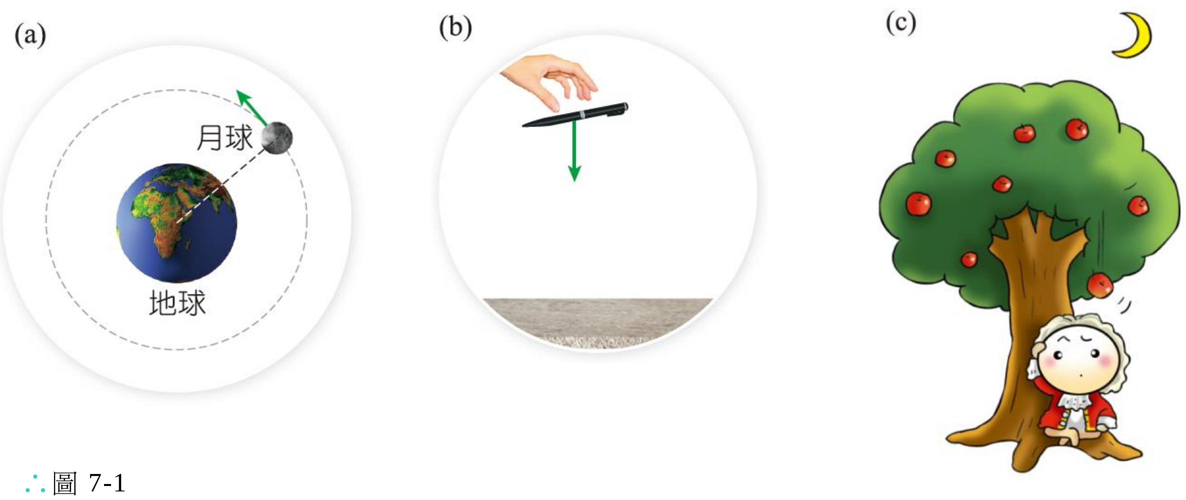
抬頭仰望點點繁星和偶然劃過天際的流星，俯拾起身邊翩然飄落的楓葉，訴不盡的「詩情畫意」，終歸都是自然的運作。本章將介紹存在於天地萬物，無時無刻存在我們身邊的萬有引力。學完本章你將了解無論是宇宙星辰的運行，生活中柴米油鹽的斤兩，或是在現代社會中扮演了重要角色的人造衛星，都可以用萬有引力來解釋呢。

。

CHAPTER 7 7-1 萬有引力定律

在上冊第五章介紹了圓周運動與向心力，向心力是由物體所受的合外力來提供，而作圓周運動的物體都需要向心力。月球繞地球作圓周運動（如圖 7-1(a)）所需的向心力是由何者來提供呢？將一支筆由靜止釋放，筆會下落到地面（如圖 7-1(b)）。筆為什麼要向下運動，而不向其他方向運動呢？因為重力的方向是鉛直向下的，那麼重力又是怎麼產生的呢？地球對地表附近物體的引力與地球對月球的引力是不是同一種力呢？三百多年前牛頓苦思這個問題（如圖 7-1(c)），而他的結論是肯定的。

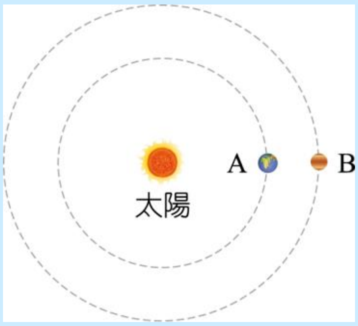
既然地球對地表附近物體的引力與地球對月球的引力是同一種力，那麼是哪些因素決定這種力，它是只有地球才有的，還是所有物體間都存在呢？讓我們回到牛頓的年代思考一下。當時在科學界，「日心說」已推翻了「地心說」，如果認為只有地球對物體存在引力，也就是認為地球是特殊有引力的球體，則勢必又進入「地球是宇宙中心」的窠臼，若認為物體間普遍存在引力，可是在生活中又難以觀察到兩物體間相互作用的引力。無論如何，想要進一步了解這種引力，只能從現象比較明顯的天體問題入手。



∴圖 7-1
(a)月球繞地球作圓周運動。
(b)筆靜止釋放會自由下落到地面。
(c)讓月球運動的力和蘋果下落的力是同一種力嗎？

例題　7-1

在「日心說」中認為行星繞太陽公轉而不是以地球為中心。太陽系內，在地球 A 外側為火星 B，公轉的方向與地球相同，如圖所示。若火星每相隔 2.25 年與地球之距離達到最接近，假設地球與火星兩者之軌道皆為圓形，則估計火星的公轉週期為多少年？



思路：火星與地球皆以圓形軌道繞太陽運行，地球的速率比火星快，繞太陽轉得也較快。假設從兩星球最接近算起至下一次最接近所需要的時間為t，在時間t內地球已經比火星多繞了太陽1圈。

解　地球繞太陽公轉的週期 T_1 為 1 年，在時間 t 內地球繞太陽的圈數為 $\dfrac{t}{T_1}$；

火星繞太陽公轉的週期為 T_2 年，在時間 t 內火星繞太陽的圈數為 $\dfrac{t}{T_2}$。

地球已經比火星多繞了太陽 1 圈，即 $\dfrac{t}{T_1}-\dfrac{t}{T_2}=1$，

所以 $\dfrac{2.25}{1}-\dfrac{2.25}{T_2}=1$，可以得到 $T_2=1.80$（年）。

在地球上觀察太陽的另一個行星，如果每隔固定時間（例如 2.25 年）就再次相遇，表示地球與該行星繞太陽的公轉軌道皆為圓形。若結果不是每隔固定時間就會接近，就顯示軌道可能是橢圓。

自我練習

例題 7-1 中，如果火星的圓周運動方向與地球的方向相反，則兩行星由圖示條件至再次相遇需多少年的時間？

在基礎物理(一)中介紹過克卜勒行星運動三定律，它們是長期觀察行星運動，歸納出來的經驗定律。為了討論方便，此處假設行星的運動軌道為圓形（如圖 7-2）。其中的第三定律，又稱為週期定律，其內容為：所有繞同一恆星公轉之行星，其軌道週期的平方與軌道半徑的立方成正比。也就是說，所有行星其軌道半徑 r 的立方與運動週期 T 的平方之比為定值 k，可用數學式表示為：

