

4

幾何光學

4-1 拋物面鏡

4-2 球面鏡

4-3 折射現象

4-4 全反射

4-5 薄透鏡



蠟燭經雙凸透鏡折射和反射後所形成的三個像：最大的倒立像是由透鏡折射所形成的實像；其餘兩個縮小的像，一為正立虛像，另一為倒立實像，是由透鏡的兩個鏡面反射所形成，正立者是由前面的鏡面（對入射光而言，相當於凸面鏡）反射所形成，倒立者是由後面的鏡面（對入射光而言，相當於凹面鏡）反射所形成。



Light bring us the news of the Universe.
光為我們帶來了宇宙的訊息。

— 布拉格 (Sir William Henry Bragg, 1862 - 1942)

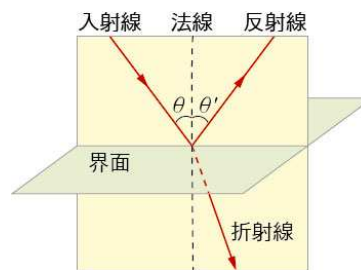
在高一的基礎物理(一)中，我們曾經學過光學的一些基本概念，例如光的直線行進性質、反射現象和折射現象等。

光自點光源往四面八方各個方向發出，在均勻介質中這些光都以直線的路徑行進稱為光束 (beam) 或光線 (ray)。光線行進時若遇到另一不同介質，通常會有兩種主要的反應。第一是在兩介質交界的界面發生反射現象，入射的光線稱為入射線 (incident ray)，反射的光線稱為反射線 (reflected ray)，通過入射線與界面的點而與界面垂直的線稱為法線 (normal)，這時光線的路徑需遵守反射定律：即入射線、反射線和法線位在同一平面上 (此平面稱為入射面，如圖 4-1 中的黃色平面)，入射線和反射線位在法線的兩側，且入射角 θ 等於反射角 θ' ，如圖 4-1 所示。

第二種反應則是光線到達另一介質時，除了有部分光線被反射之外，也可能有部分光線會進入另一介質。此時光線的行進方向會遵守折射定律，其詳細情況將在本章的後半部分討論。

處理光的反射現象和折射現象時，是以直線行進性質、反射定律和折射定律為基礎，常以作圖的方式與幾何學來了解光的行徑與性質，所以常常稱為幾何光學 (geometrical optics 或 ray optics)。

幾何光學中的反射定律以及光經平面鏡反射成像等較為簡單的現象，在高一基礎物理(一)中已有論述，因此本章將開始討論光線行進遇到曲面反射時，所造成的現象及應用。



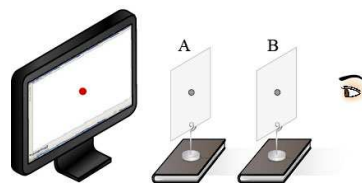
▲圖 4-1 光線行進時若遇到不同介質，反射時會遵守反射定律，即入射角 θ 等於反射角 θ' 。



做一做

觀察光的直線行進性質，請參考圖 4-2 的裝置。

1. 利用類似「小畫家」的軟體，在電腦螢幕上以白色為背景色，在中間畫一直徑約為 1 公分的圓，並填滿紅色。
2. 取兩張邊長約為 10 公分左右的 A 和 B 硬紙各一張，並在兩張紙的中央位置鑽直徑約為 3 公釐的小孔。
3. 距離螢幕約 50 公分處，以夾子夾住 A 紙，墊以書本並調整其位置，可用一隻眼睛透過 A 紙的小孔觀察到螢幕紅色的圓。
4. 保持 A 紙的位置不變，將 B 紙以另一夾子夾住，置於 A 紙後方約 50 公分處，調整 B 紙的位置，使得能透過 B 紙的小孔看到 A 紙小孔中的紅色圓圈，保持 B 紙位置不變。
5. 檢查螢幕上的紅色圓圈與 A 和 B 紙上的兩個小孔是否在同一直線上。



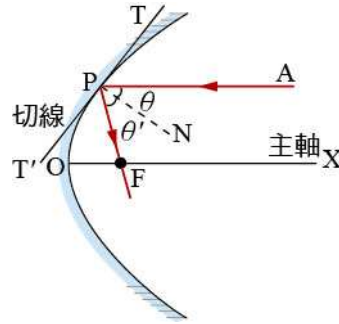
▲圖 4-2 觀察光的直進性質。

4-1 拋物面鏡

1. 拋物面鏡的基本性質

若將一拋物線繞著主軸（即對稱軸）旋轉 180° ，所產生的曲面稱為拋物面。以拋物面作成反射面，就是**拋物面鏡**

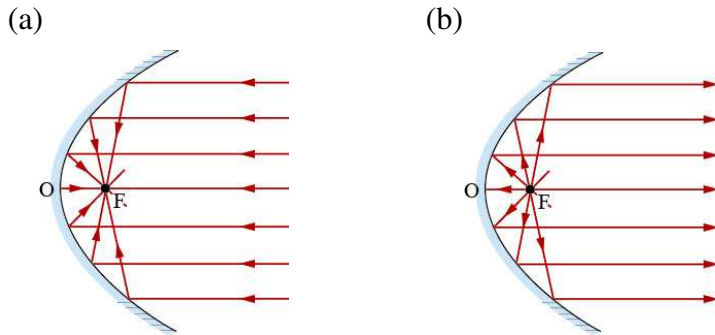
（parabolic mirror），圖 4-3 所示為拋物面鏡（凹面）的剖面圖。拋物線有一重要的性質，說明如下：在圖 4-3 中，P 為拋物線上的任一點，直線 AP 平行於主軸 OX，TT' 為通過 P 點的切線，連接 P 點和拋物



▲圖 4-3 拋物面鏡（凹面）。平行於主軸 OX 的入射光線，經鏡面反射後必定通過焦點 F。

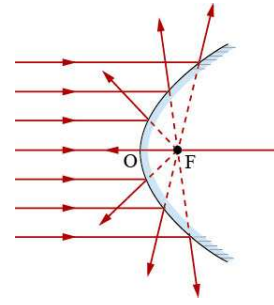
線的**焦點**（focus）F，由數學可證得 $\angle FPT' = \angle APT$ 。過 P 點作法線 PN，圖中的 θ 與 θ' 應相等。這表示任一平行於主軸的光線入射至拋物面鏡（凹面），其反射光線必定通過拋物線的焦點。

根據此一性質可知，若有一束平行於拋物面鏡主軸的光線入射在鏡面上，其反射光線必會聚於焦點，如圖 4-4(a)所示。反過來說，若將點光源置於拋物面鏡的焦點，則經由鏡面反射的光線必定平行於主軸，如圖 4-4(b)所示。



▲圖 4-4 (a)拋物面鏡可以將平行主軸的入射光會聚在焦點 F；(b)若點光源置於拋物面鏡的焦點 F 處，則發出的光線經鏡面反射後，皆平行主軸。

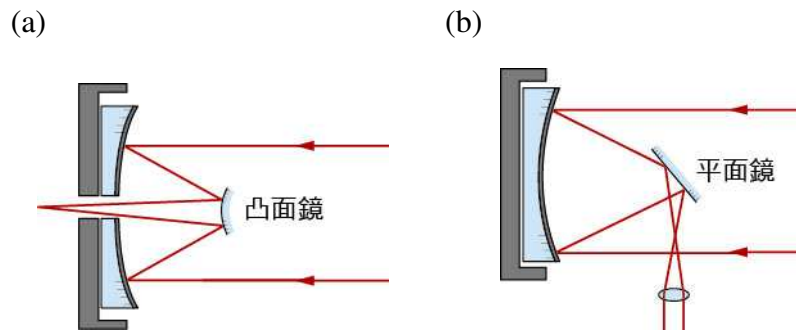
若以拋物面鏡的凸面作為反射面，如圖 4-5 所示，則平行於主軸入射在鏡面上的光線，其反射線反方向的延長線必會聚於鏡後主軸上的一點，稱為**虛焦點**（virtual focus），也常簡稱為**焦點**。



▲圖 4-5 凸面的拋物面鏡，F 為虛焦點。平行於主軸入射在鏡面上的光線，其反射光線的延長線會聚於鏡後的虛焦點 F。

2. 拋物面鏡的應用

由於拋物面鏡能精確地把平行光線會聚在一點，所以非常適用於接收來自遠方的光線，因為遠方來的光線可視為平行光線，且可調整拋物面的主軸與光的行進方向平行。反射式的天文望遠鏡就是利用拋物面鏡來聚光，如圖 4-6 所示。



▲圖 4-6 反射式天文望遠鏡利用拋物面會聚光線。
(a)在鏡後觀測；(b)在鏡的側面觀測。

拋物面鏡的聚光性質不只對可見光適用，其實對所有的電磁波都適用，而專用於接收無線電波的碟型天線，作成拋物面可將遠方傳來的微弱電磁波會聚在焦點，使訊號得以有效地接收。如圖 4-7 所示，某些人家架



▲圖 4-7 部分住戶裝設拋物面鏡製成的碟形天線（俗稱小耳朵）來接收衛星電視。

設拋物面鏡製成的碟型天線來收看衛星電視節目。每屆奧運的聖火點燃儀式，均是利用拋物面鏡把入射的陽光會聚在焦點處，而將火炬點燃（如圖 4-8 所示）。



▲圖 4-8 2008 年中國北京奧運點燃聖火是利用陽光經拋物面鏡反射後，光線會聚於焦點處，而將火炬點燃。



▲圖 4-9 強力探照燈的光源置於拋物面鏡的焦點處。

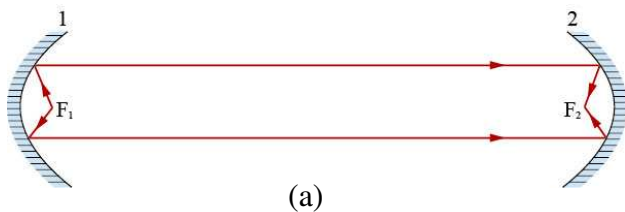
強力探照燈則是將光源置於拋物面鏡（凹面）的焦點處，經鏡面反射後的平行光束可以傳至遠處，如圖 4-9 所示。



悄悄話

本書第二章波動中曾經以水波為例，說明波動在不同介質界面會有反射現象，也遵守反射定律，與光的反射現象相同。同樣地，聲波傳播至不同介質，在界面處反射時也會遵守反射定律。底下有趣的實驗就是利用此一性質所作的安排。

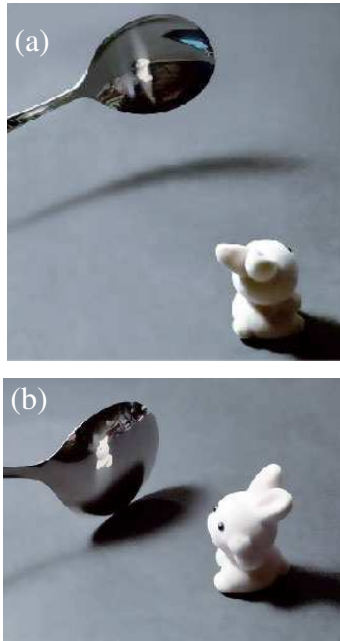
圖 4-10(a)中有兩個拋物面做成的凹面鏡，兩凹面鏡的主軸相同。設其焦點分別為 F_1 和 F_2 。設甲乙兩人分別在 F_1 和 F_2 處，甲在 F_1 處小聲講話，聲波經由凹面鏡 1 反射後平行主軸行進，遇凹面鏡 2 時聲波反射可會聚在焦點 F_2 處，乙便可以聽到甲所說的話。圖 4-10(b)為新竹小叮噠科學遊樂區利用此原理所作的設施。



◀圖 4-10 (a)在 F_1 處的人小聲講話，在 F_2 處的人可以聽到他所說的話。(b)新竹小叮噠科學遊樂區裡有這種裝置，讓人們體會拋物面鏡反射的應用（照片僅顯示三相對拋物面鏡中的一側，相對的面鏡在路的另一側）。

(b)

4-2 球面鏡



▲圖 4-11 (a)湯匙凹的一面常出現物體倒立較小像。(b)湯匙凸的一面出現正立的像。

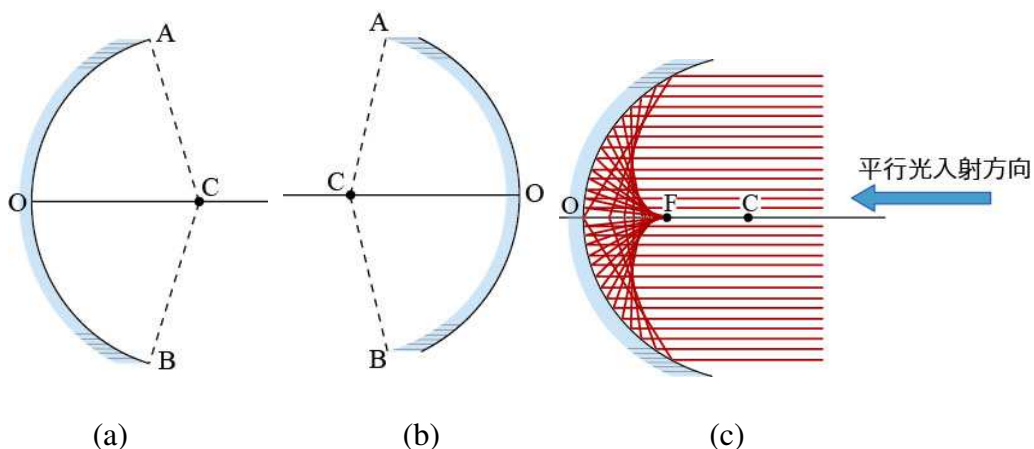
前節所述的拋物面鏡，除了收看衛星電視所用的碟形天線之外，在日常生活中不容易見到。原因是拋物面鏡製作較為困難，成本較高，日常生活中也不需要利用到嚴格的拋物面鏡。如果曲面不是拋物面，就不會有將所有平行會聚於一點的性質，那會有什麼現象呢？

有時我們去餐廳用餐，餐點尚未上桌之前，拿起湯匙把玩，發現亮晶晶的湯匙裡會呈現物體的像，湯匙凹的一面常呈現倒立較小的像，而凸的一面則出現縮小正立的像，如圖 4-11 所示。為什麼會呈現這樣的像？有無規則可循呢？

1. 球面鏡

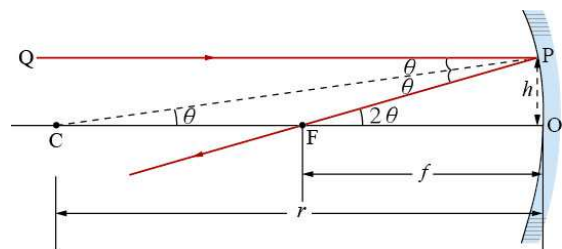
將球面的一部分作成反射面，稱為**球面鏡** (spherical mirror)。如圖 4-12(a)所示的反射面為凹面，稱為**凹面鏡** (concave mirror)；圖 4-12(b)的反射面為凸面，稱為**凸面鏡** (convex mirror)。圖中鏡面的中心點 O 稱為**鏡頂** (vertex)， C 為球面的**球心**， OC 稱為**主軸** (principal axis)， \overline{AB} 為孔徑， $\angle ACB$ 稱為孔徑角（如圖中的虛線夾角）。圖 4-12(c) 為平行於主軸的光線經凹面鏡反射的情形，圖中可以看出這些反射線不會剛好交會在同一位置，但是靠近主軸的平行光，其反射線則大致會聚於主軸上的某一點 F ，與拋物面鏡的聚光情形類似， F 稱為球面鏡的焦點。因此若凹面鏡的孔徑角過大，則從遠處物體發出的光線，經凹面鏡反射後所生成的像會有些模糊。為使成像清晰，必須適度縮小球面鏡

的孔徑角，使入射至鏡面的光線靠近主軸，且與主軸夾成的角度甚小，這些光線稱為**近軸光線**（paraxial ray）。以下有關球面鏡成像的討論，將僅限於近軸光線的部分。



▲圖 4-12 (a)球面凹面鏡；(b)球面凸面鏡；(c)平行且靠近主軸的入射光經凹面鏡反射後，會聚於焦點 F。

焦點 F 至鏡頂 O 的距離稱為焦距（focal distance，或常稱為 focal length），以 f 表示之。球面鏡的焦距 f 和其曲率半徑 r 之間有一簡單的數學關係。在圖 4-13 中，一平行於主軸的近軸光線 QP 入射在鏡面上的 P 點，反射後通過焦點 F 。



▲圖 4-13 球面鏡的焦距 f 等於其曲率半徑 r 的一半。

設 C 點為球心， CP 垂直於通過 P 點的切面，即 CP 為法線， $\angle QPC$ 為入射角，設為 θ 。根據反射定律，其反射角 $\angle CPF$ 等於入射角 θ 。又兩平行線之間的內錯角相等，故 $\angle PCF = \theta$ 。而 $\angle PFO$ 為 $\triangle PCF$ 的外角，故 $\angle PFO = 2\theta$ 。若球面鏡的孔徑甚小於曲率半徑（即符合近軸光線的條件），則 θ 甚小，得 $\sin \theta \approx \tan \theta \approx \theta$ 。由圖上的幾

何關係可得 $\theta \approx \frac{h}{r}$ ， $2\theta \approx \frac{h}{r}$ ，故

$$f = \frac{1}{2}r$$

4-1 式

即球面鏡的焦距等於其曲率半徑的一半。

範例 4-1

對凹面鏡的近軸光線而言，經凹面鏡反射後，交主軸於焦點 F 處。若入射線離主軸較遠，入射至凹面鏡時的入射角為 θ ，反射後與主軸的交點位置為 G。若凹面鏡的焦距為 f ，求 G 與 F 的距離。

[解答] 由反射定律及平行線內錯角相等，可知

圖 4-14 中的三個 θ 角相等。過 G 點作 \overline{GH} 垂直圖中的虛線（虛線的長度為半徑，即 $2f$ ），由圖中很容易看出

$$\overline{CG} = \frac{f}{\cos\theta}。$$

$$\text{於是 } \overline{GF} = \overline{CG} - \overline{CF} = \frac{f}{\cos\theta} - f$$

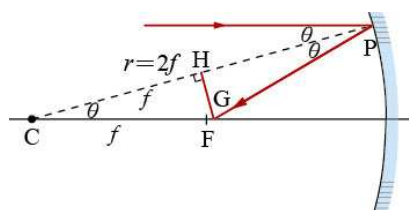
$$= f \left(\frac{1}{\cos\theta} - 1 \right)$$

註：① 對於近軸光線而言， θ （以弧度為單位）甚小，此時 $\sin\theta \approx \theta$ ，因為 $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta \approx 1 - \theta^2$ ， θ^2 項更小，可予略去，

