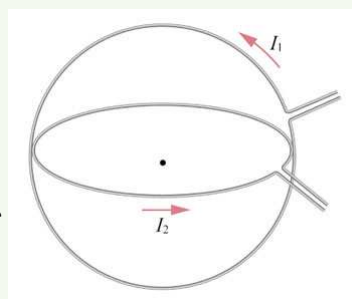
12. 如圖 8-73 所示為一導線 ADC，中間部分彎成圓形，D 為圓的最高點，電流經圖中的 $\Delta \ell$ 小段時方向向上。若 $\Delta \ell$ 小段在圓心 O 點產生的磁場量值為 ΔB ，則 $\Delta \ell$ 小段在 D 點及圖中 E 點產生的磁場量值為何？（答案以 ΔB 的倍數表示）



▲圖 8-73

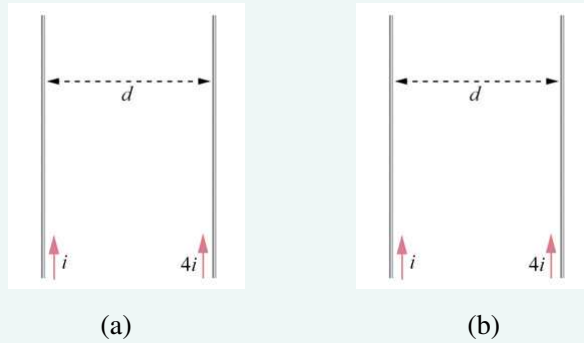
8-2 載流導線的磁場

13. 承 12. 題，若導線直的部分甚長，通過的電流為 i ，圓的半徑為 a ，求圓心 O 的磁場。
14. 半徑同為 6.28 cm 的兩圓形線圈，圈面互相垂直，且圓心重合，如圖 8-74 所示。各通以 $I_1=3.0$ A 及 $I_2=4.0$ A 的電流，電流方向標示於圖中。求圓心處的磁場。



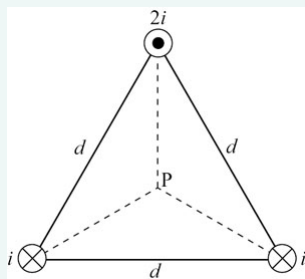
▲圖 8-74

15. 一長直導線沿南北方向水平放置，將一磁針置於導線上方，與導線的距離為 d 。將導線通以電流 i ，發現磁針偏轉 37° 。欲使其偏轉 53° ，若電流保持不變，則應將磁針向導線移近多少距離？若導線的位置保持不變，則需將電流改為多大？
16. 圖 8-75 所示為兩平行長直導線相距 d ，各通以電流 $4i$ 和 i ，若
- (1) 兩電流的方向相同如(a)圖；
 - (2) 兩電流的方向相反如(b)圖。
- 分別求兩導線所在平面上磁場為零的位置（不考慮無窮遠處）。

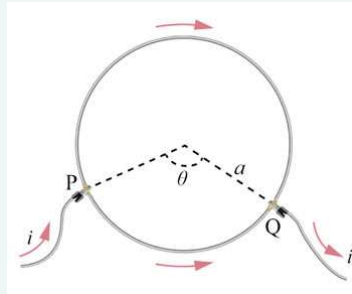


▲圖 8-75

- ✳ 17. 大部分的氫原子為一個質子和一個電子所組成。假設電子以 $2.19 \times 10^6 \text{ m/s}$ 的速率，環繞質子作半徑為 $5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ 的等速圓周運動。已知電子的電量為 $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ，求
- (1) 電子作圓周運動形成的電流。
 - (2) 此電流在圓心處造成的磁場。
- ✳ 18. 圖 8-76 中三條與紙面垂直的長直導線互相平行，兩兩相距 d ，分別通以電流 $2i$ ， i 和 i ，方向如圖中所示。求圖中正三角形的中心 P 點的磁場。
19. 如圖 8-77 所示，半徑為 a 的圓是有電阻的均勻導線。一電流 i 自 P 點流入，從 Q 點流出。圖中的圓心角 θ 為已知，求圓環上的電流在圓心處產生的磁場。