$$\frac{r^3}{T^2}=k\text{（定值）} \tag{7-1}$$

由圓周運動向心力的關係式：

$$F=\frac{mv^2}{r}=\frac{4\pi^2 mr}{T^2}\ ,$$

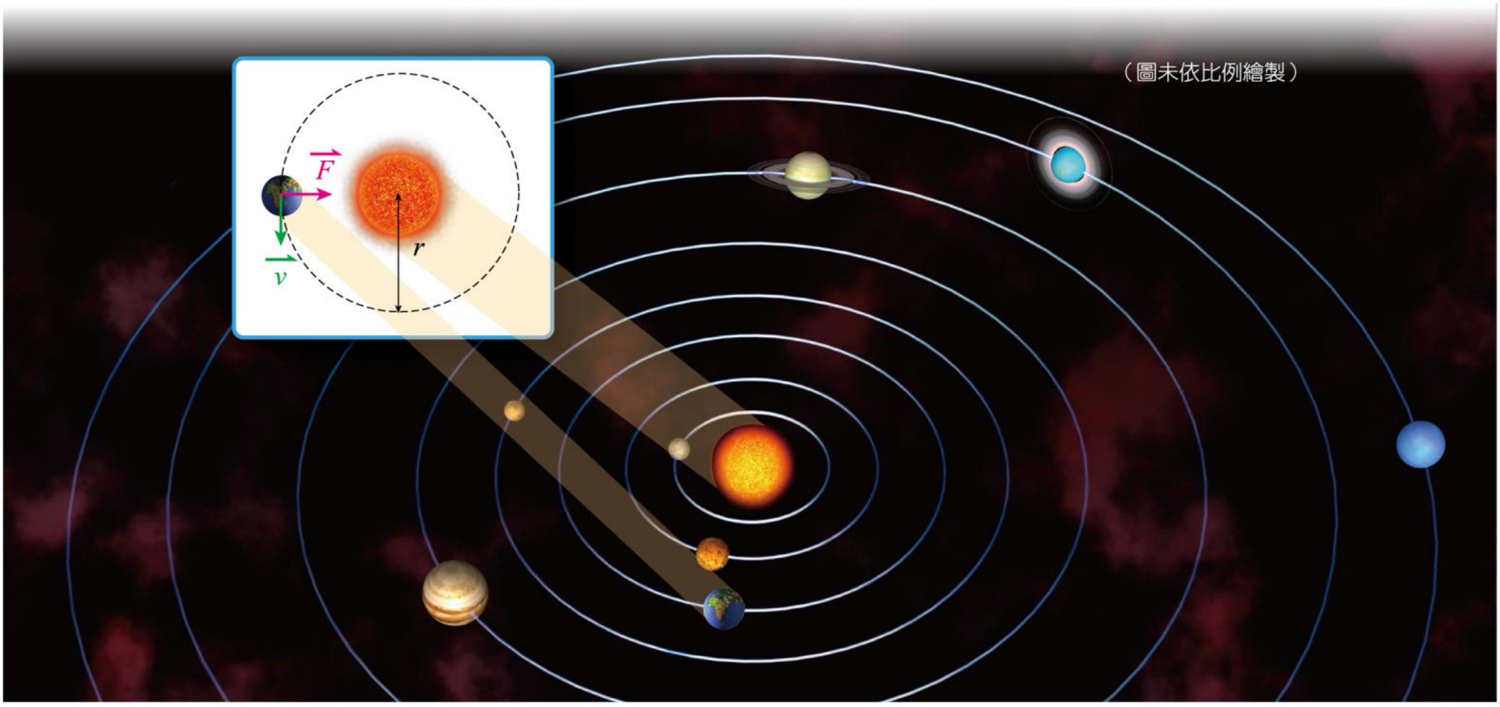
將(7-1)式代入，得：

$$F=\frac{mv^2}{r}=\frac{4\pi^2 mrk}{r^3}=\frac{4\pi^2 km}{r^2}\ ,$$

其中 m 為行星的質量，r 為行星的軌道半徑，即太陽與行星間的距離。也就是說，太陽對行星的引力正比於行星的質量，而反比於太陽與行星之距離的平方。用數學式表示為：

$$F\propto\frac{m}{r^2}\ ,$$

∴圖 7-2　繞恆星公轉的行星軌道示意圖，以太陽和地球為例呈現於左上角。



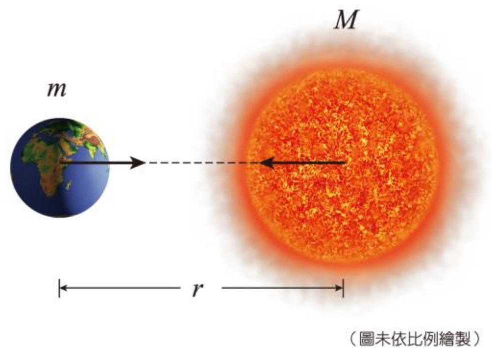
再應用牛頓第三運動定律，即作用力的量值等於反作用力的量值，也就是行星對太陽也有相等量值的引力。由兩作用物體的對稱性，此引力也應和太陽的質量 M 成正比，即 $F \propto \dfrac{M}{r^2}$，故：

$$F \propto \frac{mM}{r^2}\text{，}$$

換句話說：太陽與行星之間的引力，與它們質量的乘積成正比，與它們距離的平方成反比，這就是牛頓的萬有引力定律（如圖 7-3）。如果改用數學等式表示為：

$$F = G\frac{mM}{r^2} \qquad (7\text{-}2)$$

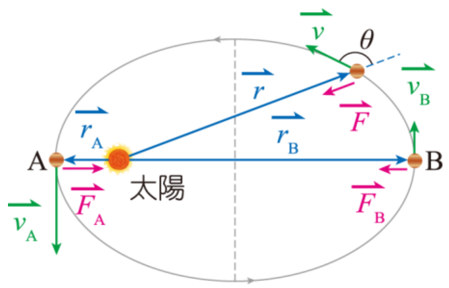
此式僅適用於可視為質點的兩物體，其中 G 為一個常數，稱為**重力常數**（gravitational constant）。



∴圖 7-1　太陽與行星之間的萬有引力定律示意圖。

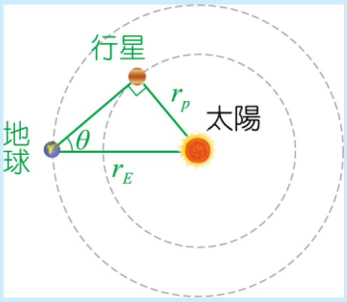
Note

由克卜勒行星運動第一定律，可知行星以橢圓軌道繞行太陽，因此在軌道各處與太陽的距離不同，所受萬有引力的量值也不相等。然而所受萬有引力的方向是太陽與行星的連心線方向，若以太陽為參考點，其力臂為零，故不受力矩，可推知行星運動對轉軸的角動量守恆，也就是 $m\vec{r}\times\vec{v}$ 為定值，$\vec{r}\times\vec{v}$ 之值為 $rv\sin\theta$ 是向量計算中的外積，$rmv\sin\theta=$ 常數。這也正是克卜勒行星運動第二定律，等面積定律。用在近日點和遠日點時得 $r_A v_A = r_B v_B$。



例題 7-2

地球與某行星均繞太陽做近似圓形軌道運行，由地球上觀測，發現該行星與太陽可能呈現的最大視角為 θ，其正弦值 $\sin\theta$ 約 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，如右圖所示。



據此推求：

(1) 該行星運行的軌道半徑 r_p 與地球運行半徑 r_E 之比值為何？

(2) 地球公轉週期為 1 年，以此為單位，估計該行星之運行週期為若干？

思路：如圖所示，地球與某行星均繞太陽作近似圓形軌道運行，地球繞太陽的公轉半徑以 r_E 表示，太陽與地球連線的方向即 r_E 的方向；行星繞太陽的公轉半徑以 r_p 表示，太陽與行星連線的方向即 r_p 的方向。地球與太陽的連線和地球與行星的連線，這兩條視線的夾角 θ 會隨著行星在不不同的位置上而不同，其中最大夾角發生在如圖中所示的兩個可能位置上。

解 (1)可以得到下列的關係：

$$\sin\theta_{\max} = \frac{r_p}{r_E} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.71，\theta_{\max} \text{ 約為 } 45°。$$

(2)其中地球繞太陽的公轉軌道半徑 r_E 為 1.0 AU $=1.5\times10^{11}$ m，

所以行星繞太陽的公轉軌道半徑 r_p 為 0.71 AU $=1.1\times10^{11}$ m，

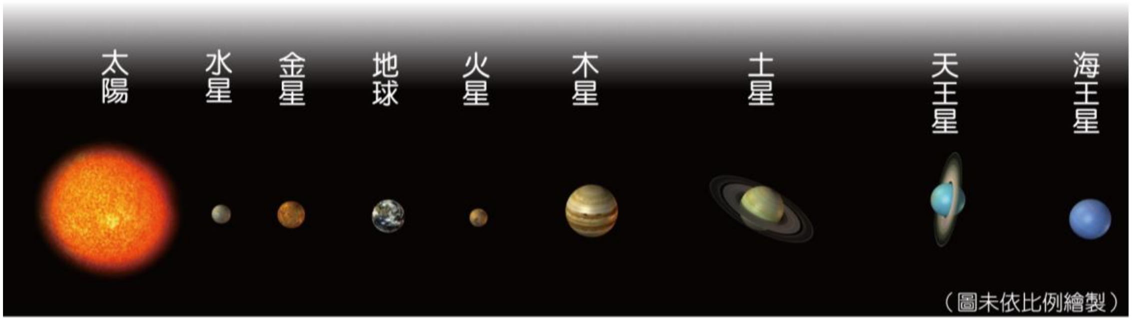
兩個行星皆繞太陽公轉，行星軌道半徑 r 的立方與運動週期 T 的平方之比為定值，

$$\frac{r_p^{\,3}}{T_p^{\,2}} = \frac{r_E^{\,3}}{T_E^{\,2}}，\frac{0.71^3}{T_p^{\,2}} = \frac{1^3}{1^2}，$$

行星繞太陽公轉的週期 $T_p = 0.71^{\frac{3}{2}} = 0.6$（年）。

想一想

例題 7-2 中，此行星繞太陽公轉的週期為 0.60 年，而且比地球更接近太陽，此行星軌道半徑經計算為 0.70 AU，它最接近下列哪一行星？請利用網路或其他資訊確認可能為太陽系內的哪一個行星？



例題 7-3

假設萬有引力定律中兩質點間引力的量值與其距離的 n 次方（ $n \neq 2$ ）成反比，考慮一群以圓形軌道繞行同一恆星的行星，如果各行星的週期與其軌道半徑的平方成正比，則 n 的值應為何？

思路：行星以萬有引力作為繞恆星作圓周運動所需的向心力。

解　萬有引力的量值與距離的次方關係： $F=\dfrac{GMm}{r^n}$ ，

圓周運動向心力與週期的關係： $F=m\cdot\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$ ，