因此 $\cos\theta$ 非常接近於 1，而 $\frac{1}{\cos\theta}$ 較 1 大得極為有限，所以

\overline{GF} 幾乎為零，因此近軸光線的反射線交於焦點 F。

② 當面鏡的孔徑角大的時候，平行於主軸的入射線其入射角 θ 有大有小，其反射線不能會聚於一點，這會使得成像不清楚。

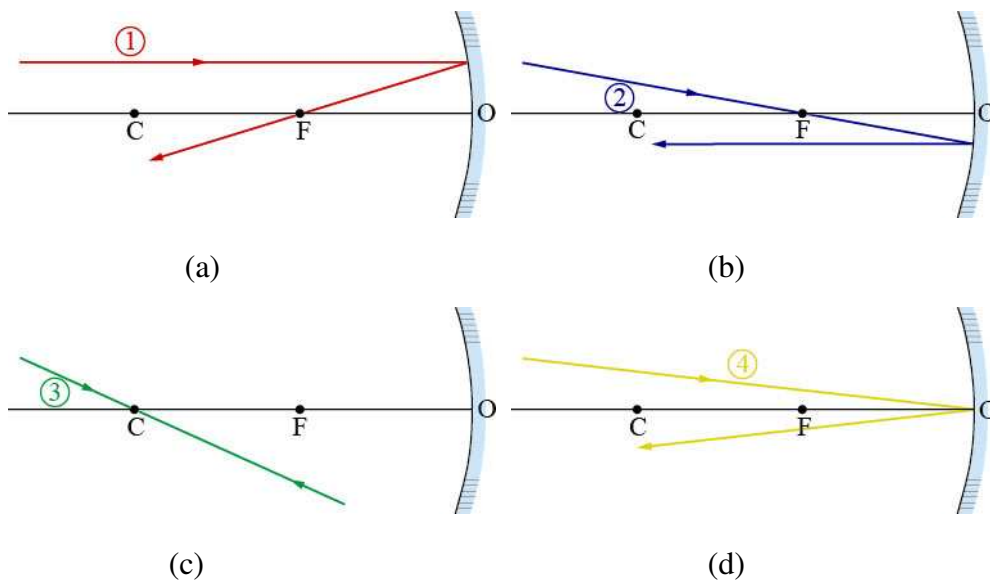


▲圖 4-14 距離主軸較遠的光線經凹面鏡反射後，與主軸的交點為 G，G 點與鏡子的距離小於焦距 f 。

2. 凹面鏡反射成像

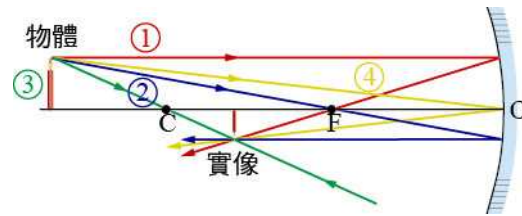
當凹面鏡的孔徑角不大時，物體發出的光線入射在凹面鏡上時，其反射線（或反射線反方向的延長線）可會聚成像。其中有四條特殊的入射線，可以利用它們的反射線來決定所成的像的位置和性質。這四條特殊光線分述如下

1. 平行於主軸的入射線，其反射線通過焦點 F ，如圖 4-15(a)中以①標示的光線。
2. 通過焦點的入射線，其反射線平行於主軸，如圖 4-15(b)中以②標示的光線。
3. 通過球心 C 的入射線，由於是沿法線方向入射，所以其反射線循入射線的反方向行進，如圖 4-15(c)中以③標示的光線。
4. 入射於鏡頂 O 的光線，其反射線對稱於主軸，如圖 4-15(d)中以④標示的光線。



▲圖 4-15 (a)平行於主軸的入射線，其反射線通過焦點 F ；(b)通過焦點的入射線，其反射線平行於主軸；(c)通過球心 C 的入射線，其反射線循入射線的反方向行進；(d)入射於鏡頂 O 的光線，其反射線對稱於主軸。

置於凹面鏡前物體的某一點所發出的光線中，上述四條特殊光線的路徑容易繪出。由於我們討論的光線都是近軸光線，如前所述，這些反射線或其反方向的延長線都能會聚於一點，也就是此點即為成像的位置，如圖 4-16

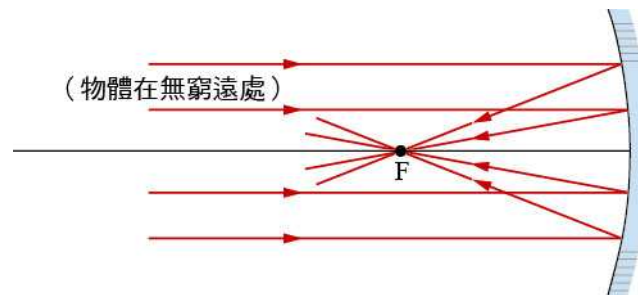


▲圖 4-16 物體經凹球面鏡反射時，可利用四條特殊光線的反射線來求像的位置和性質。這四條反射線能會聚於一點，即像的位置。

所示。因為兩線即有一交點，所以實際作圖時，通常恰當選取兩條特殊光線即可。在圖中由實際光線會聚而成的像稱為**實像**（real image）；由實際光線的反方向延長線所形成的像稱為**虛像**（virtual image）。若我們將光屏置放在成像的位置上，可以顯示出實像，但虛像則否。不過，如果我們逆著反射光線的方向觀察，可以看見實像和虛像。

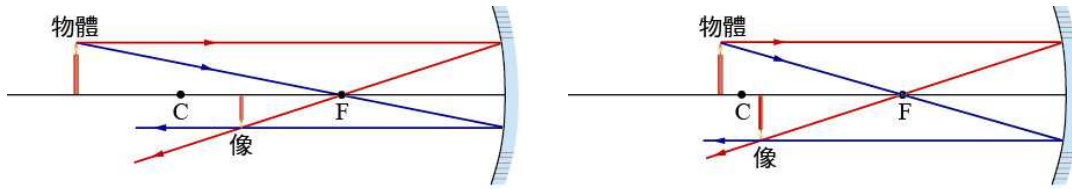
物體經凹面鏡反射所成的像，其性質（此處性質是指像的位置、大小、倒立或正立、實像或虛像等）與物體在鏡面前的位置有關。

1. 物體置於鏡前無窮遠處，若入射線平行於主軸，則成像於焦點 F 處，如圖 4-17 所示。



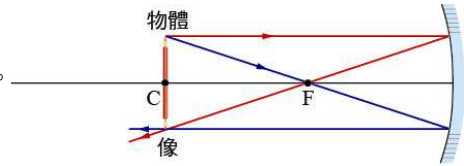
▲圖 4-17 物體置於凹面鏡前無窮遠處，成像於焦點。

2. 物體在面鏡的球心 C 之外，形成縮小的倒立實像，其位置在球心 C 和焦點 F 之間如圖 4-18(a)所示。若物體愈接近 C 點，則像的位置也愈接近 C 點，且漸大（仍較原物體為小），如圖 4-18(b)所示。



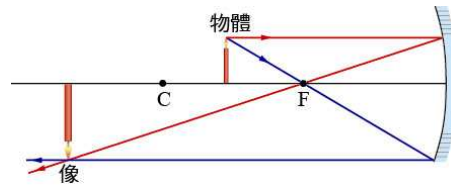
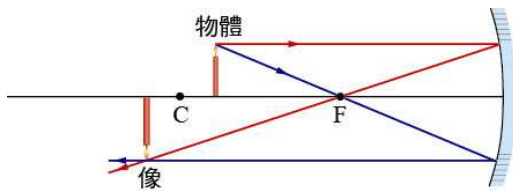
▲圖 4-18 (a)物體在凹面鏡前球心之外，會形成縮小的倒立實像，此像位於球心和焦點之間；(b)若物體的位置愈接近球心，則像也愈接近球心，且漸大（注意，所成的像雖漸大，但是仍較原物體為小）。

3. 物體恰位在面鏡的球心處，形成大小相同的倒立實像，位置就在球心處，如圖 4-19 所示。



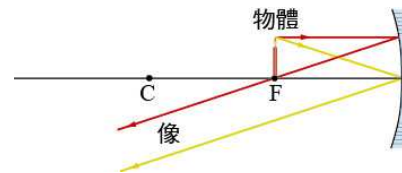
▲圖 4-19 物體位在球心處，形成一大小相同的倒立實像於球心處。

4. 物體在球心和焦點之間，形成放大的倒立實像，其位置在球心之外，如圖 4-20(a)所示。若物體位置愈接近焦點，則所成的像愈遠且愈大，如圖 4-20(b)所示。



▲圖 4-20 (a)物體在球心和焦點之間，形成放大的倒立實像，位於球心外。(b)若物體的位置愈接近焦點，則所成的像愈遠且愈大。

5. 物體置於焦點上時，如圖 4-21 所示，所有的反射光線皆互相平行，成像於無窮遠處，或稱不成像。



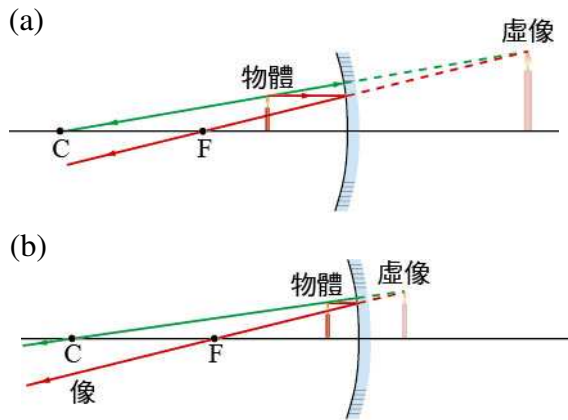
▲圖 4-21 物體置於凹面鏡的焦點處，成像於無窮遠處。



想一想

物體置於凹面鏡前的主軸上，不論物體前後怎樣移動，所成的像不會在哪個範圍內出現？

6. 物體置於焦點和鏡面之間時，反射光線發散，無法會聚成實像。這些反射光線的反方向延長線形成一正立的放大虛像，如圖 4-22(a)所示。若物體愈接近鏡面，所成的像也愈接近鏡面，且漸小（仍較原物體為大），如圖 4-2(b)所示。

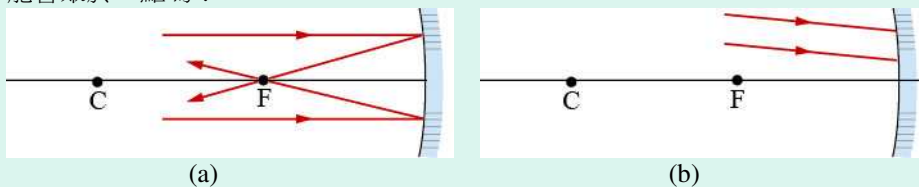


▲圖 4-22 (a)物體置於焦點和鏡面之間時，在鏡後形成一放大的正立虛像。(b)若物體的位置愈靠近鏡面，則所成的虛像也愈接近鏡面，且漸小（注意，所成的像雖漸小，但是仍較原物體為大）。



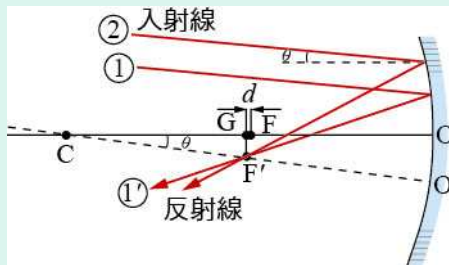
焦平面

對於孔徑角很小的凹面鏡而言，平行於主軸的近軸光線經凹面鏡反射後會聚於焦點，如圖 4-23(a)所示。而在圖 4-23(b)中，不平行於主軸的平行光經凹面鏡反射後能會聚於一點嗎？



▲圖 4-23 (a)平行於主軸的光線經凹面鏡反射後能會聚於焦點；(b)不平行於主軸的平行光經凹面鏡反射後能會聚於一點嗎？

對於這個問題，我們可以這樣思考：在圖 4-24 中，過球心 C 作平行於入射線①及②的線 CO' ， CO' 為①和②的「新主軸」，①和②的反射線需通過「新焦點 F' 」， F' 即為平行光①和②反射線的交點。過 F' 垂直於 CO 的線交 CO 於 G 點，設 F 與 G 的距離為 d 。



▲圖 4-24 不平行於面鏡主軸平行光，其反射線會聚於 F' 。

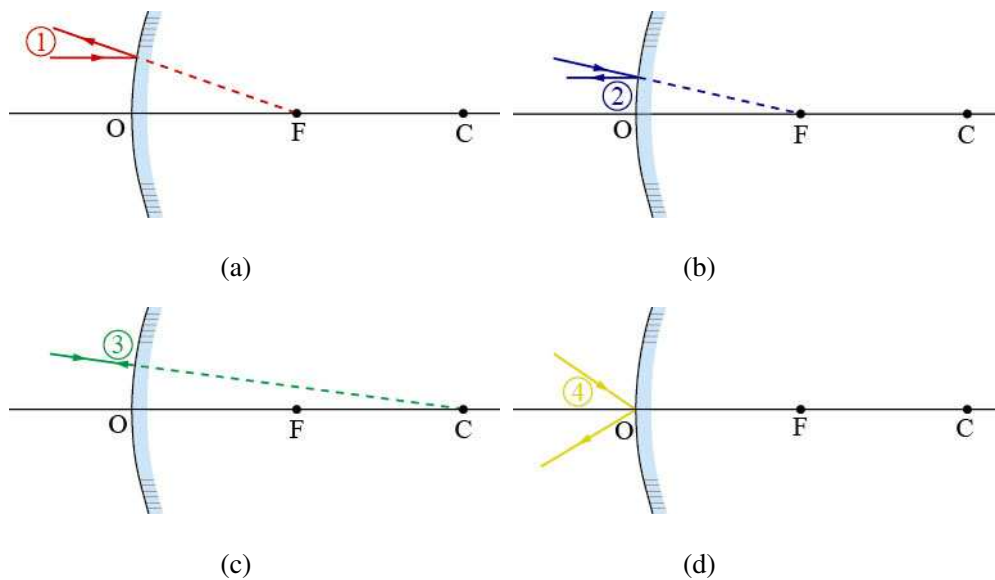
$$\begin{aligned} d &= \overline{FG} = \overline{CF} - \overline{CG} \\ &= f - f \cos \theta \\ &= f(1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

對近軸光線而言， θ 甚小， $\cos \theta \approx 1$ ，即 $d \approx 0$ ，所以 F' 可視為位於過 F 而垂直於主軸的平面上。因此，不平行於主軸的平行光經凹面鏡反射後可會聚於一點，而此點在通過焦點而垂直於主軸的平面上，此平面稱為焦平面。

3. 凸面鏡反射成像

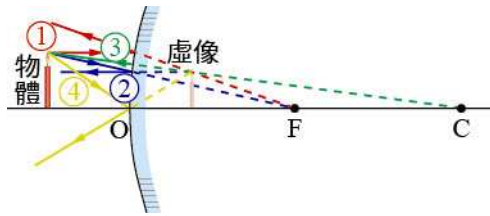
置於孔徑角不大的凸面鏡前之物體，發出的光線入射在面鏡上時經反射（或反射光反方向的延長線）可會聚成像。與凹面鏡相似，也有四條特殊的入射線，可以利用它們的反射線來決定所成的像的位置和性質。這四條特殊光線分述如下：

1. 平行於主軸的入射線，其反射線的反方向延長線通過焦點 F ，如圖 4-25(a)中以①標示的光線。
2. 指向焦點的入射線（即入射線的延長線通過焦點者），反射後平行於主軸，如圖 4-25(b)中以②標示的光線。
3. 指向球心 C 的光線，其反射線循入射線的反方向行進，如圖中 4-25(c)以③標示的光線。
4. 入射於鏡頂 O 的光線，其反射線對稱於主軸，如圖 4-25(d)中以④標示的光線。



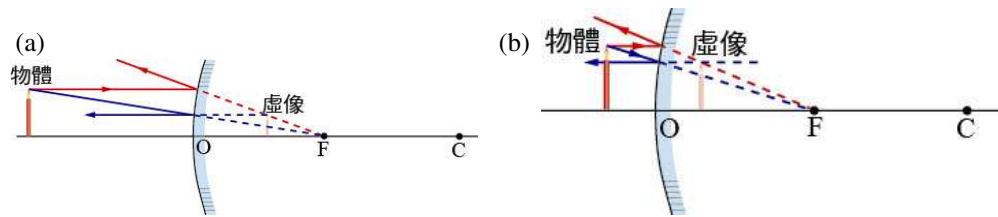
▲圖 4-25 (a)平行於主軸的入射光線，其反射光線的反方向延長線通過焦點 F ，如圖中以①標示的光線；(b)指向焦點的入射線（即入射線的延長線通過焦點者），反射後平行於主軸，如圖中以②標示的光線；(c)指向球心 C 的光線，其反射光線循入射線的反方向行進，如圖中以③標示的光線；(d)入射於鏡頂 O 的光線，其反射光線對稱於主軸，如圖中以④標示的光線。

若這四條入射線是從同一點發出，則其反射線在反方向的延長線會交於一點。因為不是實際光線的會聚，故為虛像，如圖 4-26 所示。與凹面鏡成像類似，實際作圖時，通常恰當選取兩條特殊光線即可。



▲圖 4-26 物體經凸球面鏡反射時，利用四條特殊光線的反射線來求像的位置和性質。注意在凸面鏡成像時，反射線是發散的，其反方向的延長線才能交於一點。

凸面鏡對於鏡前的物體，僅能在鏡後的焦點內形成縮小的正立虛像，如圖 4-27(a)所示，若物體愈接近鏡面，則成像位置也愈接近鏡面，且漸大（仍較原物體為小），如圖 4-27(b)所示。



▲圖 4-27 (a)物體置於凸面鏡前，在鏡後焦點內形成縮小的正立虛像。(b)物體愈接近鏡面，成像位置也愈接近鏡面，且漸大（注意，所成的像雖漸大，但是仍較原物體為小）。



想一想

1. 物體由單一面鏡反射成的像，其性質有倒立或正立；有放大或縮小；有實像或虛像；有的在鏡前，有的在鏡後。若是成實像，一定是倒立嗎？一定在鏡後嗎？一定是放大嗎？
2. 上一問題中，若是成虛像，一定是正立嗎？一定在鏡後嗎？一定是縮小嗎？

範例 4-2

圖 4-11(a)和(b)兩圖中，兔娃娃經面鏡所成的像各在什麼地方？

[解答] 圖 4-11(a)中的兔娃娃呈現倒立縮小的像，這是實像，像的位置在鏡前球心到焦距之間。圖 4-11(b)中的兔娃娃呈現正立縮小的像，這是虛像，像的位置在鏡後。

