騎著單車徜徉在山中小徑，清風徐來，欣賞美景，好不愜意，下坡路段，車速常有過快情形，要如何施力，讓車子減速以維護安全，與車子的質量及當時車速有關，討論這些問題時，動量是常用的概念。

CHAPTER 6 6-1 動量與衝量

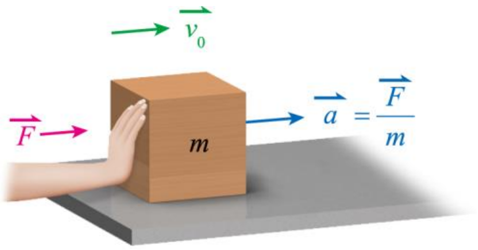
常常在交通意外的新聞中會聽到車輛超速行駛是交通事故發生的主因，當汽車在高速行駛時發生碰撞，常會造成嚴重的車輛損毀（如圖 6-1）；質量很大的車（如砂石車）衝撞肇事所造成的損壞，通常比起小轎車嚴重許多。由此可見物體的速度與質量皆為影響碰撞結果的因素，物理學上以速度與質量的乘積來描述與物體運動相關的現象，而速度與質量的乘積則稱為物體的**動量**（momentum）。

一、動量

以某一固定量值的拉力拉動靜止的物體，會發現當此物體加速到一定的速度需要一定的時間；當拉力加大時，所需要的時間會縮短；而拉力變小時，所需要的時間會增長。定量上來看，以拉力 $\vec{F}$ 拉動質量為 m 的靜止物體，使其末速度達到 $\vec{v}$ ，需要多少時間呢？

考慮一維運動，施一定力 $\vec{F}$ 於置在水平光滑面上質量為 m，初速為 $\vec{v_0}$ 的物體（如圖 6-2），由牛頓第二運動定律可知，物體會以等加速度 $\vec{a}$ （$=\dfrac{\vec{F}}{m}$）作直線運動，而達到末速度 $\vec{v}$ 所經過的時間間隔 Δt ，由上冊第一章可得：

∴圖 6-1　汽車在高速行駛時發生碰撞，常會造成嚴重的車輛損毀。



∴圖 6-2　施一定力 $\vec{F}$ 於置在水平光滑面上質量為 m 的物體。

$$\vec{v} - \vec{v_0} = \vec{a}\,\Delta t = \frac{\vec{F}}{m}\Delta t \text{ ，}$$

上式移項後可以得到：

$$\vec{F}\,\Delta t = m\,\vec{v} - m\,\vec{v_0} = m\Delta\,\vec{v} \tag{6-1}$$

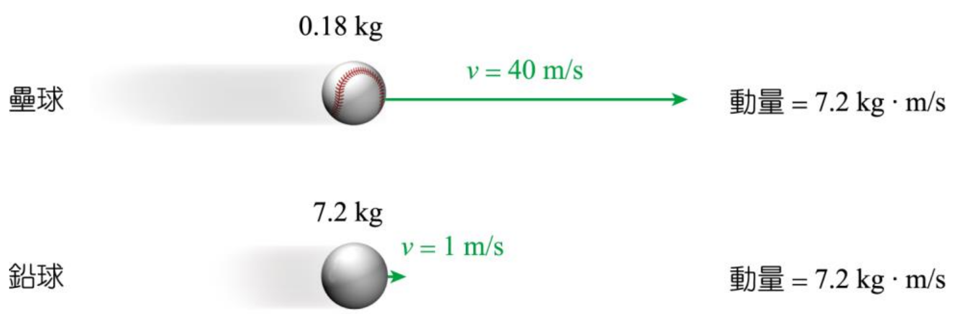
從(6-1)式可知，$\vec{F}\,\Delta t$ 之值不只與物體速度的變化有關，還與物體質量有關。當速度變化量固定時，物體的質量愈大，所需力與力作用時間的乘積便愈大。當 m 不隨時間改變，(6-1)式可以改寫為：

$$\vec{F}\,\Delta t = \Delta(m\,\vec{v}) \tag{6-2}$$

(6-2)式雖然是由一維運動且 m 為定值推導而來，但即使物體是在三度空間中運動或其質量會變化，該數學式仍然成立。這個式子中所導引出來的物理量，即為物體質量 m 與其速度 $\vec{v}$ 的乘積，定義為物體的動量 $\vec{p}$ ，即：

$$\vec{p} = m\,\vec{v} \tag{6-3}$$

動量在物理學中具有很重要的意義，是一個向量，與速度同方向，其單位為公斤・公尺／秒（kg・m/s）。以一顆質量為 0.18 公斤的壘球為例（如圖 6-3），雖然它的質量比鉛球小了很多，當投手投球時球速達 40 公尺／秒（144 公里／時），它可以與質量約為 7.2 公斤（重 16 磅）的鉛球以 1 公尺／秒（3.6 公里／時）的速度拋出時，具有幾乎相同的動量。