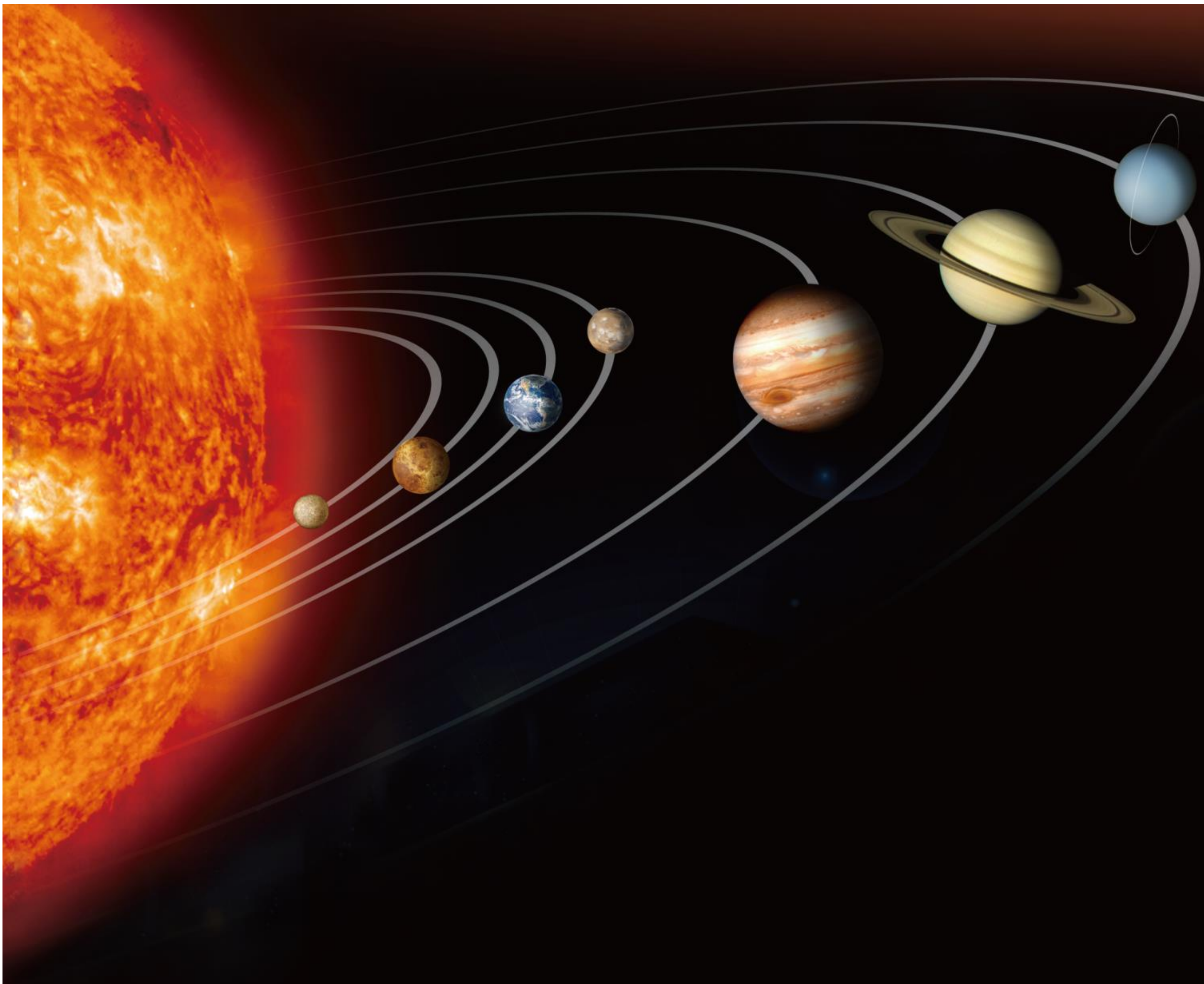
將上兩個式子連結， $F=\dfrac{GMm}{r^n}=m\cdot\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$ ，得到 $\dfrac{r^{n+1}}{T^2}=\dfrac{GM}{4\pi^2}$ ，

因為題目中設各行星的週期與其軌道半徑的平方成正比，

所以 $n+1=4$ ， $n=3$ 。

想一想

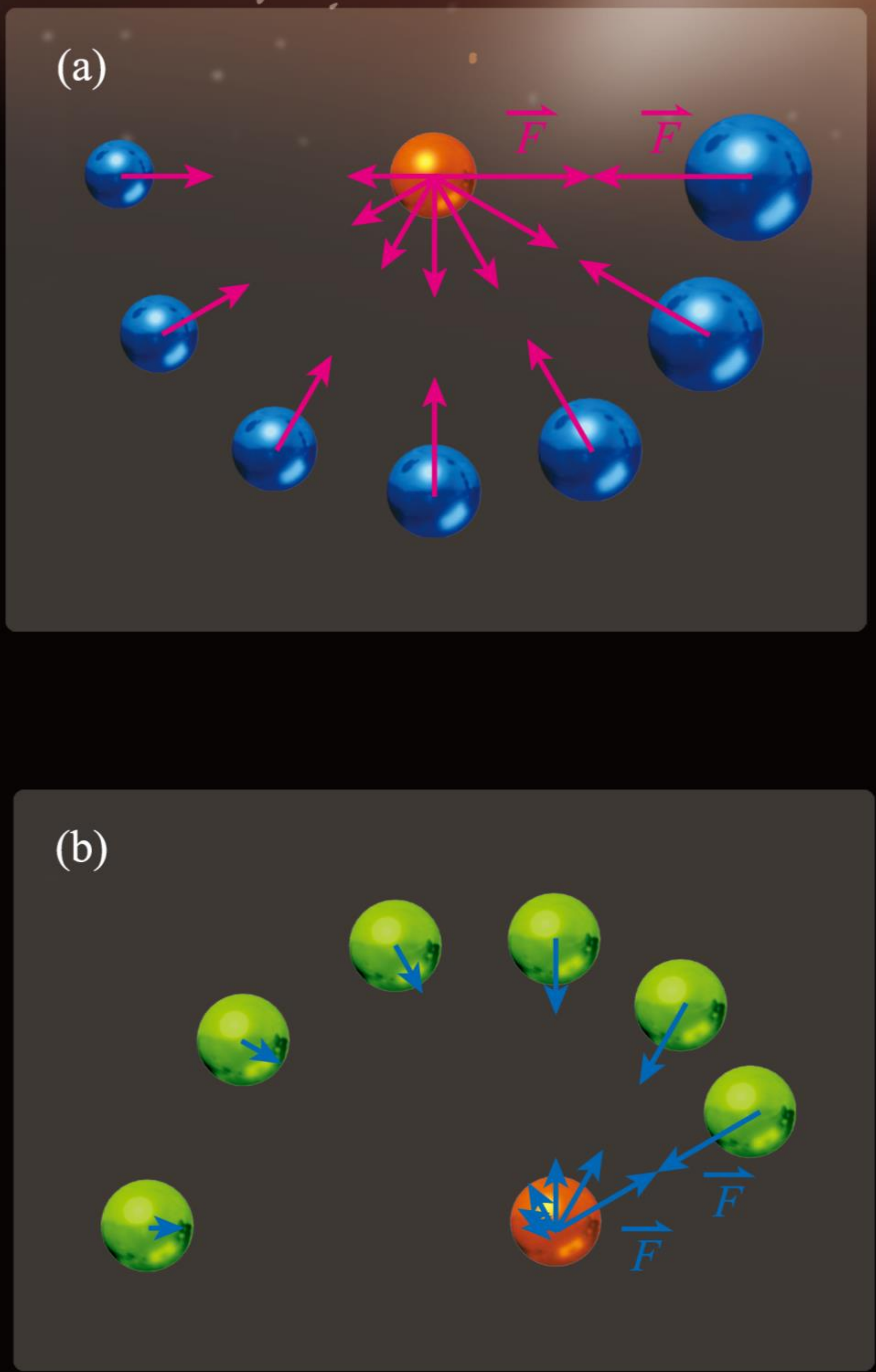
如果萬有引力真的如例題 7-3 所示，兩質點間引力的大小與其距離的 3 次方成反比，則克卜勒行星運動第二定律是否還成立呢？



雖然前面對萬有引力定律的推導是考慮太陽對行星的引力，但正如前述的分析：萬有引力應存在於任何兩個物體之間。只不過一般物體的質量與星球相比實在太小了，以致於它們間的萬有引力也非常小，因此在生活中難以觀察到。萬有引力定律的意義是：任何兩個物體都有一種互相吸引的力。在兩質點或星體間，其引力的量值和其質量的乘積成正比，其間距離的平方成反比（如圖 7-4），以數學型式表示為：

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2} \tag{7-3}$$

式中 m_1、m_2 分別表示兩個物體的質量；r 為它們間的距離，更精確的含義是兩個質點間的距離。若兩個物體相距很遠，則物體一般可以視為質點。但(7-3)式可直接應用在兩個相距較近的均勻球體，此時 r 就是兩球心間的距離。



∴圖 7-4　兩質點間的萬有引力量值(a)和兩物體之質量的乘積成正比，(b)與距離的平方成反比。

例題 7-4

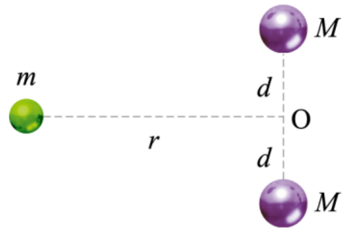
質量皆為 M，相距 $2d$ 的二固定質點，其連線之中垂線上與中點 O 相距 r 處有一質量為 m 的質點。

(1) 試求 m 受二個 M 質點之萬有引力之和為何？

(2) 若 $r \gg d$，m 所受之萬有引力近似為何？

解 (1) m 與 M 間的距離為 $\sqrt{r^2+d^2}$，m 與 M 間的引力 $F=\dfrac{GMm}{r^2+d^2}$，

因為向量方向的關係，萬有引力的和應只有向右的分量，



$$2F\cos\theta=2\frac{GMm}{r^2+d^2}\cos\theta，$$

其中 $\cos\theta$ 為 $\dfrac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}$，代入上式，

$$2F\cos\theta=2\frac{GMm}{r^2+d^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+d^2}}=\frac{2GMmr}{(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}。$$