4. 面鏡成像公式

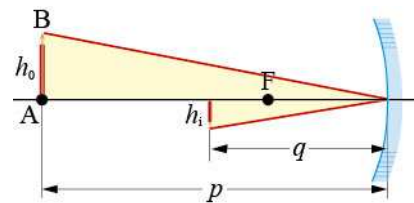
前面所討論物體經凹面鏡及凸面鏡反射成像的情形，其實可歸納為一公式。若物體與面鏡的距離為 p ，稱為**物距**（object distance）；像與面鏡的距離為 q ，稱為**像距**（image distance）；面鏡的焦距為 f 。這三者之間有以下的關係

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

4-2 式

上式中，物距 p 為正值；成實像時， q 取正值，成虛像時， q 取負值；凹面鏡的焦距 f 取正值，而凸面鏡的焦距 f 取負值。或者說，利用此公式算出的像距為正的時候，則所成的像為實像；算出的像距為負的時候，則所成的像為虛像。而算出的焦距為正的時候，表示此面鏡為凹面鏡；算出的焦距為負的時候，表示此面鏡為凸面鏡。（此公式的推導參考 P.174 延伸閱讀）

若物體的高度為 h_o ，像的高度為 h_i ，則像的放大率為 $M = \frac{h_i}{h_o}$ 。物體或所成的像在主軸上方時，其高度 h_o 或 h_i 取正值；反之，在主軸下方時，其高度 h_o 或 h_i ，取負值。在圖 4-28 的成像圖中，兩著色三角形相似，可



▲圖 4-28 放大率為像距與物距的比值。

得 $-\frac{h_i}{h_o} = \frac{q}{p}$ 。即放大率也可寫為

$$M = \frac{q}{p}$$

4-3 式

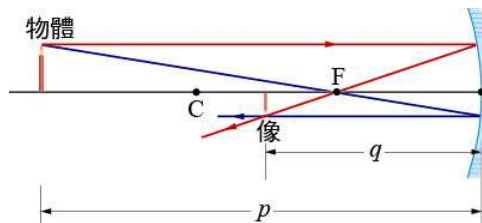
放大率為正時，表示成正立虛像；放大率為負時，則為倒立實像。又， $|M| > 1$ 時，表示為放大的像； $|M| < 1$ 時，則為縮小的像。

範例 4-3

一物體長 2.0 cm，置於焦距為 5.0 cm 的凹面鏡前 15.0 cm 處，試回答下列各題：

- (1) 作圖決定成像的位置。
- (2) 利用面鏡公式，計算像的位置和像長。
- (3) 若將凹面鏡改為凸面鏡，重答以上兩題。

[解答] (1) 選用兩條主要的入射光線，即可作圖得出像的位置，如圖 4-29 所示，所成的像為縮小的倒立實像。



▲圖 4-29 以作圖決定成像的位置

- (2) 利用面鏡公式 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ ，

$$\text{得 } \frac{1}{15.0 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{5.0 \text{ cm}}$$

解得 $q = 7.5 \text{ cm}$ 。因為像距為正，表示為一實像，位於鏡前 7.5 cm 處。放大率為

$$M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{q}{p} = -\frac{7.0 \text{ cm}}{15.0 \text{ cm}} = -\frac{1}{2.0}，$$

故像長為

$$h_i = -\frac{1}{2.0} \times 2.0 \text{ cm} = -1.0 \text{ cm}，$$

負號表示為倒立的實像。

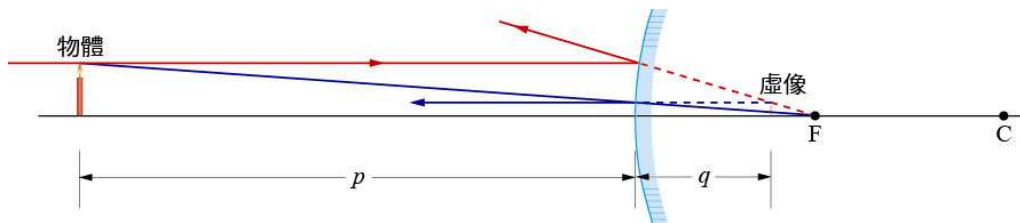
- (3) 若改為凸面鏡，則在鏡後生成一縮小的正立虛像，如圖 4-30 所示。利用面鏡公式，得

$$\frac{1}{15.0 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{-5.0 \text{ cm}}$$

解得 $q = -3.75 \text{ cm}$ 。因為像距為負，表示成為一虛像，位於鏡後

$$3.75 \text{ cm} \text{ 處。放大率為 } M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{q}{p} = -\frac{-3.75 \text{ cm}}{15.0 \text{ cm}} = \frac{1}{4.0},$$

故像長為 $h_i = \frac{1}{4.0} \times 2.0 \text{ cm} = 0.50 \text{ cm}$ ，為正立的虛像。



▲圖 4-30 以作圖法決定成像的位置。

範例 4-4

月球和地球之間的距離為 $3.84 \times 10^8 \text{ m}$ ，月球的直徑為 $3.48 \times 10^6 \text{ m}$ ，若以焦距為 0.90 m 的凹面鏡觀測月球，則所生成的像的直徑是多少？

[解答] 由在地球上以凹面鏡觀測月球，月球與地球之間的距離即為物距 p ，由面鏡公式得

$$\frac{1}{3.84 \times 10^8 \text{ m}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{0.90 \text{ m}} \quad \text{得 } q \approx f = 0.90 \text{ m}$$

此為實像。又設 h 和 h' 分別為月球和其成像的直徑，由放大率

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p} \approx -\frac{f}{p} \text{ 可知月球成像的直徑與凹面鏡的焦距成正比，可}$$

得像的直徑

$$h' = \frac{0.90 \text{ m}}{3.84 \times 10^8 \text{ m}} \times (3.48 \times 10^6 \text{ m}) = -0.0082 \text{ m} = -0.82 \text{ cm}$$

負號表示倒立的像。

所成像的大小顯然較原來月球的直徑小多了，但是對觀察者來說視角放大了，而且通常會再利用透鏡將此像放大，以便觀察。

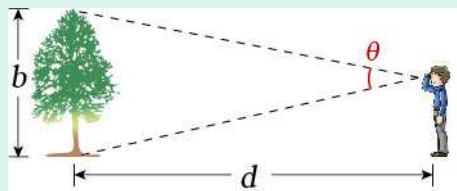


視角放大.....

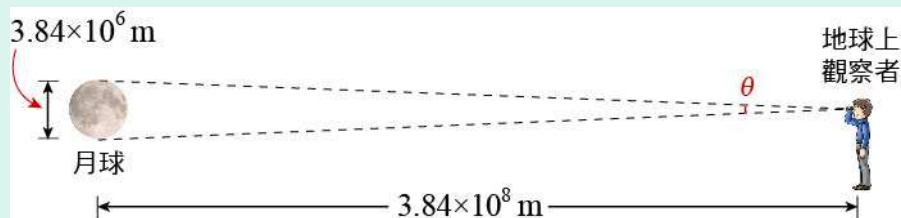
在範例 4-4 中，月球經凹面鏡所成的像較原來月球的大小小多了，是縮小的像。但是我們看到的像卻比原來的月球清楚多了，為什麼呢？原來這是視角放大。

在圖 4-31(a)中，物體（或像）的上下緣至觀察者的視線所夾的角度 θ 稱為視角，即 $\theta \approx \frac{b}{d}$ 。圖 4-31(b)中，地球上的觀察者直接看月球時（未按比例繪圖），月球對人的視角 θ 約為 0.51° ，而圖 4-31(c)，月球經凹面鏡成像後，若觀察者與像的距離為 20 cm，則視角 θ' 為 2.3° 。由於視角放大了，所以會看得較清楚。

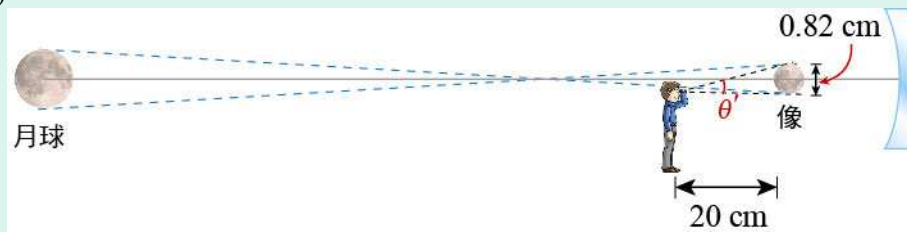
(a)



(b)



(c)



▲圖 4-31 (a)物體（或像）的上下緣至觀察者的視線所成的角 θ ，稱為視角；(b)視角 θ 約 0.51° （未按比例作圖）；(c)人看像的視角 θ' 為 2.3° （未按比例作圖）。

有些化妝用的鏡子係利用焦距較長的凹面鏡做成，使用時臉的位置在面鏡的焦點以內，因此產生正立的放大虛像，方便化妝，如圖 4-32 所示。汽車大燈、手電筒或照相機閃光燈也常利用凹面鏡作為反射面，使經凹面鏡反射後射出的光線較為集中。圖 4-33 所示則為耳鼻喉科醫師看診時常配戴凹面反射鏡，可聚光於耳內，方便觀察。

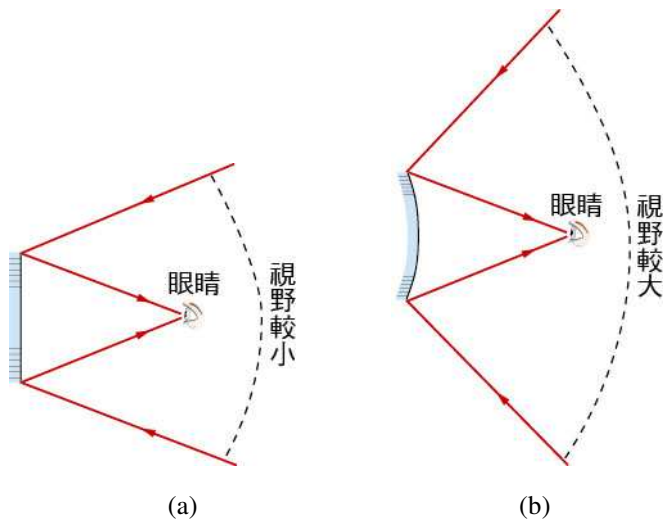


▲圖 4-32 有些化妝鏡用凹面鏡製成，以便化妝。



▲圖 4-33 耳鼻喉科醫師配戴凹面反射鏡看診。

馬路或巷口轉彎處常常安裝有凸面鏡，以便觀察到更大的範圍，看到對方是否有來車。汽車上的後視鏡也常用凸面鏡也是有利於看到後方更大的範圍，以策安全。由圖 4-34 可以看出經由凸面鏡的反射，可看到的視野較平面鏡為大。



▲圖 4-34 利用凸面鏡反射看到的視野較平面鏡者為大。

面鏡的成像公式

設物體高度為 h_0 ，像的高度為 h_i （像為倒立時， h_i 取負值）

(1) 凹面鏡成實像的情況：

由圖 4-35 中 I 和 II 兩三角形相似得

$$\frac{-h_i}{h_0} = \frac{q-f}{f} \quad \text{①}$$

又兩三角形 III 和 IV 相似，得

$$\frac{-h_i}{h_0} = \frac{f}{p-f} \quad \text{②}$$

①和②得：
$$\frac{q-f}{f} = \frac{f}{p-f} \quad \text{化簡得} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \text{③}$$

(2) 凹面鏡成虛像的情況：

圖 4-36 中 $\triangle FGH$ 與 $\triangle FDE$ 相似得

$$\frac{h_i}{h_0} = \frac{q+f}{f} \quad \text{④}$$

又 $\triangle CGH$ 與 $\triangle CAB$ 相似得

$$\frac{h_i}{h_0} = \frac{q+2f}{2f-p} \quad \text{⑤}$$

④和⑤兩式得：
$$\frac{q+f}{f} = \frac{q+2f}{2f-p} \quad \text{化簡得} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{-q} = \frac{1}{f} \quad \text{⑥}$$

(3) 凸面鏡成虛像的情況：

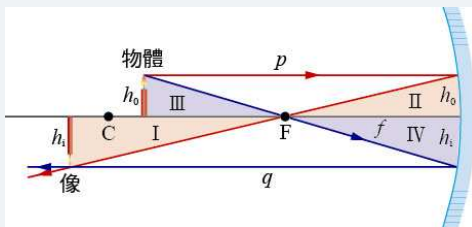
圖 4-37 中 $\triangle FDE$ 與 $\triangle FAB$ 相似，得

$$\frac{h_i}{h_0} = \frac{f}{f+p} \quad \text{⑦}$$

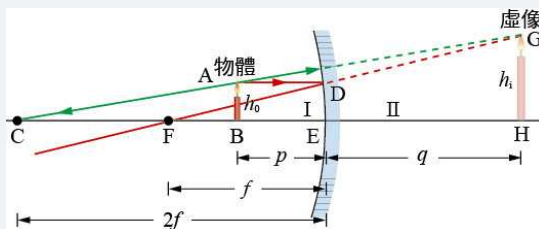
又 $\triangle FGH$ 與 $\triangle FJE$ 相似得

$$\frac{h_i}{h_0} = \frac{f-q}{f} \quad \text{⑧}$$

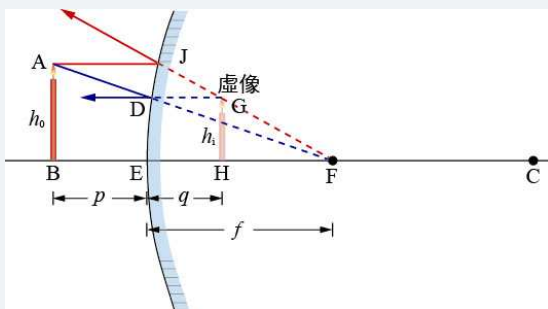
⑦和⑧兩式得：
$$\frac{f}{f+p} = \frac{f-q}{f}$$



▲圖 4-35



▲圖 4-36



化簡得 $\frac{1}{p} + \frac{1}{-q} = \frac{1}{-f}$ ③

▲圖 4-37

①和②和③三式可統一寫為 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ ④

只要令成虛像時，像距 q 取負值，凸面鏡的焦距 f 取負值即可。

4-3 折射現象

本章前言提過，光從一介質進入另一不同的介質時，在兩介質的界面上會發生部分反射和部分折射的現象。除了入射線的方向與界面垂直之外，光在透射時，其前進方向會發生偏折，這是日常生活中常見的現象，例如插入水中的吸管，看起來似是折成兩截（圖 4-38）。雨後出現的彩虹、夜晚星光的閃爍等自然現象都和光的折射有密切的關係。光的折射在生活上應用的例子尤多，例如眼鏡、照相機、顯微鏡、望遠鏡等。甚至於我們眼睛的視覺作用也與光的折射有關。

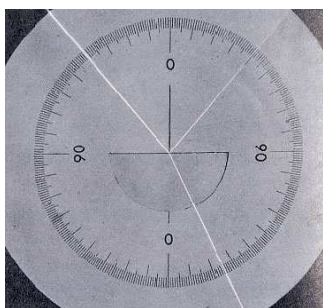


▲圖 4-38 由於光的折射現象，使得吸管看似折成兩截。

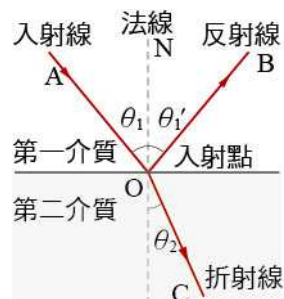
1. 司乃耳定律

在圖 4-39(a)中，光線從空氣射至半圓形玻璃板的圓心時，我們可以觀察到有部分光線反射，部分光線進入玻璃中。進入玻璃中的光線，並不沿著原來的方向行進，而有偏折的現象。

像這樣，光從一種介質進入另一種不同的介質時，行進方向發生改變的現象稱為**折射**。圖 4-39(b)為各光線的幾何關係圖



(a)



(b)

▲圖 4-39 (a)光從空氣射至半圓形玻璃板的圓心時，其行進方向並不沿著原來的方向行進，而有偏折的現象。光線從空氣進入玻璃中，其行進方向偏折。(b)入射線、反射線、折射線和法線的幾何關係圖，入射角 θ_1 等於反射角 θ_1' ，而折射線行進方向與入射線方向不同。

，光從第一介質傳播進入第二介質，O 為入射點，AO 為入射線，ON 為法線，從入射點偏折進入第二介質的光線 OC，稱為**折射線**。 θ_1 為入射角，折射線與法線的夾角稱為**折射角** θ_2 。

當光從空氣進入水或玻璃中，實驗發現折射角 θ_2 小於入射角 θ_1 ，即折射線偏向法線。反過來，當光從水或玻璃進入空氣，折射線將偏離法線。若改變入射角 θ_1 ，則折射角 θ_2 也會改變。1621 年荷蘭人司乃耳（Willebrord Snell, 1580-1626）實驗發現，光在折射時遵守**折射定律**（law of refraction），或稱為**司乃耳定律**（Snell's law）。

1. 入射線、折射線和法線均在同一平面上，且入射線和折射線分別在法線的兩側。
2. 入射角和折射角的正弦比值為一定值，即

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = n \quad \text{4-4 式}$$

上式中的 n 為一常數，其值與介質有關。

若光從真空中傳播進入某介質時，則（4-4）式中的 n 定義為該介質的**折射率**（index of refraction）。按此定義，真空的折射率即為 1。一般物質的折射率如表 4-1 所列。由表中可知空氣的折射率為 1.00029，在 4 位有效數字的範圍內為 1，故在一般實驗中，常以光由空氣進入介質時，所測得的 n 值作為該介質的折射率。

表 4-1 一般物質的折射率

介質	折射率
空氣	1.00029
二氧化碳	1.00045
水	1.333
酒精	1.362
甘油	1.473
苯	1.501
二硫化碳	1.628
冰 (0 °C)	1.310
石英玻璃	1.459
塑膠玻璃	1.49 (約)
冕牌玻璃	1.51 (約)
窗玻璃	1.51 (約)
食鹽	1.544
鉛玻璃	1.62~1.81
鑽石	2.419

由（4-4）式中可看出光自空氣進入一介質，入射角保持不變時，若物質的折射率愈大，則折射角就愈小（即偏折程度愈大），折射線愈偏向法線。換句話說，**折射率的量值可表示光折射方向的偏折程度**。



做一做

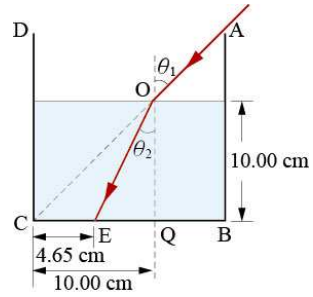
由圖 4-39(a)中光線的路徑圖，計算半圓形玻璃的折射率。



1. 表中數值為在 1 大氣壓下，溫度範圍在 0°C 至 20°C 內，以波長為 589 nm 的黃色鈉光所測得。
2. 來源 Handbook of Physics (Published by Springer, 2002)