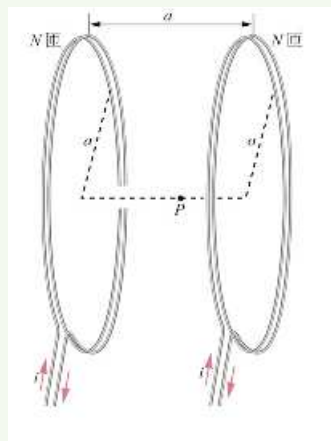


▲圖 8-76



▲圖 8-77

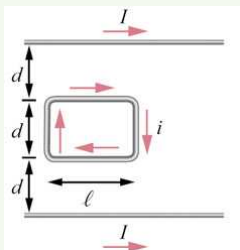
- ※20. 圖 8-78 所示為兩組線圈，各有 N 匝，半徑同為 a 。這兩組線圈同軸而立，距離也是 a 。通以方向相同的同大電流 i 。求兩線圈中點 P 的磁場。（此裝置稱為亥姆赫茲線圈， P 點附近的磁場甚為均勻，實驗中常作為均勻磁場的場源。）



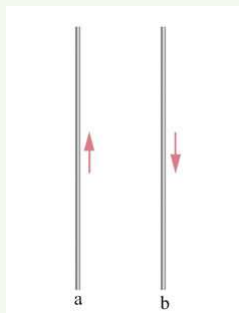
▲圖 8-78

8-3 載流導線在磁場中所受的磁力

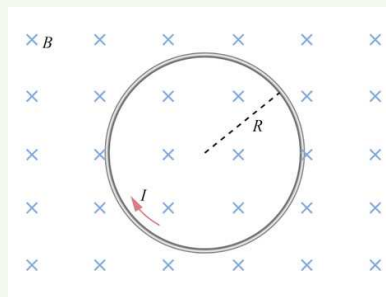
21. 兩平行直導線，各載有 10 A 的電流，二電流方向相反。若兩導線間每公尺有 1.0×10^{-4} N 的排斥力，則兩者間的距離應為何？
22. 將一導線通以 5.0 A 的電流，置於一均勻磁場 B 中，發現此導線每公分所受的磁力為 0.10 N，則此磁場量值的範圍為何？
23. 如圖 8-79 所示，兩長直導線的電流為 I ，方向向右。矩形迴路中順時針方向的電流為 i 。圖中的距離 d 和長度 l 均為已知，求矩形迴路所受的磁力。
- ※24. 圖 8-80 中有兩平行長直導線 a 和 b，通以大小相同方向相反的電流，此時 a 導線受的磁力量值為 F_1 。現在加上一均勻磁場，磁場的方向與紙面垂直，a 導線受的總磁力量值成為 F_2 。此時 b 導線受的總磁力量值為何？



▲圖 8-79



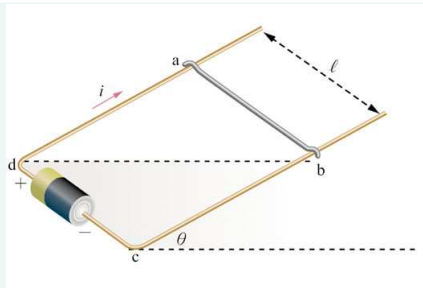
▲圖 8-80



▲圖 8-81

- ※25. 如圖 8-81 所示，一半徑為 R 的圓線圈置於均勻磁場 B 中，磁場方向垂直於該線圈圈面。當線圈上通順時針方向的電流 I 時，圓線圈內所受張力為何？

26. 如圖 8-82 所示， $abcd$ 為一斜面上的矩形電路， ab 段與 cd 段平行。斜面的傾斜角為 θ ，其上兩軌條的間距為 l 。 ab 段可以滑動，其質量為 m ，與軌條之間沒有摩擦。迴路的電流為 i 。現在於空間中施加一均勻磁場使 ab 段靜止平衡。



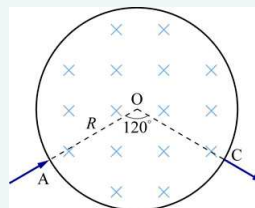
- (1) 若所加的磁場方向為鉛直向下，求此磁場之量值。 ▲圖 8-82
 (2) 若所加磁場的方向不同，則維持 ab 段靜止平衡所需磁場的量值也不同。所需磁場量值為最小時，磁場的方向為何？此最小磁場的量值為何？

8-4 帶電質點在磁場中的運動

27. 一電子垂直於磁場方向射入均勻磁場中，作圓周運動，其半徑為 R 。如果入射的動能增加為原來動能的 4 倍，以原來的方向進入磁場，其圓周運動的半徑為何？
 28. α 粒子的質量約為質子質量的 4 倍，所帶電量則為 2 倍。若 α 粒子與質子經同一電壓加速後，垂直進入同一均勻磁場中。求 α 粒子與質子作圓周運動時，下列各量的比（ α 粒子比質子）：