(2)依題意，m 與 O 點的距離 r 遠大於兩個質點 M 彼此的距離 $2d$，

所以 $\sqrt{r^2+d^2}$ 近似於 $\sqrt{r^2}=r$，代回上式，

$$m\text{ 所受的萬有引力}=2F\cos\theta=\frac{2GMmr}{(r^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{2GMm}{r^2}=\frac{G(2M)m}{r^2}。$$

與一個質量為 $2M$ 的質點位於 O 處與 m 間的萬有引力相等。

自我練習

例題 7-4 中，若 $r \ll d$，m 所受之萬有引力近似為何？若 M 固定而 m 可以在中垂線上自由移動，請推測此時 m 的運動形式為何？

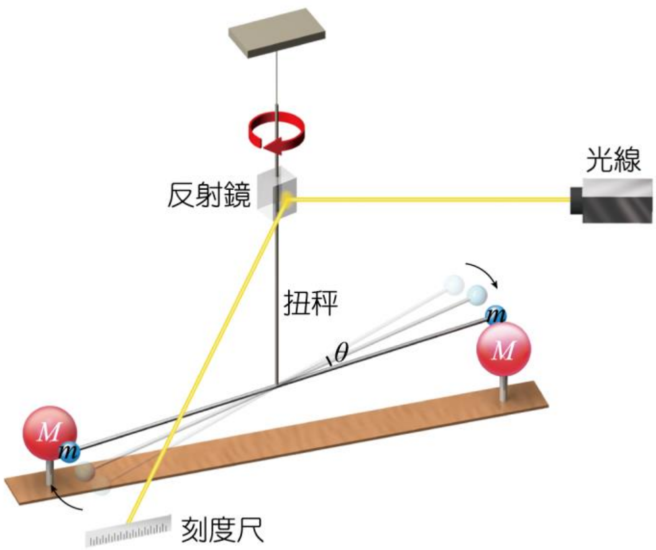
牛頓發現了萬有引力定律，但重力常數 G 是多少，當時誰也不知道。按理說，只要測出兩個物體的質量及其間的距離，再測出物體間的引力，代入萬有引

力定律，就可以測出這個常數。但一般物體的質量太小了，它們間的引力小得無法測出；而天體間的引力夠大了，卻又無法測出天體的質量。所以，直到萬有引力定律發現的一百多年後，卡文迪西（Henry Cavendish，英國，1731～1810）利用設計精巧的扭秤做實驗，證實了天體以外的物體間確實存有萬有引力，才使後人可以得到這個常數。

Note

卡文迪西的扭秤實驗：

扭秤的主要部分是一個 T 字形輕而結實的框架，把這個 T 形架倒掛在一根金屬絲下。若在 T 形架的兩端施加兩個量值相等、方向相反的力，因力矩的作用，金屬絲就會扭轉一個角度以產生抵抗的恢復力矩。施加的力愈大，扭轉的角度也愈大。因此，如果測出 T 形架轉過的角度，也就可以測出 T 形架兩端受力的大小。在 T 形架的兩端各固定一個小球，再在每個小球的附近各放一個重球，兩球間的距離可以測定。根據萬有引力定律，重球會對小球產生引力，T 形架會隨之扭轉，只要測出其扭轉的角度，就可以測出引力的大小。但是由於引力很小，扭轉的角度必然很小。如何才能測出小角度呢？可在 T 形架上裝一面小鏡子，用一束光射向鏡子，經鏡子反射後射向遠處的刻度尺，當鏡子隨著 T 形架一起產生很小的轉動時，刻度尺上的光點會發生較大的移動，也可用對準刻度尺的望遠鏡來輔助觀察。這是一個實驗上重要的放大技巧，藉由測定光點的移動，可推得 T 形架在放置重球前後扭轉的角度，從而測定此時重球對小球的引力。此扭秤驗證了萬有引力定律，並測定出重力常數 G 的數值。



重力常數 G 經精密的測量，以 SI 單位表示為：

$$G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ 牛頓・公尺}^2\text{／公斤}^2 \qquad (7\text{-}4)$$

由於重力常數的數值非常小，所以一般物體間的萬有引力是很小的。例如兩個質量 50 公斤的同學相距 0.5 公尺時，以萬有引力公式估計其間的引力約只有 6.67×10^{7} 牛頓，這麼小的力不透過儀器，很難獲知其效應。只有質量很大的物體對一般物體的引力才能產生顯著的效應，例如地球對我們的引力就是我們的體重，天體（主要是月球，其次是太陽）對地球上海水的引力導致了潮汐現象（如圖 7-5）。而天體之間的引力由於星球的質量很大，往往是非常驚人的，例如太陽對地球的引力高達 3.52×10^{22} 牛頓。更重要的是星球的運轉，完全依賴萬有引力所提供的向心力，萬有引力可說是維持宇宙中星際和諧運動的唯一力源。

∴圖 7-5　在同一地點可見(a)潮起與(b)潮落的明顯差異，這些主要是由月球的引力所引起的。

CHAPTER 7 | 7-2

地球表面的重力與重力加速度

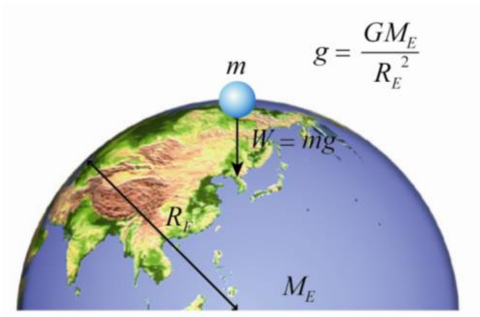
重力 W 就是物體與地球之間的萬有引力，地球表面上的物體所受之重力（gravitational force）W 是物體重力加速度 g 的來源，亦即：

$$W = F = \frac{GM_E m}{R_E^2} = mg \tag{7-5}$$

M_E 為地球的質量，R_E 為地球的半徑，m 為物體的質量，則因重力而產生的加速度 g 為：

$$g = \frac{GM_E}{R_E^2} \tag{7-6}$$

上式顯示地球表面之重力加速度 g 與地球的質量 M_E 成正比，與地球的半徑 R_E 的平方成反比（如圖 7-6）。由(7-6)式可知，藉由測量地球表面的重力加速度可推知地球的質量；已知地球表面的重力加速度 g 為 9.8 公尺／秒 ^{2}，半徑 R 為 6.37×10^6 公尺，可得地球的質量 M_E 為 5.97×10^{24} 公斤。



∴圖 7-6　地球表面的重力示意圖。

但因地球略呈扁橢圓球狀，故赤道附近表面的重力加速度值較小，而南北極處表面的重力加速度值略大。例如同在海平面高度，在地球赤道的重力加速度值為 9.780 公尺／秒 ^{2}，而在北極則約為 9.832 公尺／秒 ^{2}。表 7-1 顯示重力加速度值因緯度不同的變化情形及對物體重量的影響。

∴表 7-1　在地球上重力加速度值的差異對物體重量的影響。

	重力加速度 g（公尺／秒 ^{2}）	質量 $m=1.000$ 公斤物體的重量 $W=mg$（牛頓）
新加坡　北緯 1°17′	9.781	9.781
臺北　北緯 25°02′	9.789	9.789
格林威治　北緯 51°29′	9.812	9.812
北極　北緯 90°	9.832	9.832

註：物體的質量不因地而異。

月球的質量為地球的 0.0123 倍，半徑為地球的 0.2724 倍，在月球表面的重力加速度 g 值約為地表的六分之一，也就是同一物體在月球表面測得的重量約為地表的六分之一。

想一想

他們說的有道理嗎？

例題　7-5

如圖某人在水平地面上以「背向式」跳高。當他曲腿起跳時，其身體的質心離地的高度為 1.0 公尺，剛好可掠過標高為 2.0 公尺的橫桿。假設此人移至月球表面上，以同樣的方式跳高，則他可越過多少公尺高的橫桿？

思路：人跳高時的高度會受到地球表面重力場的影響，重力場愈小，人跳高的高度愈大。

解　跳高運動在鉛直方向可視為向上拋射，

若鉛直初速為 v_0、重力加速度為 g、末速度為 v、鉛直位移為 S，

等加速運動公式以向上為正時，$v^2 = v_0^2 - 2gS$，

當跳至最高點時，末速度 v 為零，可以求出鉛直方向的位移 S。

$$S = \frac{v_0^2}{2g}，$$

在地表跳高時，鉛直位移為 $2-1=1$（m）。

若移至月球表面，月球表面的重力加速度只有地球的 $\frac{1}{6}$。

根據上式鉛直位移應增為 6 倍就是 6 m，

此時橫桿的高度為 $6+1=7$（m），

大約已經越過兩層樓的天花板了。

自我練習

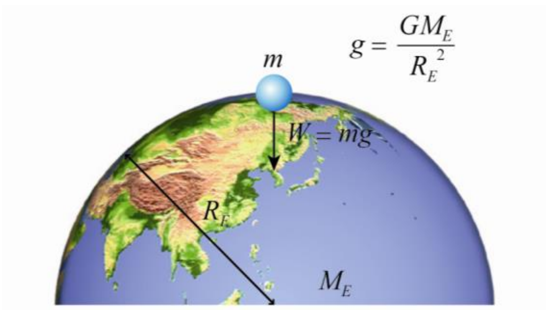
一質點在地球表面上鉛直上拋所能達到的最大高度為 10 公尺，若在月球表面上，將此質點以相同初速鉛直上拋，則所能到達的最大高度為何？