範例 4-5

如圖 4-40 所示的正立方體容器，未注入液體時，一束雷射光沿一正方形截面的對角線方向，由 A 點射向 C 點。若在容器中注入深 10.00 cm 的某液體，發現射至容器底部的雷射光自 C 點向右偏移 4.65 cm 至 E 點，求光在此液體中的折射率。



▲圖 4-40

[解答] 由圖中的幾何關係可知

$$\begin{aligned} \sin \theta_2 &= \frac{\overline{QE}}{\overline{OE}} \\ &= \frac{10.00 \text{ cm} - 4.65 \text{ cm}}{\sqrt{(10.00 \text{ cm})^2 + (10.00 \text{ cm} - 4.65 \text{ cm})^2}} = 0.472 \end{aligned}$$

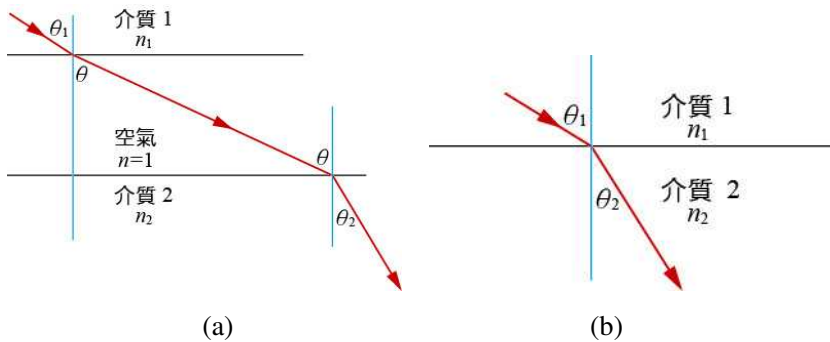
由於入射角 θ_1 等於 45° ，利用司乃耳定律得該液體的折射率為

$$n = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{\sin 45^\circ}{0.472} = 1.50$$

2. 相對折射率

在圖 4-41(a)中，光從折射率為 n_1 的介質 1 進入空氣，再由空氣進入折射率為 n_2 的介質 2 中。設光從介質 1 進入空氣的入射角為 θ_1 ，折射角為 θ ，由折射定律得

$$n_1 \sin \theta_1 = 1 \times \sin \theta$$



▲圖 4-41 (a)光介質 1 進入空氣再進入介質 2 (各界面) 互相平行；(b)空氣層的厚度趨近於 0 時，相當於光直接從介質 1 進入介質 2。

若圖中兩界面互相平行，則接著光由空氣進入介質 2 時的人射角為 θ 。設進入介質 2 的折射角為 θ_2 ，則

$$1 \times \sin \theta = n_2 \sin \theta_2$$

由以上兩式可得

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 \quad \text{4-5 式}$$

如果圖中空氣層的厚度趨近於零時，則相當於光直接從介質 1 進入介質 2，如圖 4-41(b)。此時 (4-5) 式為光從介質 1 進入介質 2 的折射定律，也稱為司乃耳定律的一般形式。亦可寫為

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{4-6 式}$$

上式中 n_2 和 n_1 的比值記為 n_{12} ，即

$$n_{12} = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{4-7 式}$$

n_{12} 稱為介質 2 對介質 1 的**相對折射率** (relative index of refraction)，或光由介質 1 進入介質 2 的相對折射率，而前面所討論物質的折射率有時也稱為**絕對折射率** (absolute index of refraction)。

光從一介質進入另一介質時，兩介質的折射率較小者，光在該介質中的速率較大，稱為**光疏介質** (optically thinner medium)，折射率較大的介質稱為**光密介質** (optically denser medium)。以空氣和水兩者為例，水為光密介質；而水和冕牌玻璃兩者而言，水則為光疏介質。光從光疏介質進入光密介質時，折射角較入射角小，故折射線偏向法線；光從光密介質進入光疏介質時，折射角較入射角大，故折射線偏離法線。

範例 4-6

一游泳者站在游泳池畔，不小心把蛙鏡掉到游泳池內邊緣的底部。他發現水深度顯示的深度為 1.0 公尺，但是他看到掉在水底的蛙鏡似乎比較淺。為什麼呢？如果他在蛙鏡正上方附近觀察，會覺得蛙鏡的深度是多少（已知水的折射率為 1.33）？

[解答] 這是因為水中物體發出的光線射出水面時，會因折射偏離法線，使得觀察者看到的物體似乎變淺了。在圖 4-42 中，從物體 P 所發出的光線中，若與水面垂直者（圖中的 PN），因入射角為零，故進入空氣中時，折射角亦為零，光的行進方向無偏折。另一光線 PQ 以入射角 θ_1 射至水面時，其折射角為 θ_2 ，由於水的折射率大於空氣，故折射光線偏離法線。設水的折射率為 n ，由司乃耳定律得

$$n \sin \theta_1 = \sin \theta_2 \quad \text{①}$$

若觀察者在物體正上方附近觀察，光線 QE 反方向延長線和 PN 的交點 P'，即觀察者看到的深度，稱為視深 h' ，則角度 θ_1 和 θ_2 均甚小，其正弦值近似等於正切值，即

$\sin \theta_1 \approx \tan \theta_1 = \frac{s}{h}$ 和 $\sin \theta_2 \approx \tan \theta_2 = \frac{s}{h'}$ 。故式可寫成

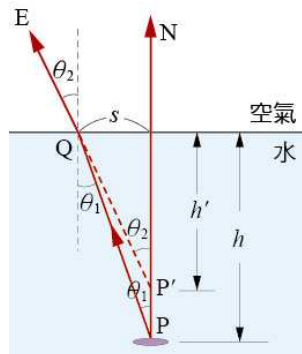
$$n \times \frac{s}{h} \approx 1 \times \frac{s}{h'}$$

故得視深與實深的關係式為 $h' = \frac{s}{h}$ ②

由上式可知，若 $n > 1$ ，則 $h' < h$ ，因此從空氣中看水中的物體時，會覺得物體似是浮了起來，顯得較淺。

現在，此人掉入水中蛙鏡的深度（實深 h ）為 1.0 m，而水的折射率為 1.33，由②式得視深 h' 為

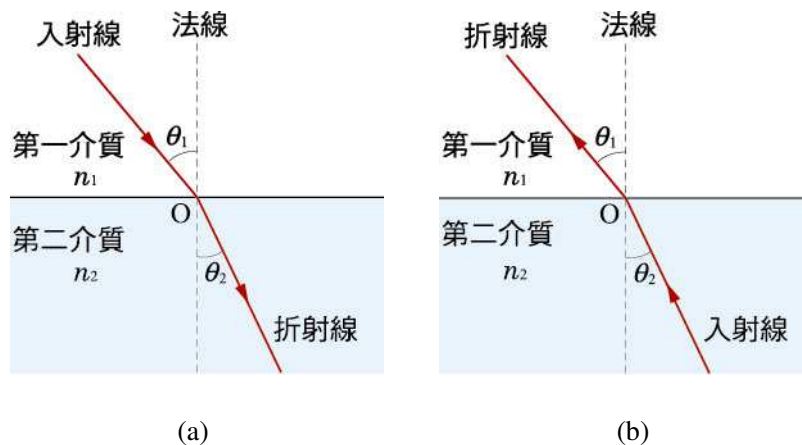
$$h' = \frac{1.0 \text{ m}}{1.33} = 0.75 \text{ m}$$



▲圖 4-42 由於光線的折射，原來在位置 P 的物體，從界面上方看起來，物體的位置在 P'。

3. 光在折射時路徑的可逆性

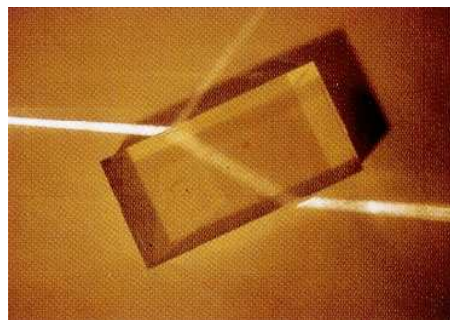
在圖 4-43(a)中，當光從折射率為 n_1 的第一介質以入射角 θ_1 射入折射率為 n_2 的第二介質時，若折射角為 θ_2 ，則 $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ 。而在圖 4-43(b)中，光線改從第二介質以入射角 θ_2 ，反向射入第一介質時，則因其入射角和折射角必須遵守同樣的折射公式，故折射角必等於 θ_1 ，即光沿著同一路徑反方向行進，表示光在折射時，其路徑具有可逆性。



▲圖 4-43 光的折射路徑具有可逆性。(a)光由介質 1 進入介質 2 時入射角為 θ_1 ，折射角為 θ_2 ；(b)光由介質 2 進入介質 1 時，若入射角為 θ_2 ，則折射角必等於 θ_1 ，即光循原路徑反方向行進。

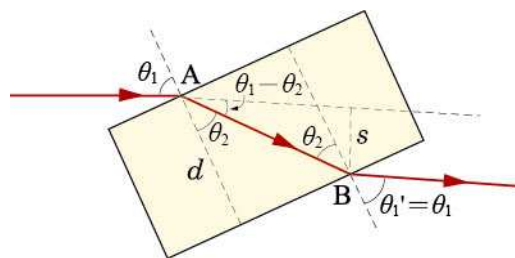
範例 4-7

圖 4-44 所示為光線入射平行玻璃塊後的折射情形，照片顯示入射光線和射出光線互相平行，兩者之間有橫向位移。若玻璃塊的折射率為 n ，厚度為 d ，入射角為 θ_1 ，求橫向位移。



▲圖 4-44 光線入射平行玻璃塊的折射情形，入射光線和射出光線互相平行，但兩者之間有橫向位移。

[解答] 參考圖 4-45，設光線在 A 點從空氣中射入玻璃塊內，入射角為 θ_1 ，折射角為 θ_2 ，則由折射定律得 $\sin \theta_1 = n \sin \theta_2$ 。當光線在 B 點處從玻璃塊射出時，入射角等於 θ_2



▲圖 4-45 光線路徑的分析圖。

，設其折射角為 θ_1' ，則 $n \sin \theta_2 = \sin \theta_1'$ ，所以 $\theta_1 = \theta_1'$ ，即入射光線和射出光線平行。由圖中的幾何關係可得橫向位移 s 為

$$s = \overline{AB} \sin (\theta_1 - \theta_2) = \overline{AB} (\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \sin \theta_2)$$

玻璃塊的厚度 $d = \overline{AB} \cos \theta_2$ ，即 $\overline{AB} = \frac{d}{\cos \theta_2}$ ，以之代入上式可得

$$s = d (\sin \theta_1 - \cos \theta_1 \tan \theta_2)$$

因為 $\sin \theta_2 = \frac{1}{n} \sin \theta_1$ ，所以 $\tan \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}}$ ，故

$$s = d \sin \theta_1 \left(1 - \frac{\cos \theta_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_1}} \right)$$

4-4 全反射

1. 全反射的現象

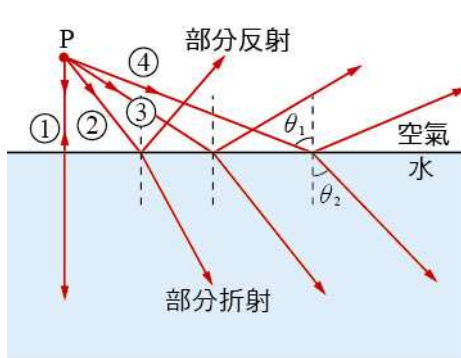
從光疏介質進入光密介質時，折射角 θ_2 較入射角 θ_1 小，折射線偏向法線。圖 4-46 所示為光線從空氣中入射水中時，產生部分反射和部分折射的現象。設水的折射率為 n ，由司乃耳定律可得 $1 \times \sin \theta_1 = n \sin \theta_2$ ，於是

$$\sin \theta_2 = \frac{\sin \theta_1}{n} = \frac{\sin \theta_1}{1.33}$$

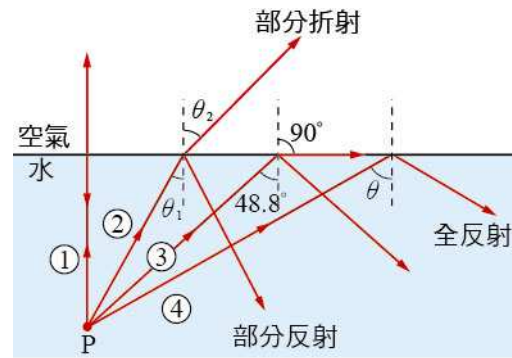
上式可以看出折射角 θ_2 隨入射角 θ_1 的增大而變大，但是 θ_2 有一最大值，即當 θ_1 達到最大值 90° 時， θ_2 亦達到最大值，其正弦值為

$$\sin \theta_2 = \frac{1}{1.33} = 0.752$$

可得最大的折射角為 48.8° 。



▲圖 4-46 當光從空氣進入水中時，光在界面處產生部分反射和部分折射的現象。折射角 θ_2 隨入射角 θ_1 的增大而變大。



▲圖 4-47 光從水中發出，射向空氣中時，由於折射角大於入射角，入射角達到 48.8° 時，折射角會成為 90° 。入射角大於 48.8° 時，光線不能進入空氣，此即全反射現象。

反過來，光從水中進入空氣時，如圖 4-47 所示，折射角較入射角大，折射線偏離法線。若入射角恰等於 48.8° ，則折射角成為 90° ，即折射光線沿水面傳播。當入射角大於 48.8° 時，光線無法進入空氣中，這時光線將依照反射定律全部反射回水中，此現象稱為**全內反射**（total internal reflection），簡稱為**全反射**。

2. 臨界角

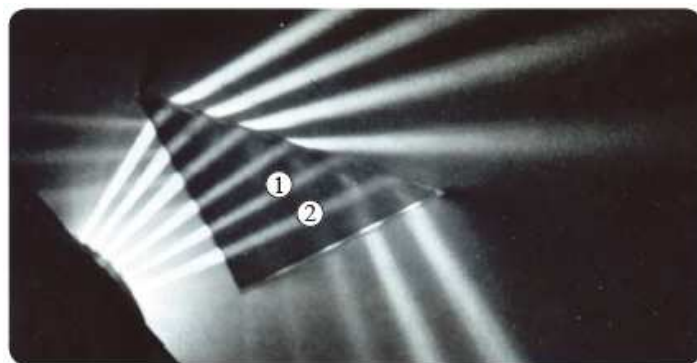
光從光密介質進入光疏介質時，使折射角成為 90° 的入射角稱為臨界角 (critical angle)，記為 θ_c 。以光自水進入空氣為例，參考圖 4-47，圖中的入射角 48.8° ，即為臨界角 θ_c 。

若光密介質和光疏介質的折射率分別為 n_1 和 n_2 ($n_1 > n_2$)，則 $n_1 \sin \theta_c = n_2 \sin 90^\circ$ ，故

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

4-8 式

圖 4-48 為光線的路徑照片。光自左下方射入三稜鏡後，自稜鏡射出空氣時，圖中光線①與②的入射角大於臨界角，故無進入空氣的折射線，光線全部反射回稜鏡，成為全反射。



▲圖 4-48 光自左下方射入三稜鏡後，自稜鏡射出空氣時，圖中光線①與②為全反射。

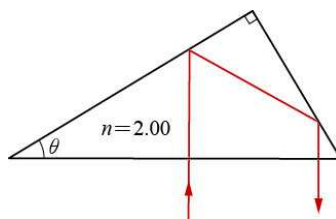


反射線和折射線的強度

光從一介質進入另一介質時，通常反射線和折射線的強度並不相等，而與兩介質的折射率以及入射角有關。經由較深的理論可以計算出反射線和入射線的強度。若入射角增加，則反射光的強度隨之逐漸增強，而透射光會逐漸減弱；若光以等於或大於臨界角入射時，則入射光全部反射回原介質中。

範例 4-8

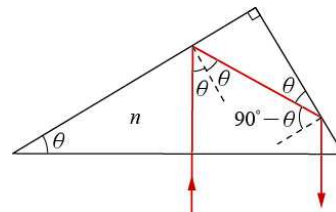
如圖 4-49 所示的直角三稜鏡，是由折射率為 2.00 的透明物質所製成，其邊角之一為 θ ，入射光的方向垂直於斜邊。試問



▲圖 4-49 光線自垂直於稜鏡底邊的方向進入，經兩次全反射後垂直斜邊射出。

- (1) θ 角在什麼範圍內，入射光才會經由兩次的全反射而從斜邊射出？
- (2) 若整個稜鏡浸入折射率為 1.50 的透明液體中，則上一問題的答案為何？

[解答] (1) 參考圖 4-50，因入射光線垂直射入三稜鏡的斜邊，故折射時無偏折。光行進至稜鏡的直角邊時發生全反射，此時的入射角等於 θ 。若欲產生全反射，則 θ 必須大於臨界角 θ_c ，即



▲圖 4-50

$$\sin \theta > \sin \theta_c = \frac{1}{n} = \frac{1}{2.00} \quad \theta > 30.0^\circ$$

又當光線行進至另一直角邊時，入射角為 $90^\circ - \theta$ 。若欲發生全反

$$\text{射，則須} \quad \sin(90^\circ - \theta) > \sin \theta_c = \frac{1}{2.00}$$

$$90^\circ - \theta > 30.0^\circ, \text{ 即 } \theta < 60.0^\circ$$

所以 θ 的範圍為 $30.0^\circ < \theta < 60.0^\circ$ 。

- (2) 若稜鏡外面為折射率 1.50 的液體，則第一次全反射的條件為

$$\sin \theta > \sin \theta_c = \frac{1.50}{2.00} = 0.750 \quad \sin \theta > 0.750, \text{ 或 } \theta > 48.6^\circ$$

第二次全反射的條件為

$$\sin(90^\circ - \theta) > \sin \theta_c = 0.750 \quad \cos \theta > 0.750, \text{ 或 } \theta < 41.4^\circ$$

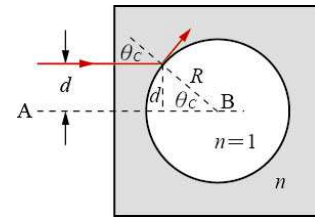
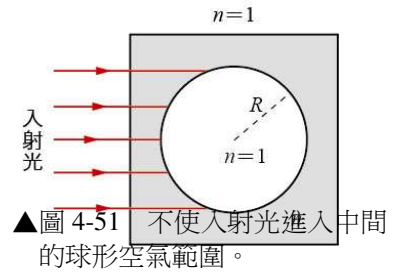
以上兩式要同時成立是不可能的，這表示 θ 不存在，