(1) 動能；(2) 動量量值；(3) 速率；(4) 所受磁力量值；(5) 向心加速度的量值；(6) 圓軌道的半徑；(7) 環繞週期。

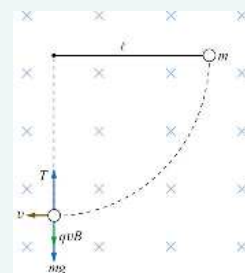
29. 圖 8-83 中半徑為 R 的圓形區域內，有垂直進入紙面的均勻磁場，一帶電質點（重力不計）從 A 點以速率 v 垂直磁場且通過圓心的方向進入磁場，然後從 C 點出磁場。求此質點



- (1) 在磁場中運動的時間。
 (2) 在磁場中運動的路徑長。

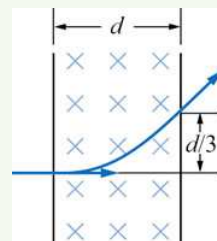
▲圖 8-83

30. 如圖 8-84 所示，長度為 l 的絕緣細線，一端固定起來，另一端懸一質量為 m ，帶有正電荷 q 的小球，形成單擺。空間中有水平方向的均勻磁場 \vec{B} ，將小球從水平位置靜止釋放，小球的擺動面與磁場垂直。當小球向左擺到最低位置時，求繩的張力。（重力加速度為 g ）



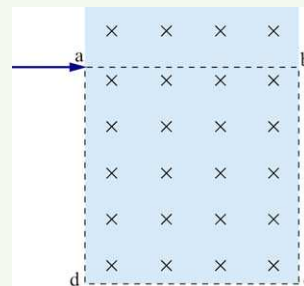
▲圖 8-84

31. 如圖 8-85 所示，一電荷 q 以速率 v 垂直射入寬度為 d 的均勻磁場中，射出磁場時偏向位移為 $d/3$ 。則
- (1) 此電荷在磁場中的曲率半徑為何？
 - (2) 電荷質量為何？
 - (3) 在磁場中經歷時間為何？



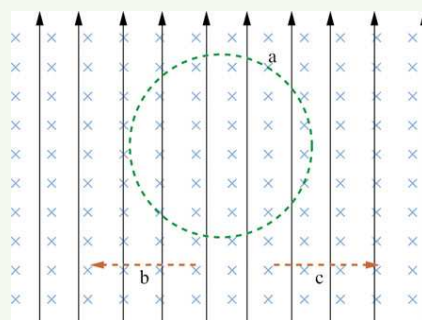
▲圖 8-85

- ※32. 如圖 8-86，abcd 為邊長 L 的正方形，著色部分區域內有垂直進入紙面，量值為 B 的均勻磁場，一束電子流從 a 點以平行於 ab 邊的方向進入此區域，設這些電子都從 cd 邊射出。若電子的質量為 m ，電量為 e ，則
- (1) 這些電子速率最大者為何？
 - (2) 這些電子在磁場中飛行的最長時間為何？
33. 一帶電質點在均勻磁場中作半徑為 3.0 cm ，螺距為 25 cm 的等速率螺旋線運動，求速度與磁場的夾角。



▲圖 8-86

- ※34. 如圖 8-87 所示的空間中有鉛直向上的均勻磁場，也有水平方向的均勻電場（方向均標示於圖中），電場和磁場互相垂直（方向均標示於圖中）。有三個帶電小球 a，b 和 c，均帶正電荷，電量也一樣，但是質量不同。三個小球在磁力、電力和重力三者的作用下，a 小球作等速圓周運動，b 小球水平向左作等速運動，c 小球則水平向右作等速運動，判斷這三個小球質量的大小順序。



▲圖 8-87

- ※35. 一質譜儀中，離子經電位差 V 加速後，垂直射入均勻磁場 B 中，作半徑 r 之圓周運動。
- (1) 求此離子之荷質比。
 - (2) 若以 $\log V$ 為縱軸， $\log r$ 為橫軸，所得的圖為拋物線還是直線？若為直線，其斜率是多少？
- ※36. 一迴旋加速器的高頻電源的頻率為 $f = 1.1 \times 10^7\text{ Hz}$ ，已知質子的質量為 $m = 1.7 \times 10^{-27}\text{ kg}$ ，電量為 $1.6 \times 10^{-19}\text{ C}$ 。
- (1) 加速質子時，所需的磁場有多大？
 - (2) 若質子運動時最大的軌道半徑為 1.0 m ，則加速結束時，具有多大的動能？