當質量為 m 的物體距地表相當遠，如人造衛星，物體與地心間的距離不可再視為地球半徑 R_E 時，重力加速度 g 的值會變小，物體的重量會減輕，若物體距地表的高度為 h，此時物體所受的重力 W' 為：

$$W' = mg' = \frac{GM_E m}{(R_E + h)^2} \tag{7-7}$$

$$g' = \frac{GM_E}{(R_E + h)^2} = \frac{GM_E}{r^2} \tag{7-8}$$

式中 r 為質量 m 的物體與地心的距離（如圖 7-7）。

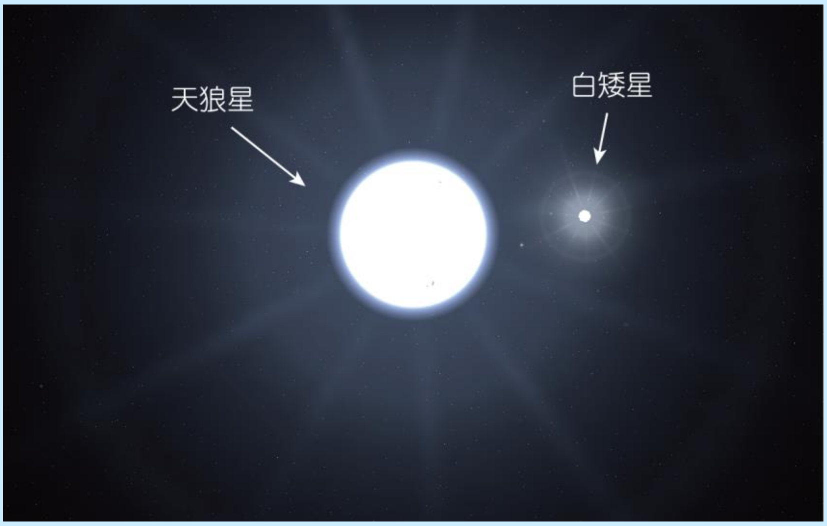


∴圖 7-7　物體距地表高度為 h 時的重力示意圖。

萬有引力不需要依靠物體間的接觸，也能作用到遠處的物體，所以稱為超距力或長程力。地球對地面上物體的萬有引力，是物體具有重量的來源，因此又稱為重力。由於萬有引力作用於周圍所有的物體，其作用範圍的重力分布可以用「場」來描述，稱為**重力場**（gravitational field），重力加速度即為重力場強度。重力場和基礎物理(一)中所提及的電場和磁場一樣，是描述作用力在空間分布及其性質的物理量。重力場是向量，其定義為單位質量受的力，方向表示具質量之物體受力的方向。

例題　7-6

天文學家發現，天狼星有一伴星為白矮星，如圖所示，其質量約等於我們太陽的質量 1.98×10^{30} 公斤，半徑則僅約地球的半徑 6370 公里，在此星球表面，1 公斤的物體，承受的重力，也就是白矮星表面的重力場強度的量值，約若干牛頓？



思路：星球表面重力場由其質量與其半徑所決定。

解　由(7-6)式，白矮星表面重力場強度的量值

$$g=\frac{GM}{R^2}=\frac{6.67\times10^{-11}\times1.98\times10^{30}}{(6.37\times10^6)^2}=3.25\times10^6\ (\mathrm{m/s^2})，$$

在白矮星表面，1 kg 的物體承受的重力約 3.25×10^6 N，

這個數據約是地球表面重力的 32 萬 5 千倍。

自我練習

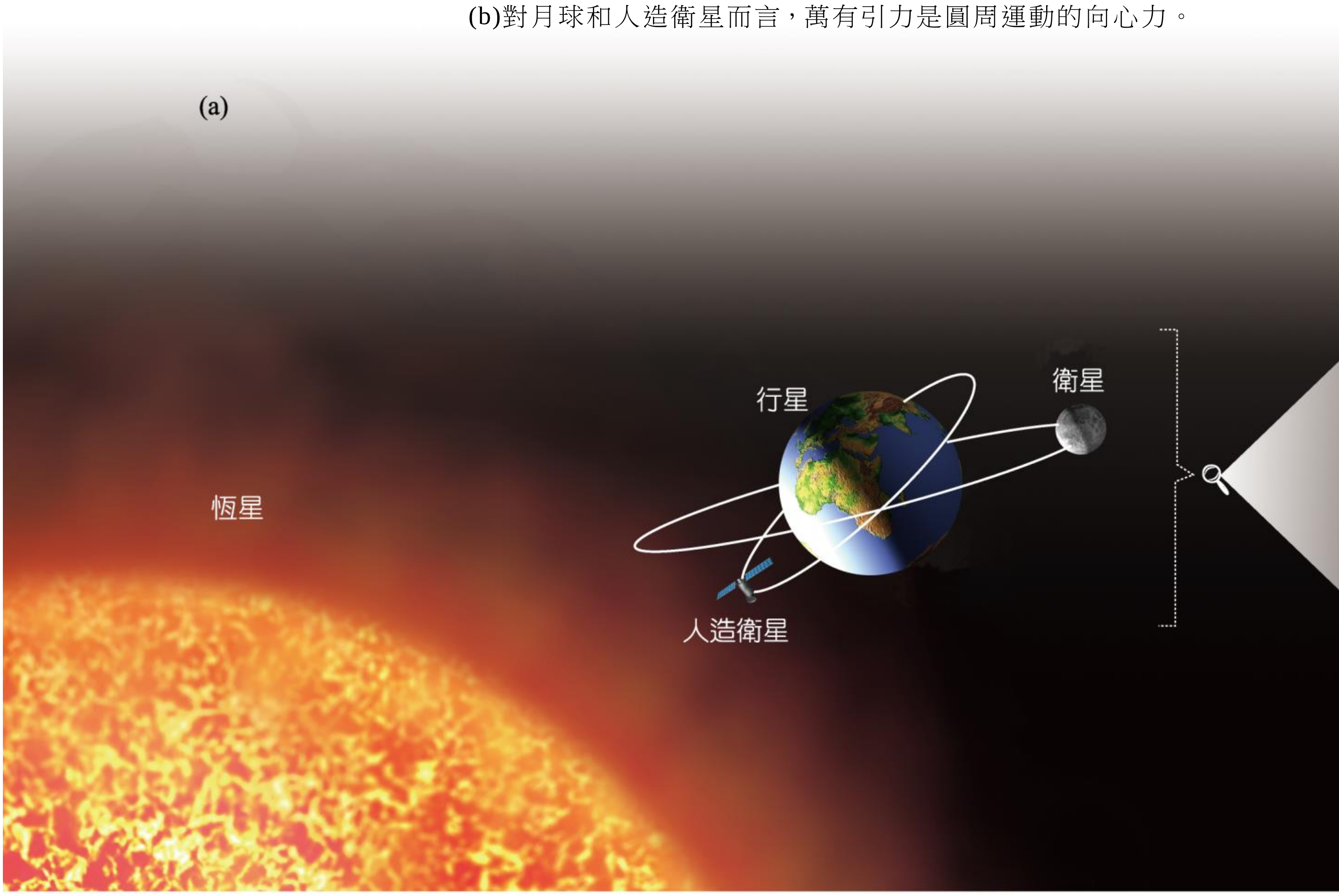
中子星（又稱脈衝星）是在 1967 年由天文學家約塞琳．貝爾（Jocelyn Bell）所發現，中子星每隔數秒就發射一串規律的無線電波脈衝，其組成幾乎都是中子。中子星的直徑約 30 公里，密度約為 1.0×10^{12} 公克／立方公分，是顆十分密緻的星體。請估計中子星表面的重力場強度量值？

CHAPTER 7 7-3 行星與人造衛星

行星是指在宇宙中所有圍繞恆星運行的天體；而衛星是指所有圍繞行星運行的天體（如圖 7-8(a)）。環繞哪一個行星運轉，就稱為哪一個行星的衛星。比如，月亮環繞著地球運轉，它就是地球的衛星。「人造衛星」就是「人工製造的衛星」。科學家用火箭把它發射到預定的軌道，使它環繞著地球或其他行星運轉，以便進行探測或科學研究。人造衛星大多是繞地球運行，常用於氣象觀測、通訊等方面。

行星與人造衛星都是利用萬有引力提供圓周運動的向心力，此向心力使行星或人造衛星作橢圓軌道的運動，由於一般行星的軌道是非常接近圓的橢圓，為方便處理，常假設為等速圓周運動。以繞地球的人造衛星為例，假設其質量為 m，當它距地心為 r 穩定地做圓周運動時，來自地球的引力提供圓周運動的向心力