即入射光不可能經由兩次的全反射而從斜邊射出。

範例 4-9

圖 4-51 中，一正立方體透明介質的折射率為 n ，其內部有一半徑為 R 的球形空氣範圍。圖中平行光線以垂直於立方體左側的方向入射。為了不使光線進入中間的球形空氣範圍，入射光線必須在某一範圍之外，求此範圍的半徑。

[解答] 若不使光線進入中間的球形空氣範圍，則光線射至空洞邊緣時，必須發生全反射。參考圖 4-52， AB 為通過球心的光線，與 AB 距離愈遠的光線，射至空洞邊緣時的入射角愈大。當入射角大到成為臨界角 θ_c 時，光線就無法進入空洞了。設入射角為臨界角的光線與 AB 線的距離為 d ，而與 AB 線的距離小於 d 的入射光線，就會進入空洞。故入射光線需避開以 d 為半徑的圓形區域

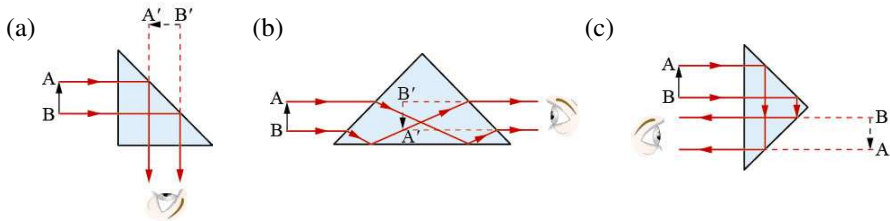


▲圖 4-52

$$\begin{aligned} \text{因為 } \sin \theta_c &= \frac{1}{n} \text{ 且由圖可看出 } \sin \theta_c = \frac{d}{R}, \text{ 故 } \frac{d}{R} = \frac{1}{n}, \text{ 可得半徑 } d \\ &= \frac{R}{n}. \end{aligned}$$

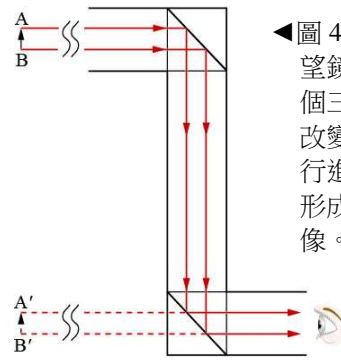
3.全反射的應用

玻璃的折射率約為 1.5，其與空氣界面的臨界角約等於 42° ，因此當光從玻璃中射向空氣時，若入射角為 45° ，則光將在玻璃和空氣的界面處發生全反射。我們可藉此利用如圖 4-53 所示的三稜鏡，來改變光線行進的方向，或使看到的物體變為倒立。



▲圖 4-53 利用三稜鏡，可以(a)改變光線行進的方向，(b)使看到的物體變為倒立，(c)同時改變光線行進的方向，使看到的物體變為倒立。

如圖 4-54 所示潛艇所用的潛望鏡內有兩個三稜鏡，用於改變光線行進的方向。水面上的物體，如圖中的 AB，在潛望鏡中所見者為正立的虛像 A'B'。



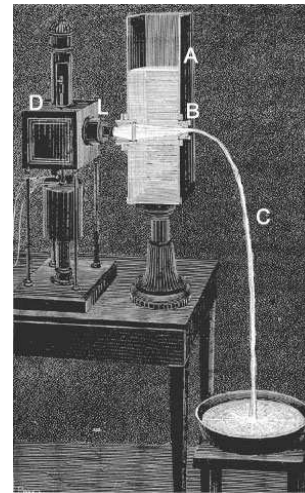
◀圖 4-54 潛望鏡利用兩個三稜鏡來改變光線的行進方向，形成正立的像。



想一想

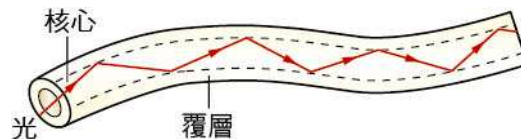
圖 4-54 中的潛望鏡使用了兩個等腰直角三稜鏡。若改為兩個一般的平面鏡來反射光線，效果有何不同？

1854 年英國人廷得（John Tyndall, 1820 - 1893）在英國皇家協會的一次演講中，在所有成員的面前，展示類似圖 4-55 的裝置，利用光的全反射原理，使得光線在水柱中彎曲。圖中 A 為裝有水的水槽，B 處有一小孔可以讓水流出。D 為光源裝置，光束從 L 射出，進入 B 孔的水流。光進入水流後，欲射出空氣時，由於入射角大於臨界角，形成全反射而沿著水柱行進。



▲圖 4-55 利用光的全反射原理，使光線在水柱中彎曲的實驗裝置。

光纖（optical fiber）就是類似的應用，如圖 4-56 所示。光纖是細如頭髮的玻璃纖維，內有核心，外面由覆層包住，核心的折射率較覆層大。當光射入核心後，由於全反射，光被限制在核心內部，沿著光纖的長度方



▲圖 4-56 光利用全反射在可彎曲的光纖內行進。

向傳播前進。光纖可應用於醫療診病用的內視鏡（endoscope），以及光纖通訊等。

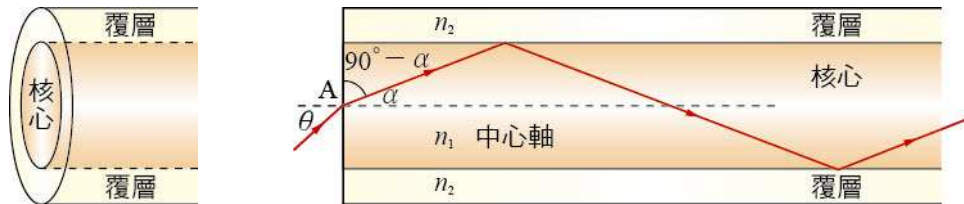
其實光纖在通訊上實際應用的構想最早由華裔科學家高錕（1933-，圖 4-57）首先提出，他認為可以利用纖維材料利用全反射來傳遞光束，並作深入的研究且獲致實質的成果，導致今天光纖廣泛的運用在許多領域。高錕被譽為光纖通訊之父，並且由於此偉大的成就獲得 2009 年諾貝爾物理學獎。



▲圖 4-57 高錕。

◎範例 4-10

圖 4-58(a)為光纖的外觀示意圖，(b)為剖面圖， n_1 和 n_2 分別為核心和覆層物質的折射率（ $n_1 > n_2$ ）。欲使光線自空氣中以入射角 θ 進入纖芯後，依靠全反射傳遞，則 $\sin \theta$ 有何限制？



▲圖 4-58 (a)光纖的結構示意圖；(b)為剖面圖。

[解答] 光線從圖 4-58(b)圖中的 A 點進入核心時，設折射角為 α ，則由折射定律可得

$$\sin \theta = n_1 \sin \alpha \quad \text{即} \quad \sin \alpha = \frac{\sin \theta}{n_1} \quad (1)$$

光線進入核心後，在核心和覆層的界面處作全反射，每次的入射角皆等於 $(90^\circ - \alpha)$ ，必須大於臨界角 θ_c ，即

$$\sin (90^\circ - \alpha) > \sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad \text{即} \quad \cos \alpha > \frac{n_2}{n_1} \quad (2)$$

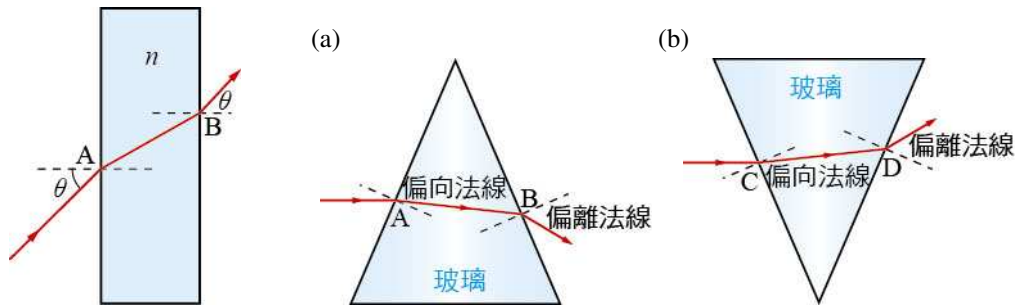
由上①②兩式可得 $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha > \left(\frac{\sin \theta}{n_1}\right)^2 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2$

故得 $\sin \theta$ 的限制為 $\sin \theta < \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$

4-5 薄透鏡

由本章範例 4-7 可以知道光從空氣由介質的一邊進入，從另一邊射出，如果這兩邊互相平行，則進入和射出的光線會互相平行，如圖 4-59 所示。如果兩邊不平行，則情況有何不同呢？

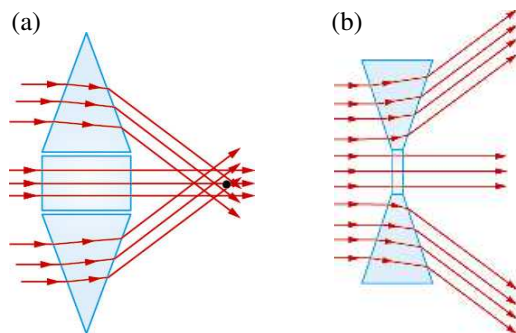
考慮圖 4-60(a)中，光線從左方自 A 點入射至玻璃製成的稜鏡，進入稜鏡的光線偏向法線，光線行進至 B 點時，若此時入射角小於臨界角，則進入空氣的光線將偏離法線。亦即光線自圖中穿過稜鏡後會往下方偏。若將稜鏡倒置如圖 4-60(b)，則光線自圖中穿過稜鏡後會往上方偏。



▲圖 4-59 光從兩邊平行的界面之一邊射入，從另一邊射出時，射入和射出的兩光線互相平行。

▲圖 4-60 (a)光線穿過稜鏡後會往下方偏；(b)將稜鏡倒置，光線穿過稜鏡後會往上方偏。

如果把圖 4-60 中的兩個稜鏡上下擺置，其間安插同材質的另一矩形介質，則此一組合對於入射的平行光大致有會聚的作用，如圖 4-61(a)所示。若組合成圖 4-61(b)，則有發散的作用。如果把兩圖中的稜鏡分



◀圖 4-61 將圖 4-60 的兩稜鏡，再加一片同材質的矩形介質，組合成圖(a)，對於平行光有會聚的作用；若組合成圖(b)則對於平行光有發散的作用。

成多片邊緣傾斜程度連續改變的細稜鏡，則會聚或發散的效果會更好。圖 4-62(a)和(b)分別為兩片和四片稜鏡再加一片平透明鏡的會聚效果。而應用非常廣泛的透鏡，即源自於此種想法，作法是將前後兩個面做成圓滑而非平直的形狀，通常是取球面的一部分，成為球面透鏡，如圖 4-62 圖所示。利用透鏡的聚光成像或發散作用，可以製作許多光學儀器。

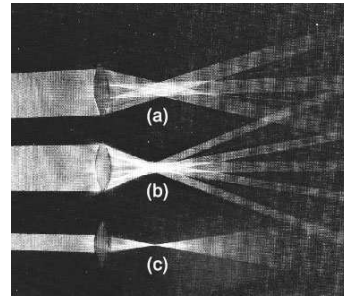


圖 4-62 (a)兩片稜鏡加一片平透明鏡的會聚效果；(b)四片稜鏡加一片平透明鏡的會聚效果更好；(c)若兩面為球面的一部分，成為球面透鏡。



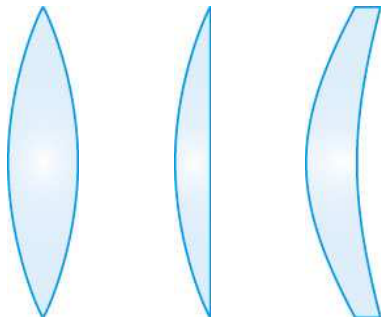
想一想

如果圖 4-61 的兩個裝置，放在折射率較本身大的液體中，則對於平行的入射光，其會聚或發散的效果會改變嗎？

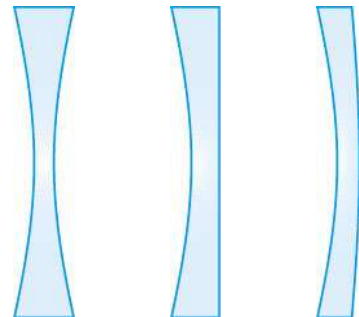
1. 薄透鏡

將玻璃或透明塑膠等物體磨成兩面體，一面為球面，另一面為球面或平面，即成為球面透鏡。透鏡一般分為凸透鏡和凹透鏡兩類：

1. 中央部分較邊緣部分厚者，稱為**凸透鏡**（convex lens）。凸透鏡依其截面形狀可分為雙凸透鏡、平凸透鏡和凹凸透鏡三種，在空氣中可以會聚光線，也稱為**會聚透鏡**（converging lens），如圖 4-63 所示。



▲圖 4-63 凸透鏡的種類：
(a)雙凸透鏡；(b)平凸透鏡；(c)凹凸透鏡。

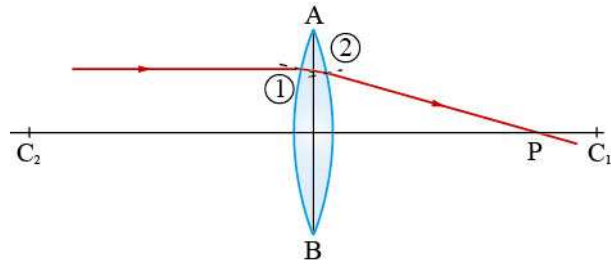


▲圖 4-64 凹透鏡的種類：
(a)雙凹透鏡；(b)平凹透鏡；(c)凸凹透鏡。

2. 若透鏡的中央部分較邊緣部分薄者，稱為**凹透鏡**（concave lens），在空氣中可以發散光線，也稱為**發散透鏡**（diverging lens）。凹透鏡依其截面形狀可分為雙凹透鏡、平凹透鏡和凸凹透鏡三種，如圖 4-64 所示。

現以雙凸透鏡為例來說

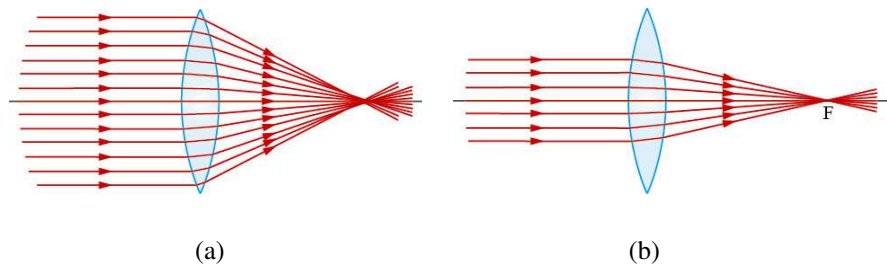
明凸透鏡對平行入射光線的會聚性能。如圖 4-65 所示，兩球面的球心分別為 C_1 和 C_2 ，通過兩球心的直線稱為**主軸**。平行於主軸



▲圖 4-65 與主軸平行的光線通過透鏡時經兩次折射而偏向主軸。

的單色光線入射透鏡的第一個球面①時，其折射线偏向法线，但从第二个球面②射出时，则偏离法线，因此使得从透镜射出的光线会和主軸相交於某一點 P。

在圖 4-66 中，若平行於主軸的入射光線離開主軸太遠，會使得平行於主軸的入射光通過透鏡後未能交於一點，只有靠近主軸的光線才能會聚於一點，此點稱為**焦點 F**，這情況與本章第二節所提球面鏡的反射類似，而圖 4-62(c)的照片顯示平行於主軸的近軸光線能會聚於一點。

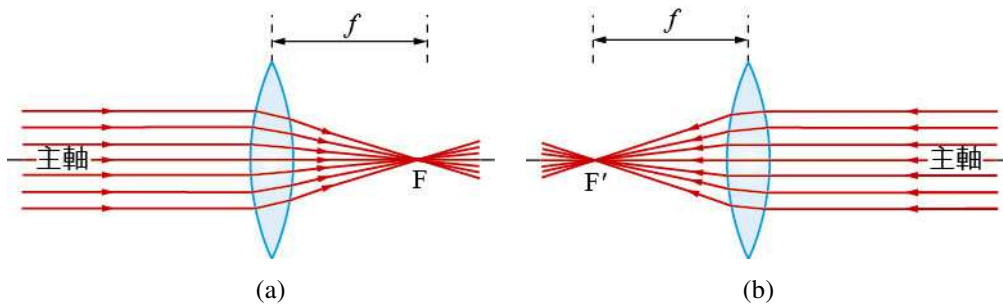


▲圖 4-66

- (a) 若平行於主軸的入射光線離開主軸太遠，會使得平行於主軸的入射光通過透鏡後未能交於一點；
- (b) 靠近主軸的平行光線經凸透鏡會聚於主軸上的一點 F，稱為焦點。

焦點 F 至透鏡中心 O 的距離稱為**焦距** f ，如圖 4-67(a)所示，本章將僅限於近軸光線的情形作討論。

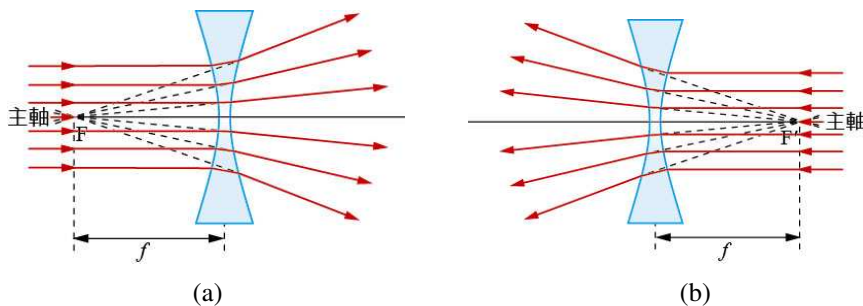
如圖 4-67(b)所示，若平行於主軸的光線從凸透鏡的右側入射，則光線通過透鏡後在左側也可會聚於一點，此為另一焦點 F' ，焦距同為 f 。



▲圖 4-67

- (a) 平行於主軸的光線從凸透鏡左側入射，經透鏡後會聚於右側的焦點；
- (b) 若光線從右側入射，則會聚於左側的焦點，兩側之焦距相等。

雙凹透鏡的折射情形如圖 4-68(a)所示，平行於主軸的近軸光線從凹透鏡左側入射，經兩次折射後，從透鏡射出。每一次的折射皆使折射光線偏離主軸，因此形成發散的光線。但是這些發散光線的反方向延長線，則會聚在同一點，稱為**虛焦點** F ，有時也簡稱焦點；虛焦點至透鏡體中心的距離即為焦距 f 。若平行光由右方入射，如圖 4-68(b)所示，則虛焦點 F' 在透鏡的右側，焦距同為 f 。



▲圖 4-68

- (a) 平行於主軸的光線從凹透鏡左側入射，經透鏡後光線發散，這些發散光線的反方向延長線可會聚於主軸上左側的虛焦點；
- (b) 若光線從右側入射，則虛焦點在右側。

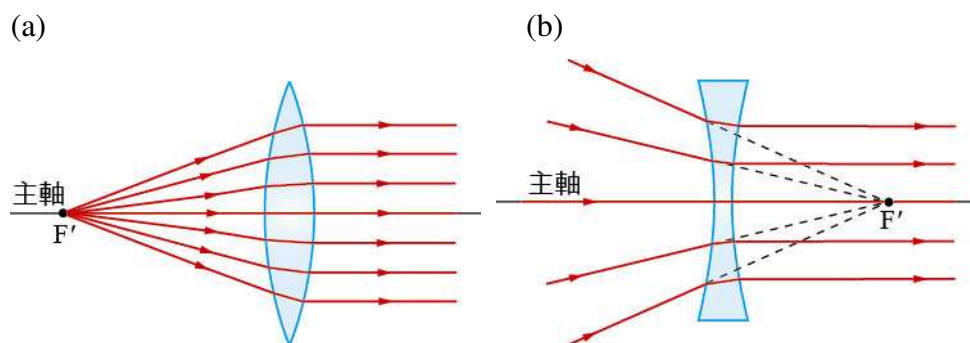
凸透鏡或凹透鏡的左右兩邊的主軸上各有一個焦點，即使透鏡兩面的曲率半徑不一樣，兩邊的焦距仍然相等。焦距的長短與透鏡材質的折射率、兩球面的曲率半徑、以及透鏡周圍的介質折射率有關。



想一想

1. 若一雙凸透鏡的折射率和周圍介質的折射率完全相同，則平行於主軸的入射光經過透鏡後其行進方向會偏折嗎？此時，透鏡的焦距可視為多少？
2. 參考圖 4-65，一雙凸透鏡的折射率為 n_1 ，周圍介質的折射率為 n_2 （註： $n_1 > n_2$ ）。 n_1 和 n_2 相差很大和相差很小，哪一種情況對於入射光的偏向作用較明顯？哪一種情況下透鏡的焦距較長？

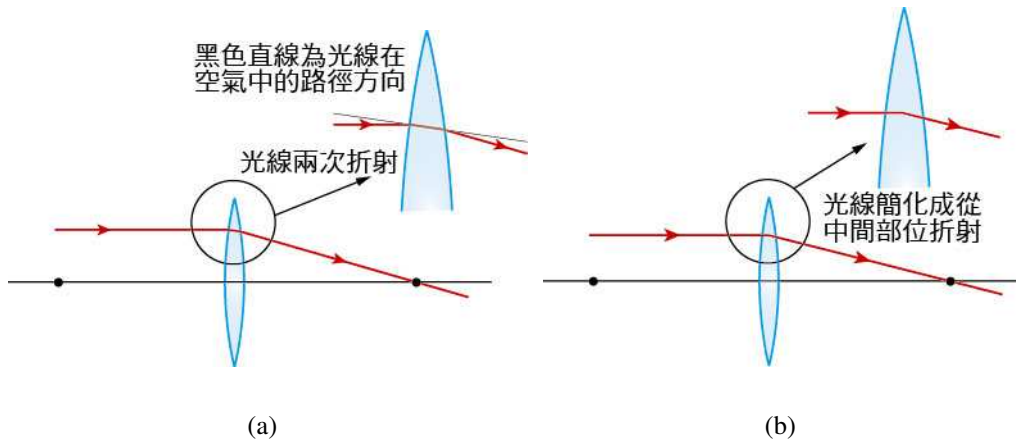
根據光路徑的可逆性，置於凸透鏡焦點的點光源所發出的光線，經透鏡折射後的光線平行於主軸。對凹透鏡來說，若入射光線指向凹透鏡後焦點，則經凹透鏡折射後的光線平行於主軸，如圖 4-69(a)和(b)所示。



▲圖 4-69

- (a) 置於焦點的點光源所發出的光線經凸透鏡折射後平行於主軸；
- (b) 指向凹透鏡後焦點的入射光線，經凹透鏡折射後平行於主軸。

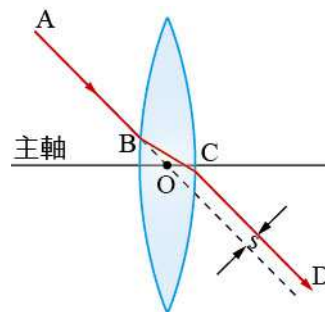
如果透鏡的厚度較其兩面的曲率半徑小很多，則其厚度可以略去，造成的誤差並不大，但在處理光線行進路徑時較為容易多了。例如圖 4-70(a)中，光線從進入透鏡至射出，共經兩次折射，如果透鏡的厚度很薄可以忽略，則可以簡化成只在透鏡的中間部位就折射一次，如圖 4-70(b)所示。此種透鏡稱為**薄透鏡**（thin lens）。



▲圖 4-70

- (a)光線入射透鏡，經兩次折射後從透鏡射出；
- (b)因透鏡的厚度較其鏡面的曲率半徑小很多，可以簡化成從透鏡的中間部位就折射一次。

如圖 4-71 所示，沿 AB 方向指向透鏡中心 O 點の入射光線，經透鏡折射後沿 CD 方向射出。若光線の入射點 B 接近主軸，則由於透鏡中央的部分近似於一塊平行玻璃板，所以射出光線幾乎平行於入射光線，但兩者之間有一橫向位移 s 。在薄透鏡的情況下，此橫向位移 s 很小，可以忽略，即 AB 和 CD 幾乎成一直線。所以指向薄透鏡中心的光線，直接通過透鏡射出，不發生偏移。在以下有關透鏡成像的討論中，皆就薄透鏡而言。

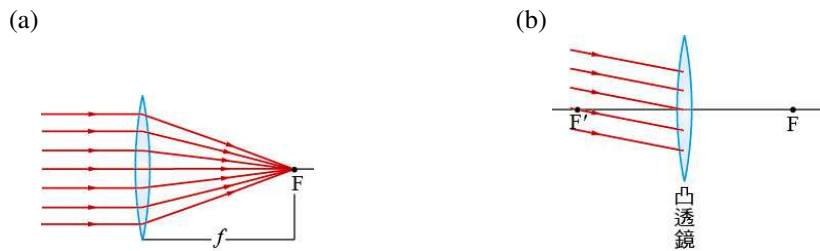


▲圖 4-71 指向鏡心 O 點の入射光，若入射點接近主軸，則經透鏡折射後射出的光線有橫向位移 s 。在薄透鏡的情況下，橫向位移可以忽略。



想一想

平行於凸透鏡主軸的入射線經透鏡折射後會聚於焦點，如圖 4-72(a)所示；如果這些平行光不與主軸平行，如圖 4-72(b)所示，則經透鏡折射後應會聚在哪裡呢？

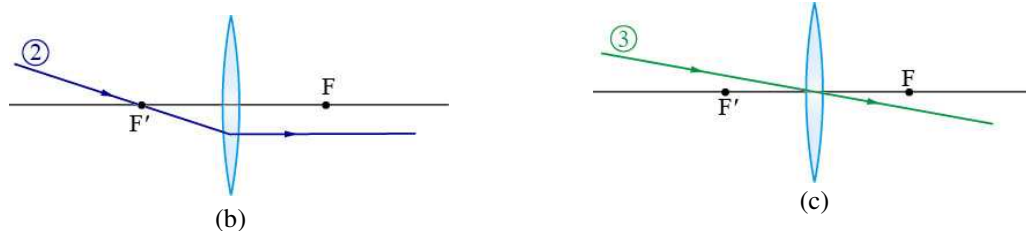


▲圖 4-72 (a)平行於主軸的入射線經凸透鏡折射後會聚於焦點；(b)與主軸不平行的入射線會聚在哪裡呢？

2. 凸透鏡成像

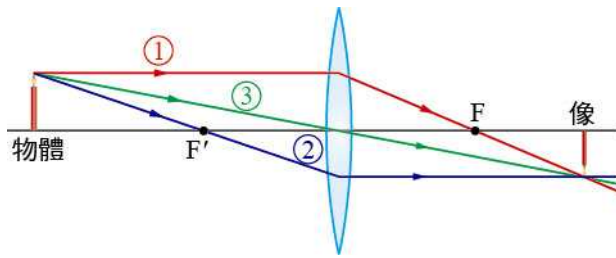
置於薄透鏡前的物體可經由透鏡的折射成像，其所成像的位置、大小和性質可利用作圖法來決定。綜合前面所述，有下述三條主要的光線常用以作圖求像

1. 平行於凸透鏡主軸的入射光線，折射後通過鏡後的焦點，如圖 4-73(a)中所標示①的光線。
2. 通過凸透鏡前焦點的入射光線，折射後平行於主軸，如圖 4-73(b)中所標示②的光線。
3. 通過鏡心的入射線，直接通過透鏡，沒有偏移，如圖 4-73(c)中所標示③的光線。



▲圖 4-73 (a)平行於凸透鏡主軸的入射線，折射後通過鏡後的焦點，如標示①的光線；(b)通過凸透鏡前焦點的入射線，折射後平行於主軸，如圖②中所標示的光線；(c)通過鏡心的入射線，直接通過透鏡，沒有偏移，如圖中所標示③的光線。

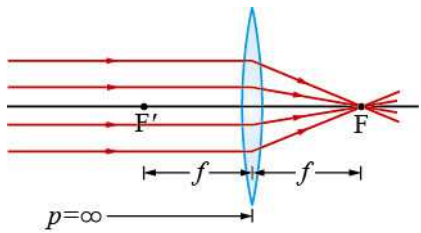
置於凸透鏡前物體的某一點發出的光線中，上述三條特殊光線的路徑容易繪出，其交點（或延長線的交點）就是此點成像的位置，如圖 4-74 所示。



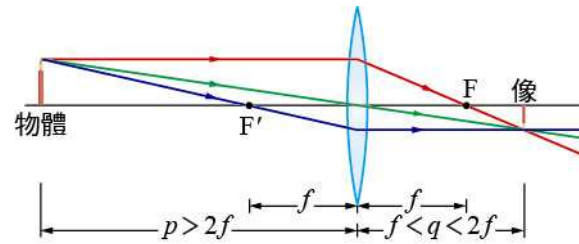
▲圖 4-74 利用三條路徑容易決定的光線，可以得到成像的位置。

而實際作圖求像時，僅需適當選取上述三條主要光線的兩條即可。

下面就物體所在位置的不同，分別討論凸透鏡成像情形。物體與透鏡的距離稱為物距，以 p 表示；像與透鏡的距離稱為像距，以 q 表示。



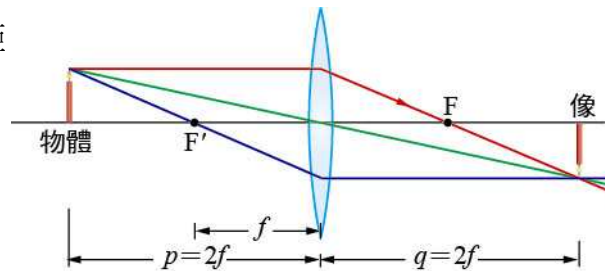
▲圖 4-75 物體置於無窮遠處，成像於鏡後焦點處。



▲圖 4-76 物體位於凸透鏡前兩倍焦距以外，成像於鏡後焦點和兩倍焦距位置之間，為縮小的倒立實像。

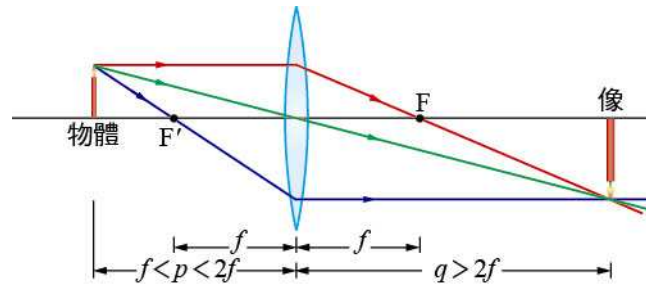
1. 物體位在無窮遠處，入射線可視為均與主軸平行，故成像於焦點 F 處，如圖 4-75 所示。
2. 物體位於鏡前兩倍焦距以外，成像於鏡後焦點和兩倍焦距位置之間，為一縮小的倒立實像，如圖 4-76 所示。
3. 物體剛好位在兩倍焦距

處，成像於鏡後兩倍焦距的位置，為一大小相同的倒立實像，如圖 4-77 所示。



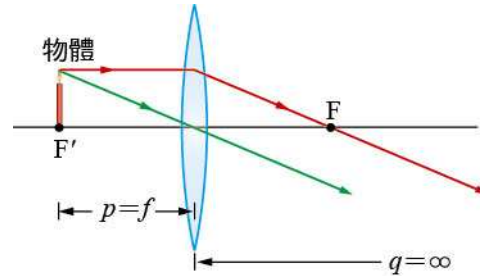
▲圖 4-77 物體位在兩倍焦距處，成像於鏡後兩倍焦距的位置，為一大小相同的倒立實像。

4. 物體位於鏡前焦點和兩倍焦距位置之間，成像於鏡後兩倍焦距以外，為一放大的倒立實像，如圖 4-78 所示。
5. 物體置於焦點上，此時經透鏡折射後的射出光線互相平行，成像於無窮遠處，如圖 4-79 所示。



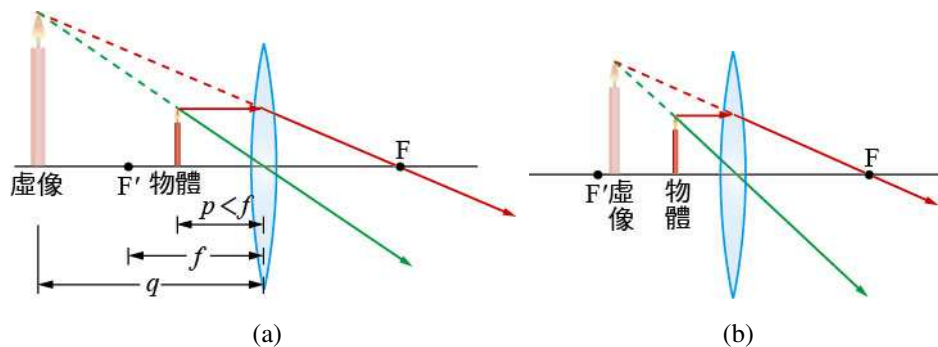
▲圖 4-78 物體位於鏡前焦點和兩倍焦距位置之間，成像於鏡後兩倍焦距以外，為一放大的倒立實像。

6. 物體位於鏡前焦點和透鏡之間，如圖 4-80(a)所示，經透鏡折射後射出的光線無法會聚成實像，但這些射出光線的反方向延長線可在鏡前會聚成一正立的



▲圖 4-79 物體置於焦點上，成像於無窮遠處。

放大虛像。若物體愈接近透鏡，所成的虛像也愈接近透鏡，且愈小（仍較原物體為大），如圖 4-80(b)所示。

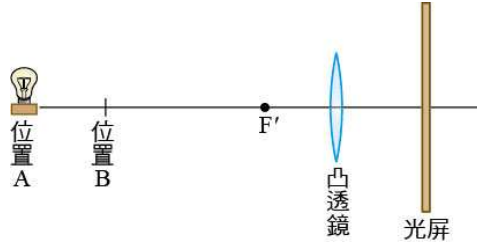


▲圖 4-80 (a)物體位於鏡前焦點和透鏡之間，在鏡前形成一放大的正立虛像；(b)物體的位置愈靠近透鏡，所成的虛像愈小（仍較原物體為大），且愈接近透鏡。



想一想

1. 幾位同學取一凸透鏡、光源和光屏來觀察凸透鏡成像的情形，裝置如圖 4-81 所示。他們發現將光源放在位置 A 時，光屏上可以呈現倒立的像（即可看到銳利清晰的像）。他們想預測，若將光源改放在位置 B，結果會怎樣呢？（注意：圖中各位置之間的距離比例是正確的）



▲圖 4-81 觀察凸透鏡成像

甲同學說：光屏上不可能有清晰的像呈現出來。

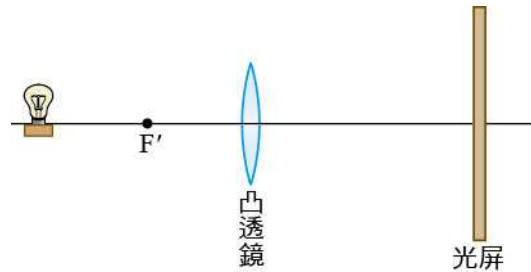
乙同學說：光屏可能呈現對原物體而言為放大正立的像。

丙同學說：若也將光屏向右移動到某位置，則有可能呈現對原物體而言為放大的倒立像。

丁同學說：若也將光屏向右移動到某位置，如果可以成像的話，此像對原物體而言為放大的正立像。

你想，誰說的是對的呢？

2. 接著這幾位同學把光源和光屏之間的距離固定為某一距離。將凸透鏡放在兩者之間的正中央，如圖 4-82 所示。他們發現剛好在光屏上呈現清晰的像。他們想先預測，再動手來觀察：如果只移動凸透鏡的位置，光屏上會有清晰的像嗎？



▲圖 4-82 再次觀察凸透鏡成像

甲同學說：No way!