∴圖 7-8 (a)恆星、行星、衛星與人造衛星間環繞關係的示意圖。
(b)對月球和人造衛星而言，萬有引力是圓周運動的向心力。



（如圖 7-8(b)），其量值 F 以數學式表示為：

$$F=\frac{GM_E m}{r^2}=\frac{mv^2}{r} \tag{7-9}$$

則圓周運動的切向速度量值 v 為：

$$v=\sqrt{\frac{GM_E}{r}}=\sqrt{\frac{GM_E}{R_E+h}} \tag{7-10}$$

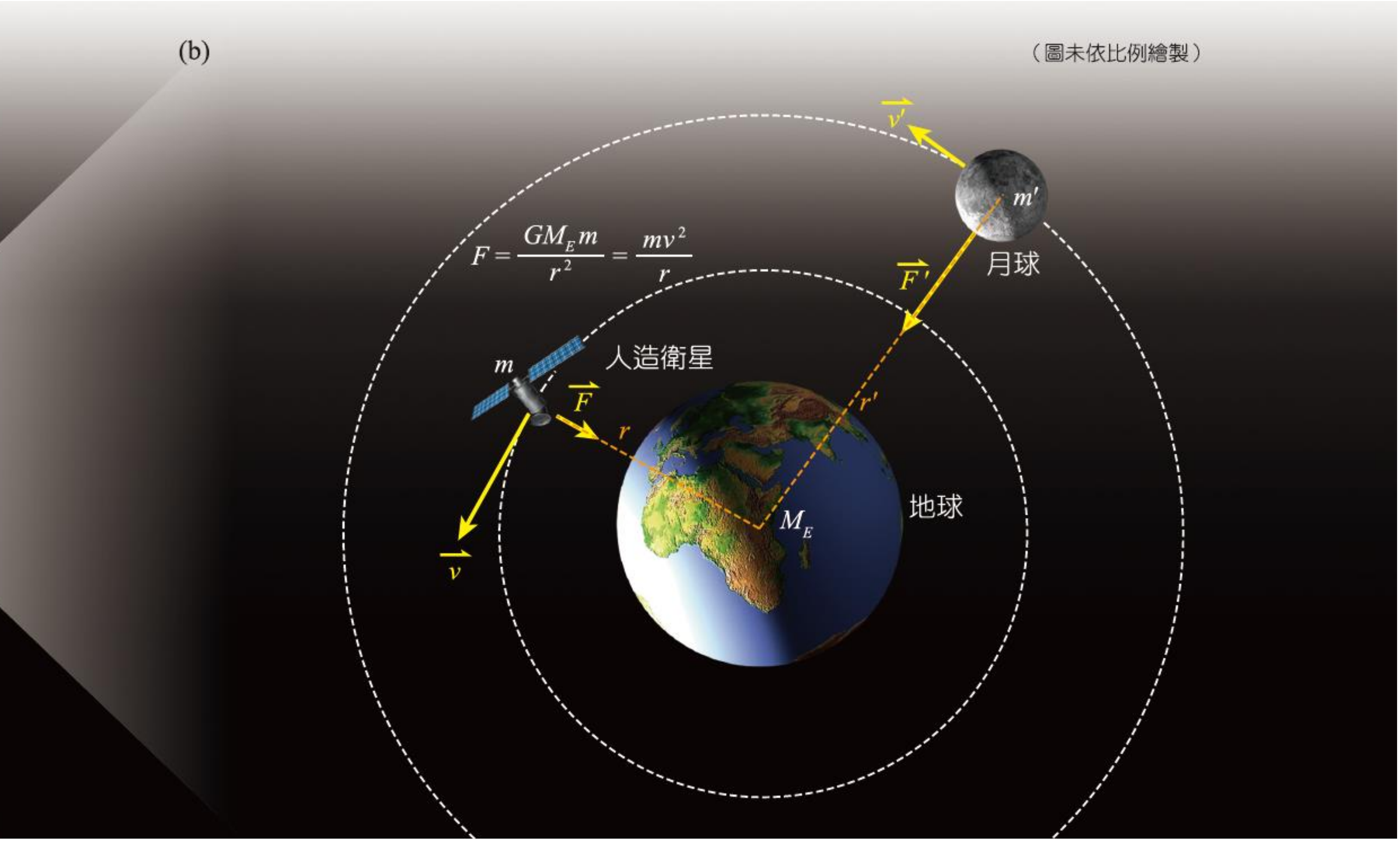
式中 h 為距地面的高度，因此飛得愈高的人造衛星，所需的切向速度量值愈小。由切向速度量值可計算繞行一周的時間，即週期 T 為：

$$T=\frac{2\pi r}{v}=2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM_E}} \tag{7-11}$$

週期為 T 之人造衛星距地心的距離為：

$$r=\left(\frac{GM_E T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} \tag{7-12}$$

由(7-12)式可知：週期 T 愈長的人造衛星，其軌道半徑 r 愈大。



例題 7-7

一人造衛星其平均高度為 500.0 公里，每 98.0 分鐘繞地球一周，試計算地球的質量（各行星之質量亦可自其衛星的運動來推算，發射人造衛星的目的之一，即為測定並核對地球的質量）。

思路：人造衛星靠地球的吸引力，作為圓周運動所需的向心力。

解 假設人造衛星在萬有引力的作用下，繞地球作圓周運動，

$$\frac{GMm}{r^2}=m\frac{4\pi^2 r}{T^2}，$$

$$M=\frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2(5.000\times10^5+6.37\times10^6)^3}{6.67\times10^{-11}\times(98.0\times60)^2}$$

$$=5.55\times10^{24}\text{（kg），}$$

發射一個人造衛星繞行星運轉，只要確定人造衛星的高度以及繞行星一圈的時間，就可以估計行星的質量。

想一想

假定人類並未發射人造衛星至木星，那麼是否仍然有辦法使用這個觀念測定木星的質量？

例題 7-8

甲、乙兩衛星分別環繞地球作等速圓周運動，已知兩者的週期比值為 $\frac{T_1}{T_2}=8$，則兩者的速率比值 $\frac{v_1}{v_2}$ 為何？

思路：不同衛星以萬有引力繞地球作圓周運動時，可得到半徑、速率、週期的彼此關係。

解　假設人造衛星在萬有引力的作用下，繞地球作圓周運動，

其圓周運動的週期為 T，$\dfrac{GMm}{r^2}=ma=m\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$，$T=2\pi\sqrt{\dfrac{r^3}{GM}}$，

可以利用週期的比求出軌道半徑的比，$\dfrac{T_1}{T_2}=\sqrt{\dfrac{r_1^{\ 3}}{r_2^{\ 3}}}=\dfrac{8}{1}$，

所以 $\dfrac{r_1}{r_2}=\dfrac{4}{1}$，作圓周運動時的速率 $v=\dfrac{2\pi r}{T}$。

所以速率比 $\dfrac{v_1}{v_2}=\dfrac{\dfrac{2\pi r_1}{T_1}}{\dfrac{2\pi r_2}{T_2}}=\dfrac{r_1 T_2}{r_2 T_1}=\dfrac{4\times 1}{1\times 8}=\dfrac{1}{2}$。

可以看出，愈靠近地球表面，軌道半徑 r_2 愈小的衛星，其等速圓周運動的速率 v_2 愈大，而週期 T_2 愈小。

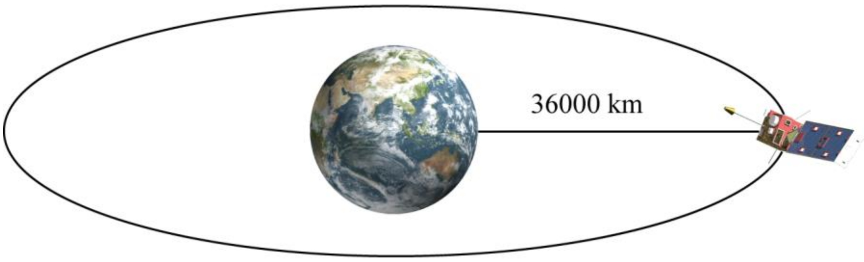
想一想

克卜勒行星運動第三定律式發現了行星週期與軌道半徑的關係，請思考一下，行星速度與週期是否也有特定的關係？

如果衛星在赤道上空繞行一周的時間恰好是地球自轉一周（即一天）的時間，則稱此衛星為「同步衛星」(geosynchronous satellite)，地球上的人會覺得該衛星懸在空中不動，故也有人稱它為靜止衛星。由(7-12)式，可知同步衛星距地心之距離和衛星本身的質量無關，將 $T=1$天$=86400$秒代入，可算出其大小約為地球半徑的 6.6 倍，也就是距地表約 36000 公里高處。

在此高度的衛星繞行地球的週期剛好與地球自轉的週期一樣，地球自轉，衛星也以相等的角速度轉動，這就是所謂的「同步」。一般而言，通信衛星和部分

氣象衛星都是屬於同步衛星，如圖 7-9 所示，每天在電視晚間氣象報告所看到的衛星雲圖就是同步氣象衛星所拍攝的，因為它是固定在地球上空某個位置，才能每隔半小時或一小時就對同一區域拍攝一張雲圖，並且傳到地面供氣象人員預報天氣。



∴圖 7-9　地球同步衛星示意圖。

例題　7-9

若有人造衛星軌道半徑接近行星半徑，可以利用此衛星計算行星（如地球）的平均密度。當此衛星的週期為 T，則該行星（如地球）的密度 ρ 應為何？

思路：愈接近地球的衛星，其速率愈大，週期愈小。

解　若人造衛星利用萬有引力繞地球作圓周運動，其圓周運動的週期為 T，

由 $\dfrac{GMm}{r^2}=ma=m\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$，

此處的 r 表示人造衛星與地球球心的距離。

對此衛星而言，r 也正好接近地球的半徑，若地球的平均密度為 ρ，

則地球的質量 M 可以表示為 $M=\dfrac{4}{3}\pi r^3\rho$ 代回上式，

$\dfrac{G\frac{4}{3}\pi r^3\rho m}{r^2}=ma=m\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$，可得 $\rho T^2=\dfrac{3\pi}{G}$，或表示為 $\rho=\dfrac{3\pi}{GT^2}$，

已知地球上此衛星的週期約為 84 min，

可以計算出地球的密度約為 $5.5\times10^3\ \text{kg/m}^3 = 5.5\ \text{g/cm}^3$。

自我練習

目前發現木星擁有 67 顆已確認的天然衛星，是太陽系內擁有最大衛星系統的行星。當中最大的 4 顆，統稱伽利略衛星，由伽利略於 1610 年發現，這是首次發現不是圍繞地球或太陽的天體。其中木衛十六是第四小也是最接近木星的衛星，繞木星公轉週期只有 7.07 小時。如果把木衛十六的軌道半徑視為木星的半徑，則可估計木星的平均密度為何？（此估計與實際木星密度有一定的差距）

例題　7-10

外太空中有相距d、質量皆為m 的雙星，在同一平面上互繞其共同質心作等速圓周運動，試求：

(1)軌道半徑　(2)速度量值　(3)週期　各為何？

思路：雙星僅受重力作用，重力與兩者距離平方成反比，但是等速圓周運動的半徑並不是距離d。

(1)對質量相等的雙星而言，其質心應在兩星球連線的中點上，所以軌道半徑應為$\dfrac{d}{2}$。

(2)利用等速圓周運動公式，$F=m\dfrac{v^2}{r}$，其中衛星所受重力為$\dfrac{Gmm}{d^2}$，

軌道半徑為$\dfrac{d}{2}$，所以$\dfrac{Gmm}{d^2}=m\dfrac{v^2}{\frac{d}{2}}$，得到$v=\sqrt{\dfrac{Gm}{2d}}$。

(3)利用等速圓周運動公式，$F=m\dfrac{4\pi^2 r}{T^2}$，

所以$\dfrac{Gmm}{d^2}=m\dfrac{4\pi^2\frac{d}{2}}{T^2}$，得到$T=\pi\sqrt{\dfrac{2d^3}{Gm}}$。

自我練習

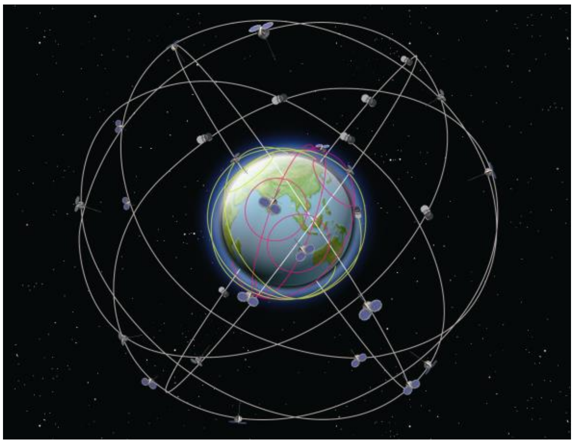
在例題 7-10 中的雙星，其週期是否相同？若雙星的質量分別為 m 及 $2m$，則兩個星球繞共同質心旋轉的週期是否也會相同？

延伸閱讀與觀念分析

延伸閱讀：我國的人造衛星

隨著中華衛星一號於 1999 年 1 月 27 日臺灣時間早上 8:34 在美國佛羅里達卡拉維爾角升空後，臺灣開始擁有百分之百主權的人造衛星，接著二、三號陸續升空，大家可常在媒體上看到人造衛星的相關消息。2005 年「國家太空計劃室」將臺灣的三顆衛星改名為「福爾摩沙衛星」，簡稱「福衛」。其中，福衛一號主要用於科學研究，每天飛經臺灣上空 6～7 次；福衛二號為低軌道小型對地觀測衛星，每天在固定時間飛經臺灣上空 2 次；福衛三號是由 6 顆小衛星組成的衛星系統，用於氣象觀測。

人造衛星可依其繞行地球的方式分成地球同步衛星與繞極軌道衛星兩種。同步衛星都是發射到地球赤道上空約 36000 公里的高空，繞著地球的赤道自西向東轉。繞極軌道衛星通常高度比較低，主要分布在距地表 1000 公里以下，而大部分又分布在距地表 800 多公里高左右。此類衛星不是繞著地球的赤道轉，而是繞著地球南北極方向轉，所以叫繞極衛星。繞極衛星繞地球的速度很快，可設計讓它繞到某個地方時每次時間都一樣，比較適合觀測地表的變化。舉例而言，福衛二號每次經過臺灣上空的時間都是早上九點半左右（晚上也有經過），因此繞極衛星也叫作太陽同步衛星。



∴圖 7-10　人造衛星軌道示意圖。

為了避免大氣的摩擦力，所有衛星的高度都遠超過大氣層頂的高度（地球大氣層對流層頂的高度距地表約 10～20 公里高，整個大氣層約為 100 公里），少

了空氣阻力的影響，所以不需設計為流線形，很多人造衛星裝有兩片長方形的太陽能電板以便提供電力，看起來就像長了一對翅膀。一般而言，繞極人造衛星只有 800 公里左右的距地表高度，相對於同步衛星的 36000 公里，繞極衛星比較靠近地球，可以對地球表面看得更仔細，常用於太空科學研究、資源氣象觀測與軍事間諜的用途。

∴圖 7-11　繞地球的人造衛星示意圖。

隨著人造衛星技術的進步與普及，衛星直播電視、衛星上網、衛星大哥大與汽車定位導航系統等應用，使人造衛星變成生活的「必需品」。臺灣擁有自主的福衛一、二、三號人造衛星後，在人造衛星的應用上已扮演供應者的角色，而不只是使用者的角色了。

觀念分析

「同步衛星」一定要在赤道上空繞地球運轉嗎？

地球衛星受萬有引力做圓周運動，其軌道面可以是通過地心的任意平面。但「同步衛星」是指在地表看來，固定於某處上空的衛星，如此才能持續和地面基地台通聯，要達成此要求則其軌道面就必須和赤道面重合。試想若衛星軌道面與赤道面夾 25°，如圖 7-12，則某時刻在臺北（北緯 25°）上空的衛星，在 12 小時之後將出現在南緯 25°上空，無法固定於某處的上空，就不算是「同步衛星」了。

∴圖 7-12

本章重點

7-1 萬有引力定律

1. 由克卜勒行星運動的週期定律、圓周運動向心力的關係式及應用牛頓的第三運動定律可推出萬有引力定律，以數學形式表示為：

$$F=\frac{Gm_1m_2}{r^2}\text{，}$$

式中 m_1、m_2 分別表示兩個物體的質量，r 為它們間的距離；此式適用於可視為質點之物體，或密度均勻的球體。

7-2 地球表面的重力與重力加速度

2. 地球表面上的物體所受之重力即物體與地球之間的萬有引力，因重力而產生的加速度為：

$$g=\frac{GM_E}{R_E^2}=9.8\text{ 公尺／秒}^2\text{。}$$

3. 重力加速度即為重力場強度 $g'=\frac{GM_E}{(R_E+h)^2}=\frac{GM_E}{r^2}$，其與重力場源距離的平方成反比。

7-3 行星與人造衛星

4. 行星與人造衛星作近似等速圓周運動的向心力都是由萬有引力所提供。

5. 週期 T 之衛星距地心的距離為：$r=(\frac{GM_ET^2}{4\pi^2})^{\frac{1}{3}}$。

6. 「同步衛星」在赤道上空繞地球運轉，其週期與地球的自轉相等，距地心的距離約為地球半徑的 6.6 倍。

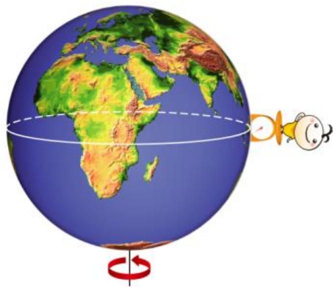
習題

觀念題

1. 是否可以利用牛頓的萬有引力公式 $F=\frac{GMm}{r^2}$，準確計算班上兩位已知質量的同學間萬有引力量值？

2. 已知地球藉著萬有引力繞著太陽公轉，假設太陽質量不變，而太陽半徑突然變小，且只考慮萬有引力，則地球會不會被它吸引而更靠近太陽，或仍繞著它運動？

3. 當地球自轉的速率增加時，請解釋如圖示赤道上的人體重減少的原因？體重是否有可能減輕至零？



4. 不論是觀看美國職棒或世界杯足球賽，這些不在臺灣的運動比賽，常常需要同步衛星傳送訊號，才能使臺灣或世界各地的人一起觀賞精彩的節目，這樣的轉播是否僅用一個人造同步衛星即可呢？這樣的訊號是否可以直接傳遞至地表上任一角落？