乙同學說：如果把透鏡像左移動，光屏有可能出現放大的像。

丙同學說：如果乙同學所說是對的，則所成的像一定是倒立的實像。

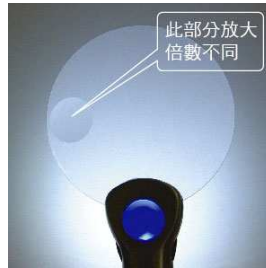
丁同學說：其實，光屏上出現放大或縮小的像都有可能，但要知道怎樣移動才能判定。

你想，誰說的是對的呢？

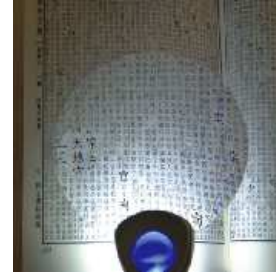


想一想

圖 4-83(a)為一市售的放大鏡，有兩種不同的放大倍數；圖 4-83(b)是用來看書的實際情形。請問圖 4-83(a)中標出的一小區域較其他部位凸出來還是凹進去？又，此部位的焦距較大還是較小？



(a)



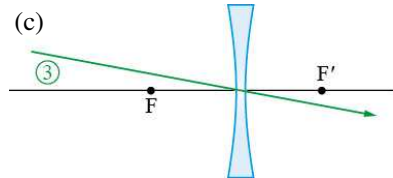
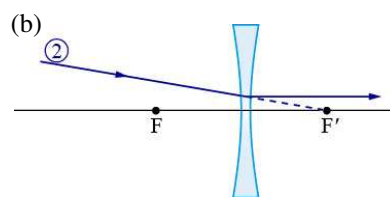
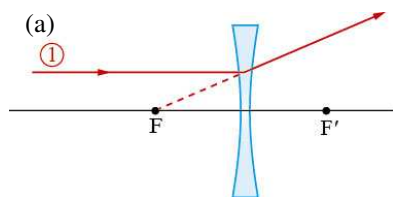
(b)

▲圖 4-83 (a)一市售的放大鏡，有兩種放大倍數；
(b)實際使用舉例。

3. 凹透鏡成像

與凸透鏡作圖成像類似，物體經凹透鏡成像時也可以利用三條特殊的光線：

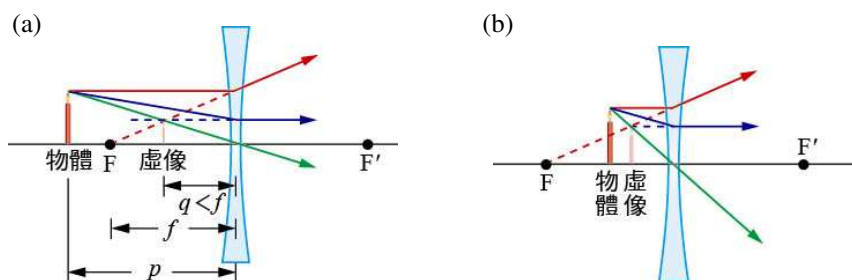
1. 平行於凹透鏡主軸的入射線，折射後偏離法線，其反方向的延長通過鏡前的虛焦點，如圖 4-84(a)中標示①的光線。
2. 指向凹透鏡後虛焦點的入射線，折射後平行於主軸，如圖 4-84(b)中所標示②的光線。
3. 指向鏡心的入射線，直接通過透鏡，沒有偏移，如圖 4-84 圖中所標示③的光線。



▲圖 4-84

(a)平行於凹透鏡主軸的入射線，折射後偏離法線，其反方向的延長通過鏡前的虛焦點，如標示的光線；(b)指向凹透鏡後虛焦點的入射線，折射後平行於主軸，如圖中所標示的光線；(c)指向鏡心的入射線，直接通過透鏡，沒有偏移，如圖中所標示的光線。

若將物體置於凹透鏡前，利用前述成像法則，發現僅能在鏡前成一縮小的正立虛像，如圖 4-85(a)所示，物體愈接近透鏡，成像位置也愈接近透鏡，所形成的虛像愈大（仍較原物體為小），如圖 4-85(b)所示。



▲圖 4-85 (a)物體置於凹透鏡前，在鏡前焦點內形成縮小的正立虛像；(b)物體愈接近透鏡，成像位置也愈接近透鏡，所形成的虛像愈大（仍為縮小）。



想一想

物體經透鏡所成的實像或虛像，都可以看到嗎？觀察時有何不同之處？

4.透鏡成像公式

物體經透鏡折射成像雖然有各種不同的情形，其實可以歸納為一公式，物距 p 、像距 q 和透鏡的焦距 f ，三者之間的關係和上一節討論的面鏡成像公式很類似，即

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

4-9 式

上式中，物距 p 為正值；成實像時， q 取正值，成虛像時， q 取負值；與面鏡成像不同的是，凸透鏡的焦距 f 取正值，而凹透鏡的焦距 f 取負值。或者說，利用此公式算出的像距為正的時候，則所成的像為實像；算出的像距為負的時候，則所成的像為虛像。而算出的焦距為正的時候，表示此透鏡為凸透鏡；算出的焦距為負的時候，表示此透鏡為凹透鏡。（此公式的推導參考第 204 頁延伸閱讀）

若物體的高度為 h_0 ，像的高度為 h_i ，則像的放大率為 $M = \frac{h_i}{h_0}$ 。

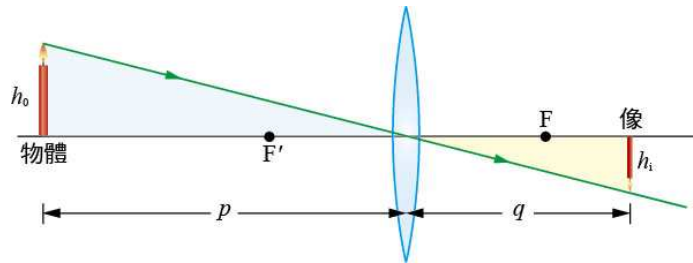
與面鏡成像時相同，物體或所成的像在主軸上方時，其高度 h_o 或 h_i 取正值；反之，在主軸下方時，其高度 h_o 或 h_i 取負值。以凸透鏡成像為例，在圖 4-86 中，兩著色三角形相似，其對應邊長成比例，可得

$$\frac{-h_i}{h_o} = \frac{q}{p}$$

故像的放大率 M 也可寫成

$$M = -\frac{q}{p} \quad \text{4-10 式}$$

放大率為正時，表示成正立虛像；放大率為負時，則為倒立實像。又， $|M| > 1$ 時，表示為放大的像； $|M| < 1$ 時，則為縮小的像。



▲圖 4-86 由圖中兩著色三角形相似，可得像的放大率為 $M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{q}{p}$

範例 4-11

一小物體置於焦距為 0.20 m 的凸透鏡主軸上，若物體和透鏡的距離為(1) 0.30 m 和(2) 0.15 m，求像的位置和性質。

[解答] (1) 由作圖可得成像如圖 4-87 所示。

$$f = 0.20 \text{ m}, p = 0.30 \text{ m},$$

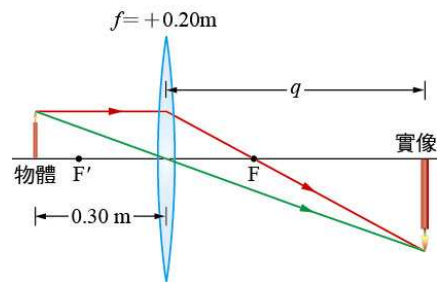
由薄透鏡成像公式得

$$\frac{1}{0.30\text{m}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{0.20\text{m}}$$

解得 $q = 0.60 \text{ m}$ ，放大率為：

$$M = -\frac{q}{p} = -\frac{0.60\text{m}}{0.30\text{m}} = -2.0$$

像的位置在鏡後 0.60 m 處，為一放大兩倍的倒立實像。



▲圖 4-87

(2) 由作圖可得成像如

圖 4-88 所示。

$$f = 0.20 \text{ m},$$

$$p = 0.15 \text{ m},$$

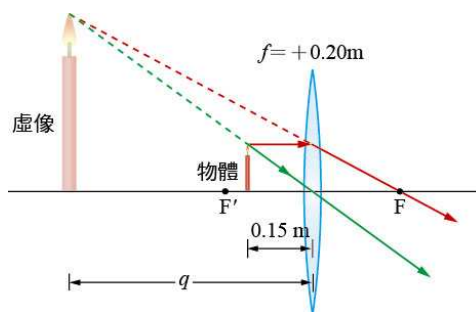
由薄透鏡公式得

$$\frac{1}{0.15 \text{ m}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{0.20 \text{ m}}$$

解得 $q = -0.60 \text{ m}$ ，放大率為

$$M = -\frac{q}{p} = -\frac{-0.60 \text{ m}}{0.15 \text{ m}} = 4.0$$

像的位置在鏡前 0.60 m 處，為一放大四倍的正立虛像。



▲圖 4-88

◎範例 4-12

一小物體長 10 cm，直立置於焦距為 0.20 m 的凹透鏡主軸上，與透鏡之間的距離為 0.30 m，求像的位置和長度。

[解答] 由作圖可得成像如圖 4-89 所示。

圖中，凹透鏡的焦距取負值，由透鏡成像公式得

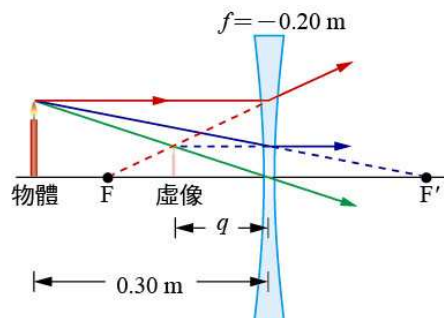
$$\frac{1}{0.30 \text{ m}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{-0.20 \text{ m}}$$

解得 $q = -0.12 \text{ m}$ ，因 q 為負值，

故成虛像於鏡前，其放大率為

$$M = -\frac{q}{p} = -\frac{-0.12 \text{ m}}{0.30 \text{ m}} = 0.40$$

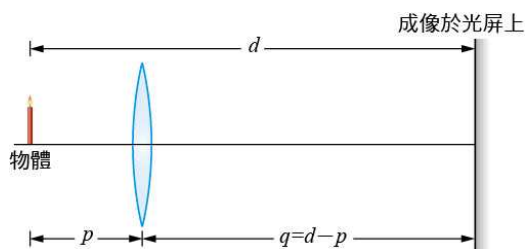
因 M 為正值，故像為正立，像的長度為 $10 \text{ cm} \times 0.40 = 4.0 \text{ cm}$ 。



▲圖 4-89

範例 4-13

如圖 4-90 所示，凸透鏡的主軸和光屏垂直，物體置於透鏡的主軸上某處，和光屏之間的距離 d 為 80 cm。焦距 f 為 15 cm 的透鏡，位於物體和光屏之間。試問



▲圖 4-90

(1) 若欲使物體在光屏上成像，

則透鏡應置於何處？所成像的放大率為何？

(2) 若減小物體和光屏之間的距離，則減至多少時，將無法使物體在光屏上成像？

[解答] (1) 設物距為 p ，物體和光屏的距離為 d ，則像距為 $d-p$ ，由薄透鏡公

$$\text{式得 } \frac{1}{p} + \frac{1}{d-p} = \frac{1}{f}$$

$$\text{解得 } p = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 4df}}{2}, \text{ 將已知數據代入得}$$

$$p = \frac{80 \text{ cm} \pm \sqrt{(80 \text{ cm})^2 - 4(80 \text{ cm})(15 \text{ cm})}}{2}$$
$$= \frac{80 \text{ cm} \pm 40 \text{ cm}}{2} = 20 \text{ cm} \text{ 或 } 60 \text{ cm}$$

所以欲使物體成像於光屏上，則透鏡可以選放在兩個位置之一。

若 $p=20 \text{ cm}$ ，則 $q=80 \text{ cm}-20 \text{ cm}=60 \text{ cm}$ ，像的放大率為

$$M = -\frac{60 \text{ cm}}{20 \text{ cm}} = -3, \text{ 為一放大三倍的倒立實像。}$$

若 $p=60 \text{ cm}$ ，則 $q=80 \text{ cm}-60 \text{ cm}=20 \text{ cm}$ ，像的放大率為

$$M = -\frac{20 \text{ cm}}{60 \text{ cm}} = -\frac{1}{3}, \text{ 為一縮小三倍的倒立實像。}$$

(2) 若物體無法在光屏上成像，表示所解出的物距 p 沒有實根，即

$$d^2 - 4df < 0, \text{ 因為 } d > 0, \text{ 故 } d < 4f = 4 \times 15 \text{ cm} = 60 \text{ cm}。$$

若物體和光屏之間的距離小於 60 cm，將無法在光屏上成像。

範例 4-14

如圖 4-91 所示，一焦距為 10 cm 的凹透鏡前主軸上 40 cm 處置一點光源，一擋板緊靠透鏡，中間有直徑 1.0 cm 的孔，主軸通過孔中心，在透鏡後方 16 cm 處的光屏上形成亮圓的直徑有多大？

[解答] 由透鏡成像公式得

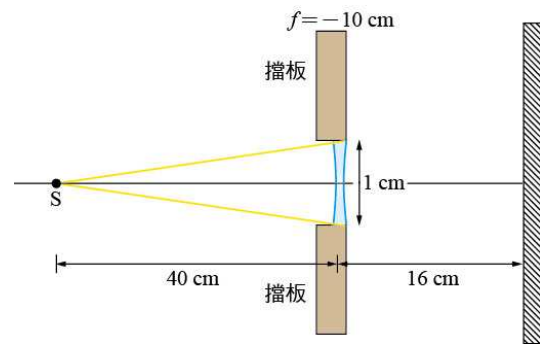
$$\frac{1}{40 \text{ cm}} + \frac{1}{q} = \frac{1}{-10 \text{ cm}}$$

解得 $q = -8.0 \text{ cm}$ ，其位置如圖 4-92 中的 I，即經過透鏡後的光線如同從 I 點發出。由 I 發出的光線從透光部分邊緣的 A 點和 B 點射至光屏上的 C 點和 D 點。

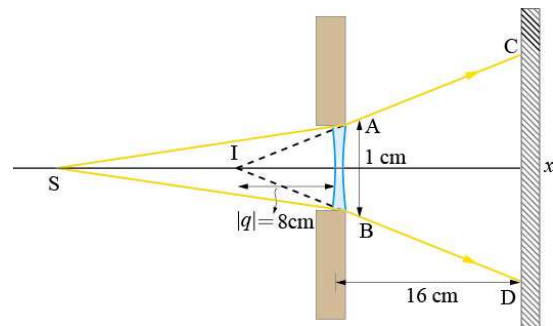
兩三角形 IAB 和 ICD 相似，其對應邊成比例，故

$$\frac{x}{1.0 \text{ cm}} = \frac{16 \text{ cm} + 8.0 \text{ cm}}{80 \text{ cm}}$$

解得亮圓的直徑 x 為 3.0 cm。



▲圖 4-91



▲圖 4-92

5. 透鏡的應用

近視的人要戴眼鏡，遠視眼的人也戴眼鏡。這兩類眼鏡基本上都是透鏡的應用，前者為凹透鏡，後者為凸透鏡，這可說是許多人天天接觸到的透鏡應用。前文已提過，簡單的放大鏡就是凸透鏡，這是利用凸透鏡可以對物體形成放大的正立虛像，直接為人所觀察。若用多個透鏡的組合，則可製作放大倍數更高的放大鏡或顯微鏡。另外，不同透鏡的各種不同組合，還可製成照相機的鏡頭或各式望遠鏡等光學儀器。透鏡在

日常生活或科學研究上可說是應用廣泛，貢獻很大。

透鏡的成像方式

物體經薄透鏡成像時，物距 p 、像距 q 和焦距 f 三者之間存在有一簡單的數學關係。

1. 凸透鏡成實像時

如圖 4-93 所示，設物長和像長分別為 h_o 和 h_i ，並定正立時取正號，倒立時取負

號，則圖中兩個青色的三角形相似，其對應邊長成正比，即 $\frac{-h_i}{h_o} = \frac{f}{p-f}$ ；又圖

中兩個黃色的三角形也相似，

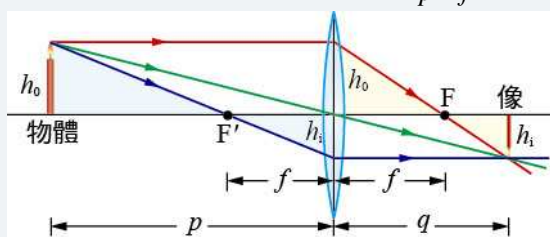
即 $\frac{-h_i}{h_o} = \frac{q-f}{f}$ ，故

$$\frac{-h_i}{h_o} = \frac{f}{p-f} = \frac{q-f}{f}$$

由上式得 $(p-f)(q-f) = f^2$ ，

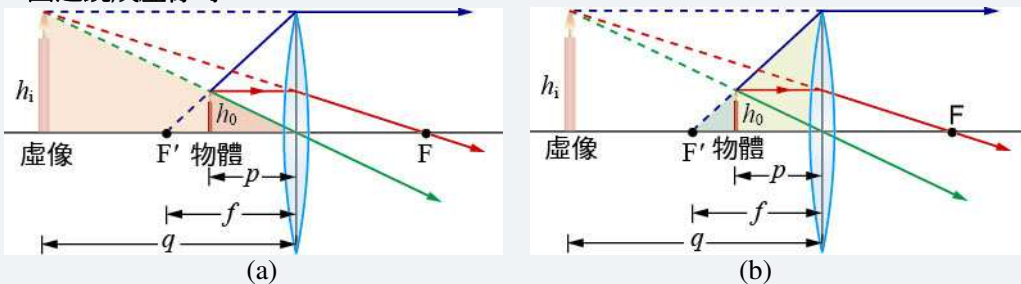
化簡後得

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \text{①}$$



▲圖 4-93 凸透鏡成實像時，圖中的兩黃色三角形相似；兩青色三角形也相似。

2. 凸透鏡成虛像時



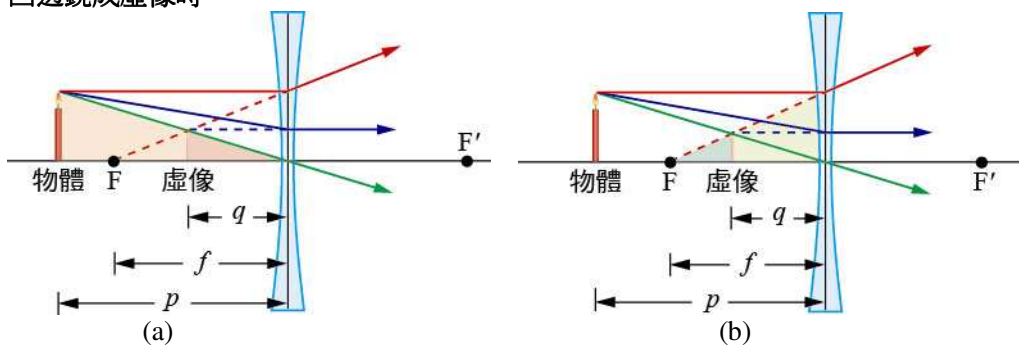
▲圖 4-94 凸透鏡成虛像(a)兩橘紅色三角形相似；(b)兩綠色三角形相似。

如圖 4-94(a)所示，由兩橘紅色三角形相似（顏色較深的小三角形蓋住了大三角形的一部分），對應邊成比例，得 $\frac{h_i}{h_o} = \frac{q}{p}$ 。在圖 4-94(b)中的兩綠色三角形相似（顏色較深的小三角形蓋住了大三角形的一部分），對應邊成比例，得 $\frac{h_i}{h_o} = \frac{f}{f-p}$ 。

故 $\frac{h_i}{h_o} = \frac{q}{p} = \frac{f}{f-p}$

上式可得 $\frac{1}{p} + \frac{1}{-q} = \frac{1}{f} \quad \text{②}$

3. 凹透鏡成虛像時



▲圖 4-95 凸透鏡成虛像(a)兩橘紅色三角形相似；(b)兩綠色三角形相似。

如圖 4-95(a)所示，由兩橘紅色三角形相似（顏色較深的小三角形蓋住了大三角形的一部分），對應邊成比例，得 $\frac{h_i}{h_o} = \frac{q}{p}$ 。在圖 4-95(b)中的兩綠色三角形相似（顏色較深的小三角形蓋住了大三角形的一部分），對應邊成比例，得 $\frac{h_i}{h_o} = \frac{f - q}{f}$ 。故

$$\frac{h_i}{h_o} = \frac{q}{p} = \frac{f - q}{f}$$

上式可得

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{-q} = \frac{1}{-f} \quad \text{③}$$