5. 依據牛頓萬有引力定律是否可以將地球表面的重力場看成均勻的重力場，也就是量值相同、方向也相同？

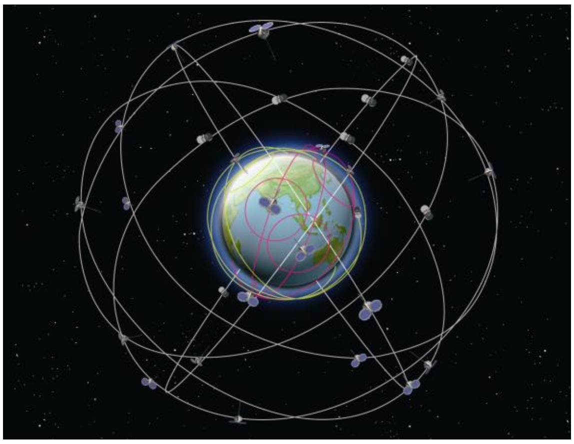
6. 請翻閱基礎物理(一)第三章，試以牛頓萬有引力定律解釋克卜勒三大行星運動定律。

習題

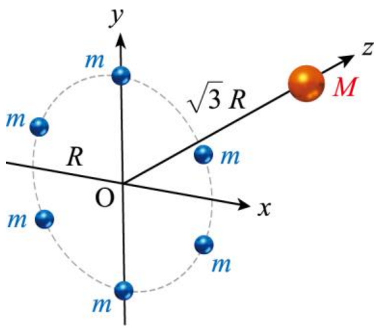
基礎題

■7-1 萬有引力定律

1. 如圖所示，全球衛星定位系統 GPS 的設備，在太空單元指的是：太空中共有二十八個人造衛星（含正常運轉之二十四個與備用之四個衛星），分布在六個夾角各為 60°環地近似正圓的軌道面，距離地球表面 20000 公里之上空，以每 12 小時繞行地球一周，不斷發射無線電波由地面控制站來接收。而今以 27 天來當月球繞地球公轉週期，來估算此兩者的軌道半徑比，則月球的軌道半徑約為 GPS 衛星的幾倍？



2. 如圖所示，在半徑為 R 的圓上，每隔 60°固定放置一質量為 m 之質點，而在通過圓心 O 的 +z 軸距圓心 $\sqrt{3}R$ 處有一質量為 M 的質點，則該質點所受的萬有引力 (F_x, F_y, F_z) 為何？



3. 令月球質量為 M，則地球質量約為 $81M$。設兩者相距為 d，一火箭在兩星球的連心直線上，若二星球對火箭之引力量值相同，此時火箭與月球距離為 a，則 a 等於 (A) $\frac{d}{10}$ (B) $\frac{d}{9}$ (C) $\frac{d}{8}$ (D) $\frac{d}{7}$ (E) $\frac{d}{6}$。

4. 自地面鉛直向上發射一質量為 M、重量為 W 的火箭，當距地面 h 高度時，其質量剩下 $\frac{M}{4}$，重量變為 $\frac{W}{64}$，則 h 為地球半徑之若干倍？

5. 若各行星繞質量 M_S 之太陽運轉時，其克卜勒行星第三定律中之比例常數為 K_S，而各人造衛星繞質量 M_E 之地球運轉時之常數為 K_E，則 $\frac{K_S}{K_E}=$？

7-2 地球表面的重力與重力加速度

6. 假設萬有引力係與兩物體間距離之立方成反比。如以 R 及 T 分別代表行星繞日作圓周運動時之軌道半徑及週期。則下列各種比值中何者對所有行星而言均相同？

(A) $\frac{R^3}{T^2}$　(B) $\frac{R^2}{T^3}$　(C) $\frac{R}{T}$　(D) $\frac{R^2}{T}$ 。

7. 某星球之質量約為地球的 10 倍，半徑為地球的一半，若某大砲在地球表面上可射至高 400 公尺處（不計阻力），則在該星球表面上可射多高？

8. 某星球其平均密度與地球相同，半徑則為地球之兩倍，在地球上重量為 64 公斤重的人到該星球上時其重量為何？

習題

7-3 行星與人造衛星

9. 已知甲衛星以離地 600.0 公里繞地球作圓周運動，乙衛星以離地 1200.0 公里繞地球作圓周運動，如圖所示，則下列有關甲、乙衛星的敘述何者正確？
   (A)甲衛星的向心力為乙衛星的兩倍
   (B)甲衛星繞地球一周的週期大於乙衛星繞地球一周的週期
   (C)甲衛星與地球間的萬有引力為乙衛星與地球間的萬有引力的 4 倍
   (D)甲、乙衛星上的太空人，若腳下置一個磅秤，則磅秤的讀數為零
   (E)甲衛星處的重力加速度為乙衛星處的重力加速度的兩倍。

10. 質量均為 m，且兩兩相距 L 之三個星球成一獨立系統而環繞共同質心運轉，則運轉的角速度為何？

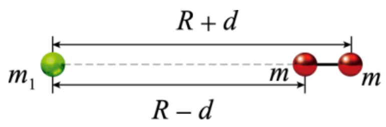
11. 如右圖，設地球為正圓形且半徑為 R，自轉週期 T，則質量 m 之物體：
   (1) 在赤道與南北兩極兩個地點，何者重量較輕？
   (2) 兩處的視重相差若干牛頓？

。

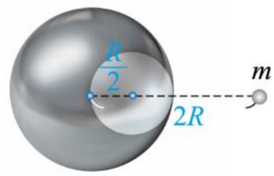
12. 已知某行星自轉週期為T、半徑為R。環繞它的某一衛星之圓軌道半徑為$32R$、繞行週期為$8T$。則環繞該行星運行的同步衛星，其圓軌道半徑應是多少？
(A) $16R$　(B) $8R$　(C) $4R$　(D) $8R$　(E) $2R$。　【100 指考】

綜合題

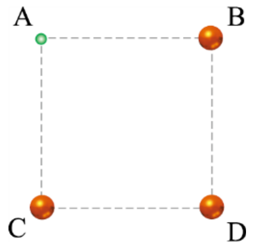
1. 在空間中有一質量 m_1 的物體與另一由兩個 m 連結的物體，雙 m 物體的質心與 m_1 相距為 R，且 m 與 m 相距為 $2d$，如圖所示。則雙 m 系統與 m_1 之間的萬有引力量值為何？當 $d \ll R$時又為何？



2. 如右圖，半徑 R 之鉛球鏤空成一空心球形，鏤空部分的半徑為 $\frac{R}{2}$，且鏤空部分的表面與外表接觸，並通過鉛球中心。鏤空前球的質量為 M，則鏤空後距球心 $2R$ 處，質量 m 的物體所受萬有引力的量值為何？

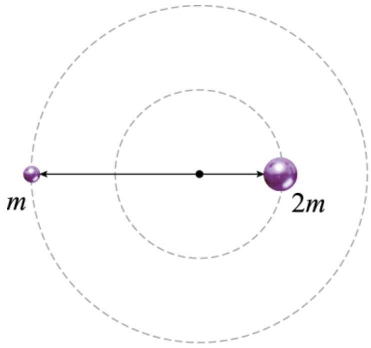


3. 如右圖 ABCD 是邊長為 a 的正方形，於 B、C、D 處各有質量為 m 之物體，求三個物體對 A 點造成的重力場強度。



習題

4. 外太空中有相距 d，質量分別為 m 及 $2m$ 的雙星，在同一平面上互繞其共同質心作等速圓周運動，如圖所示，試求 m 之 (1)軌道半徑 (2)加速度量值 (3)速度量值 (4)週期各為何？



*5. 地球半徑約為 6.4×10^3公里，若地球自轉加快，而使赤道上的物體重量為實際重量的一半，則地球自轉角速度約為多少弧度／秒？

6. 假設太陽系又發現一新行星，公轉方向與地球相同，此星每與地球之距離達到最接近須相隔 $\frac{27}{26}$ 年，若兩者之軌道皆為圓形，則此行星的公轉週期為多少年？

題組

人類在地表（重力加速度為g）的狀態下，人和其內臟的支持物受到壓力，這會使人體組織發生一定的變形，如脊柱的彎曲、軟骨被壓縮等。但當重力場量值改變時，人類的身體會無法適應，而不同的星球產生的表面重力場也可能不同。若某星球之質量約為地球的10倍，半徑為地球的一半， 則：

1. 此星球表面重力場量值約為地球表面重力場量值的多少倍？
(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 40 (E) 50。

2. 若某大砲在地球表面上可射至高800 公尺處（不計阻力），則在該星球表面上可射多高？ (A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 25 公尺。