如果我們規定凸透鏡的焦距為正值，凹透鏡的焦距為負值，成實像時像距為正值，成虛像時像距為負值，則以上三種情況可以統一寫成

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \text{④}$$

此即薄透鏡成像公式。

本章學習重點

Chapter Summary

4-1 拋物面鏡

1. 平行於主軸的光線入射至凹的拋物面鏡，其反射光線必定通過拋物線的焦點。
2. 平行於主軸的光線入射在凸的拋物鏡面，其反射光線的延長線必會聚於鏡後在主軸上的虛焦點。
3. 若將點光源置於拋物面鏡的焦點，則經由鏡面反射的光線必平行於主軸。

4-2 球面鏡

4. 以球面作成的反射面稱為球面鏡，鏡的邊緣與球面中心的夾角稱為孔徑角。孔徑角很小的球面鏡近似於一拋物面鏡，其焦距約為球面曲率半徑的一半。
5. 當物體置於球面鏡前，可利用下列由物體發出的特別光線的反射路徑，以作圖法決定成像的位置、大小和性質：
 - (1) 平行於主軸的入射線，其反射線（或反射線的反方向延長線）通過焦點。
 - (2) 方向通過焦點的入射線反射後平行主軸。
 - (3) 通過面鏡球心的入射線，其反射線循入射線的反方向行進。
 - (4) 入射於鏡頂的光線，其反射線對稱於主軸。
6. 球面鏡的成像公式為 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ ，也稱為面鏡公式，式中 p 為物距； q 為像距，其符號規則如下：凹面鏡的焦距 f 取正值，凸面鏡的焦距 f 取負值；形成實像時， q 取正值；形成虛像時， q 取負值。
7. 球面鏡成像時放大率為 $M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{q}{p}$ ，式中 h_i 和 h_o 分別為像和物體的高度，且正立時取正號，倒立時取負號。若 $M > 0$ ，表示像是正立的；若 $M < 0$ ，表示像是倒立的。又， $|M| > 1$ 時，表示為放大的像； $|M| < 1$ 時，則為縮小的像。

4-3 折射現象

8. 光從一種介質進入另一種不同的介質中時，行進方向發生改變的現象稱為折射。光折射時遵守折射定律，即：
 - (1) 入射線、折射線和法線均在同一平面上，且入射線和折射線分別在法線的兩側。
 - (2) 入射角和折射角的正弦比值為一定值，即

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = n_{12}, \text{ 或 } n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2。$$

9. 兩介質的折射率較小者，光在該介質中的速率較快，稱為光疏介質；折射率較大的介質，光速較慢，稱為光密介質。

4-4 全反射

10. 光從密介質進入光疏介質時，使折射角成為 90° 的入射角稱為臨界角 θ_c 。若入射角大於 θ_c ，則光線不會發生折射，所有的入射光將依照反射定律全部反射回原來的介質中，此現象稱為全反射。
11. 光從光密介質（折射率為 n_1 ）進入光疏介質（折射率為 n_2 ）時，其臨界角 θ_c 滿足 $\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}$ 。

4-5 薄透鏡

12. 球面透鏡中央部分較邊緣部分厚的，稱為凸透鏡，在空氣中具有會聚光線的性能，故稱為會聚透鏡；中央部分較邊緣部分薄者為凹透鏡，在空氣中具有發散光線的功能，故稱為發散透鏡。
13. 物體經薄透鏡折射所形成的像，可利用作圖法求出。選取下列三條主要光線中的兩條，即可藉以決定像的位置、大小和性質：
- (1) 平行於凸透鏡主軸的入射光線，折射後通過鏡後的焦點；若為凹透鏡，則折射後射出光線的反方向延長線通過鏡前的焦點。
 - (2) 通過凸透鏡前焦點的入射光線，折射後平行於主軸；若為凹透鏡，則指向鏡後焦點的入射光線，其折射後的射出光線平行於主軸。
 - (3) 通過鏡心的入射光線，直接通過透鏡，沒有偏移。
14. 薄透鏡公式： $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$ ，式中 p 為物距， q 為像距， f 為焦距。應用此公式時，須要遵守下列的符號規則：實際物體在鏡前的物距 p 取正值；凸透鏡的焦距 f 取正值，凹透鏡的焦距 f 取負值；形成實像時， q 取正值，形成虛像時， q 取負值。
15. 物體經透鏡成像時，若物長為 h_o ，像長為 h_i ，並定正立時取正號，倒立時取負號，則放大率為 $M = \frac{h_i}{h_o} = -\frac{q}{p}$
- 若 $M > 0$ ，表示像是正立的；若 $M < 0$ ，表示像是倒立的。又， $|M| > 1$ 時，表示為放大的像； $|M| < 1$ 時，則為縮小的像。

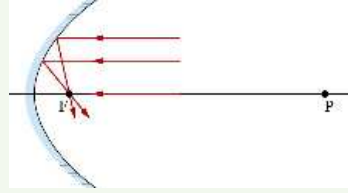
習題

Exercise

一、問答題 (題號有「※」者為難題)

1. 將光源置於凹的拋物面鏡的焦點處，光線經拋物面反射平行主軸，有何優點？

2. 一光線平行於凹拋物面鏡的主軸入射，經面鏡反射後通過焦點 F 處。若將點光源 P 置於主軸上某位置，如圖 4-96 所示，則 P 點發出的光經此面鏡反射後會成像在 F 點的哪一側？



▲圖 4-96

3. 如圖 4-97 所示，汽車大燈有近光燈與遠光燈，分別由不同的兩燈泡照射同一凹面鏡。哪一個燈泡的位置接近面鏡的焦點？

(a)

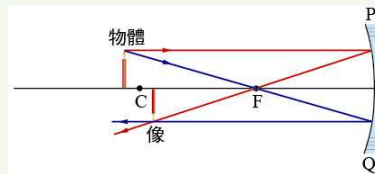


(b)



▲圖 4-97

4. 在圖 4-98 中， P 和 Q 兩點為凹面鏡孔徑的兩端。物體經面鏡反射成實像，眼睛在什麼位置可以看到此實像之全貌？請畫出此範圍。



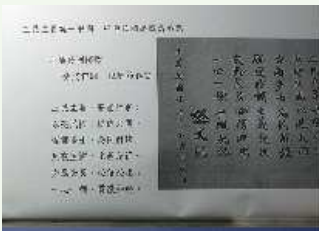
▲圖 4-98

5. 取一光亮的金屬湯匙，湯匙的凹面朝向眼睛，注視自己經由湯匙反射的像。當湯匙從很靠近眼睛開始，逐漸將湯匙移離眼睛，在此過程中會看到自己像的倒立正立有何變化？

6. 我們透過燃燒的火焰所見到的後方景物，為什麼會顯得搖晃不定呢？

7. 圖 4-99(a)是某文件，圖 4-99(b)是透過裝水的玻璃杯看到的情形，所見到的像上下不顛倒，但是卻左右相反，這是什麼原因呢？所成的像位置在哪裡？是實像還是虛像？

(a)



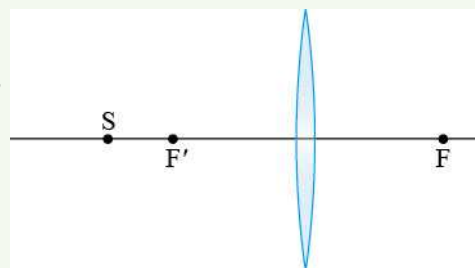
(b)



▲圖 4-99 (a)某文件；(b)透過裝水的玻璃杯看到的情形。

8. 有一置於凸透鏡主軸上的物體，從甚遠處以等速率向著透鏡移動，則經透鏡折射形成的像如何運動？是等速率運動嗎？

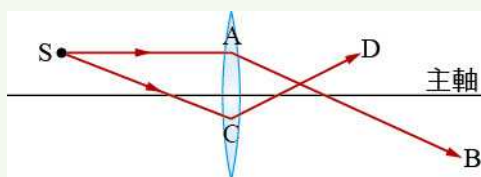
9. 圖 4-100 中， F 和 F' 為薄凸透鏡的兩焦點， S 為點光源。請用作圖法決定 S 經透鏡後成像的位置。



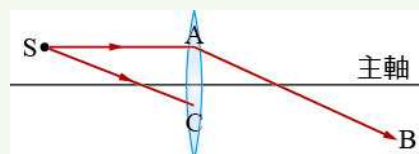
▲圖 4-100

《提示：過點光源 S 作一垂直於主軸的小線段，找出小線段頂端所成的像，再作垂足即可。》

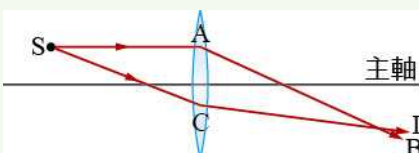
10. 圖 4-101 中， S 為點光源， SA 為 S 所發出的其中一條光線， AB 為經凸透鏡後的折射線。若 SC 為另一入射至透鏡的光線，則其折射線 CD 以圖 4-102(a)、(b)和圖三圖而言，何者最可能？



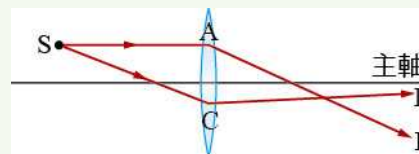
▲圖 4-101



(a)



(b)



(c)

▲圖 4-102

二、計算題

4-2 球面鏡

11. 一高為 2.0 cm 的小物體豎立於凹面鏡前的主軸上，距鏡面 30 cm，鏡面的曲率半徑為 40 cm，回答下列各題：

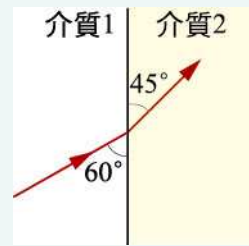
- (1) 利用面鏡公式，求出像的位置、高度和性質。
- (2) 利用作圖法，回答(1)題。

12. 取一個焦距為 5.0 cm 的凹面鏡置於眼前，若能見到自己臉的倒立像位於眼前，與眼睛相距 24 cm 處，則：臉與鏡面距離為何？又該像的性質為何？

13. 一小物在焦距 20 cm 的凹面鏡前 30 cm 處主軸上，以速率 2.0 cm/s 遠離鏡面，求 5.0 秒內其像的平均速率及運動方向。

4-3 折射現象

14. 如圖 4-103 所示為光線自介質 1 進入介質 2 的路徑，求介質 2 對介質 1 的相對折射率，何者是光密介質？

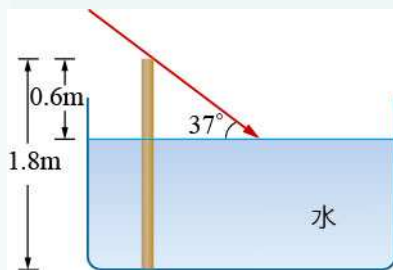


▲圖 4-103

15. 如圖 4-104 所示，一支長 1.8 m 的竹竿鉛直豎立在底部平坦、水面無波的水池底部，高出水面 0.60 m，陽光以與水面夾 37° 角入射，若水的折射率為 1.33，則竿在水底影長為何？

16. 某光線自折射率為 n_1 的第一介質中以入射角 θ 進入第二介質中時，發現折射線與反射線互相垂直，求第二介質的折射率，何者為光密介質？

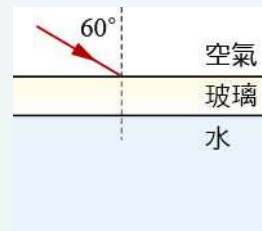
17. 如圖 4-105(a) 中光自空氣以入射角 60° 直接進入水中，圖 4-105(b) 則在空氣和水之間插入一片平行玻璃板，入射角 60° 直接進入玻璃中。若水和玻璃的折射率分別為 1.33 和 1.50，求兩圖中，光線進入水中時的折射角。



▲圖 4-104



(a)

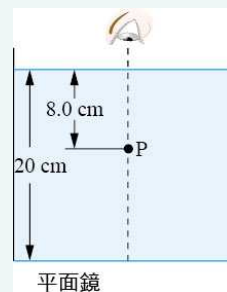


(b)

▲圖 4-105

18. 如圖 4-106 所示，一水箱內裝水 20 cm 深，底部為一平面鏡，水面下 8.0 cm 處有一小物體 P，一觀察者在空氣中從物體位置的正上方附近，向下看到兩個像。

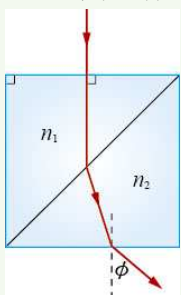
- (1) 說明這兩個像怎樣形成的。
- (2) 若水的折射率為 1.33，則所見兩個像的距離是多少？



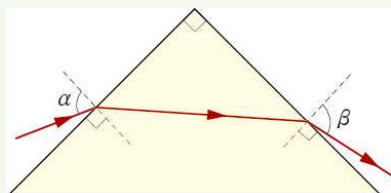
▲圖 4-106

19. 已知水的折射率為 1.333，一束光線由空氣入射水面時，發現反射線與折射線的夾角 120° ，求入射角的正切值。

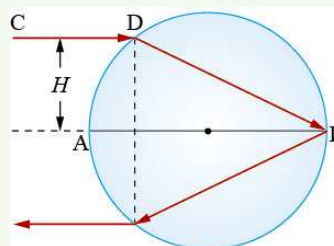
20. 兩折射率分別為 n_1 和 n_2 的等腰直角稜鏡疊在一起如圖 4-107 所示。一束光線從空氣中垂直射入第一稜鏡，若它離開第二稜鏡時與原入射方向之夾角為 ϕ ，求 $\sin \phi$ 。
21. 如圖 4-108 所示，光線自空氣中射入一直角稜鏡的直角邊，入射角為 α ，自另一直角邊射出，射出時的折射角為 β ，求此稜鏡的折射率為何？



▲圖 4-107



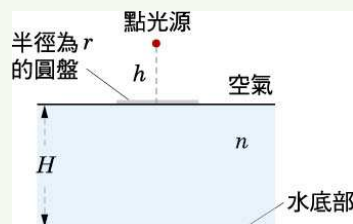
▲圖 4-108



▲圖 4-109

- ※ 22. 圖 4-109 中，一透明介質球的半徑為 R ，一束光線 CD 平行於球的直徑 AB ，射至球的 D 點進入介質球，經一次反射後第二次到達球的界面時，從球內折射出的光線與入射光線平行，若圖中 CD 與 AB 的距離為 $H=0.80 R$ ，求介質的折射率。

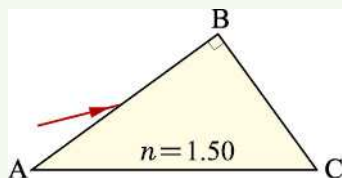
- ※ 23. 如圖 4-110 所示，水的深度為 H ，水面有半徑為 r 的不透明圓盤，在盤中心上方 h 處有一點光源，在水底部形成圓形陰影。若水的折射率為 n ，求圓形陰影的半徑。



▲圖 4-110

4-4 全反射

24. 如圖 4-111 所示，一直角三稜鏡 ABC 的折射率為 1.50， B 為直角頂點，光線從 AB 邊射入，可以從 BC 邊射出嗎？
25. 在水面下深 h 處有一點光源，如圖 4-112 所示，若水的折射率為 n ，則此點光源在水面上所造成的亮圈面積有多大？



▲圖 4-111

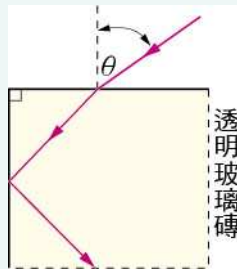


▲圖 4-112

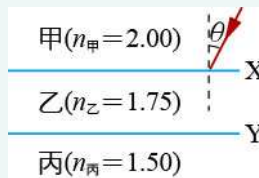
※ 26. 如圖 4-113，光由空氣以入射角 θ 射入方形透明玻璃內，欲使光線在玻璃垂直

面作全反射，則此玻璃磚之折射率的最小值為何？

※ 27. 甲、乙、丙三介質折射率如圖 4-114 所示，三者之間的界面 X 和 Y 均彼此平行。一束光線由甲介質入射 X 界面，如入射角 θ 逐漸增大時，則第一次全反射將在何種情況下於何界面發生？



▲圖 4-113



▲圖 4-114

4-5 薄透鏡

28. 物體經透鏡成像的位置和性質與透鏡種類，物體的位置有關。請完成表 4-2 中成像的性質和位置。

表 4-2

凸透鏡				
物體	成像			
位置	虛像或實像	放大或縮小	倒立或正立	位置
$\infty > p > 2f$				$2f > q > f$
$p = 2f$				
$2f > p > f$				
$p = f$				
$p < f$				

凹透鏡				
物體	成像			
位置	虛像或實像	放大或縮小	倒立或正立	位置
任何位置				

29. 一小物體直立在焦距為 8.0 cm 的凸透鏡前的主軸上，與透鏡之間的距離為 32.0 cm 。
- (1) 求像的位置。
 - (2) 若物長 3.0 cm ，則像長是多少？正立還是倒立？
30. 一小物體直立在焦距為 24.0 cm 的凸透鏡的主軸上，若欲經由透鏡折射，形成 3 倍大的像，則物體應置於何處？
- ※31. 圖 4-115 為一物體經薄透鏡成像，物體和像的位置。物體、像以及主軸都已標示在圖上，請以作圖法決定透鏡種類及焦點的位置。

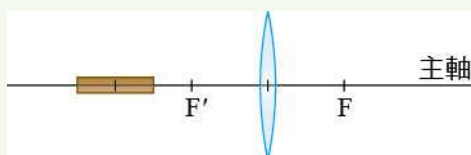


▲圖 4-115

- ※32. 與上題類似，但是物體與像的位置不同，如圖 4-116 所示，請以作圖法決定透鏡種類及焦點的位置。
33. 如圖 4-117 所示，一凸透鏡的焦距為 20.0 cm ，將長度為 20.0 cm 的木棒平行主軸的置於主軸上，木棒的中點在距離透鏡兩倍焦距處，求像長。



▲圖 4-116



▲圖 4-117

34. 通常凸透鏡就可作為簡易的放大鏡，若視此透鏡為薄透鏡，問：
- (1) 在有陽光的戶外，怎樣找出此放大鏡的焦距？
 - (2) 太陽經此放大鏡所成的像是不是一點？
 - (3) 證明太陽經此放大鏡所成的像的大小與凸透鏡的焦距成正比。