∴圖 6-3　一顆高速運動的壘球與緩慢運動的鉛球，可以具有相同的動量。

例題　6-1

下圖所示各物體的動量量值各為多少？

解

(1)　子彈的動量量值 $=1.0\times10^{-2}\times3.0\times10^{2}=3.0$（kg・m/s）。

(2)　籃球的動量量值 $=6.0\times10^{1}\times3.0=1.$（kg・m/s）。

(3)　先將時速換算成公尺／秒，

$$36\ (\text{km/h}) = \frac{36\times1000}{60\times60}\ (\text{m/s}) = 10\ (\text{m/s})，$$

汽車的動量量值 $=1200\times10=1200$（kg・m/s）。

自我練習

一個質量 75 公斤的短跑選手，以 10.0 公尺／秒的速率衝刺，其動量量值為多少？

依照動量的定義，考慮在一極短的時間間隔內，(6-2)式可改寫為：

$$\vec{F}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \qquad (6\text{-}4)$$

此式在物理發展史上具有重要的意義，也是牛頓原本所用來描述第二運動定律的敘述：

作用於物體的外力等於物體動量的時變率。

如果是數個力作用在一物體上，則上式中之「外力」需改為「所有外力之

合力」。值得一提的是，牛頓當初使用的詞語是物體「**運動的量**」（quantity of motion）來表示物體質量與其速度的乘積，這也就是目前所稱的動量。當物體的質量在運動過程中維持一定，則(6-4)式可以簡化為：

$$\vec{F}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t}=m\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=m\vec{a} \qquad (6\text{-}5)$$

這就是大家熟知的牛頓第二運動定律之數學形式。在物體質量隨時間變化的情形下，(6-5)式並不合用，這時我們仍可以用適用範圍較廣的(6-4)式來討論物體的運動狀況。

Note

1. $\vec{F}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$，以分量方式表示為

$$F_x=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta p_x}{\Delta t}、F_y=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta p_y}{\Delta t}、F_z=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta p_z}{\Delta t}，$$

即不同方向的分量可獨立成式。

2. 一物理量的時變率就是該物理量的變化除以時間間隔，表示該物理量隨時間的變化率，例如位置的時變率為速度，即 $\vec{v}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$。

例題　6-2

某物體質量為 2.0 公斤，速度為 8.0 公尺／秒，在光滑水平面上向東運動。

(1) 此物體動量為何？

(2) 若此物體受到某一水平定力作用下，測得 3.0 秒後，此物體的速度為 14 公尺／秒向東運動，則此 3.0 秒內物體受力為何？

思路：物體所受外力等於其動量的時變率，$\vec{F}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m\vec{v}}{\Delta t}$，因 $\vec{F}$ 為定力，平均作用力等於瞬時之作用力，且質量一定，故 $\vec{F}=m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$。

解　(1)動量 $\vec{p}=m\vec{v}$，即動量的量值 $p=2.0\times 8.0=1$（kg · m/s）方向向東。

(2)當質量不變時，受力 $\vec{F}=\frac{\Delta(m\vec{v})}{\Delta t}=\frac{m\Delta\vec{v}}{\Delta t}$，即 $F=\frac{2.0\times(14-8.0)}{3.0}=4.0$（N）方向向東。

例題 6-2 中，若此物體受到 2.0 牛頓向東的定力作用，6.0 秒後物體動量為多少？

二、衝量

棒球比賽中捕手接住投手投來的球，棒球原本具有動量，而當棒球落入手套後，其動量變為零，捕手感受到棒球給予手套的衝擊而使手心隱隱作痛，因此常見到捕手在接住棒球時會將手套略為後移，使接球時間拉長，這可使手套上所受到的衝擊力量減小（如圖 6-4）。由以上可知，衝擊力量與作用時間有關，在物理上定義為物體所受外力 $\vec{F}$ 與力作用時間 Δt 的乘積為**衝量**（impulse），即：

$$\vec{J} = \vec{F}\,\Delta t \qquad (6\text{-}6)$$

重新整理(6-2)式、(6-3)式與(6-6)式可得到：

$$\vec{J} = \vec{F}\,\Delta t = \Delta\vec{p} \qquad (6\text{-}7)$$

也就是說，作用在物體的衝量等於該物體動量的變化，這一關係稱為**衝量—動量定理**（impulse-momentum theorem）。衝量也是向量，其單位為公斤．公尺／秒

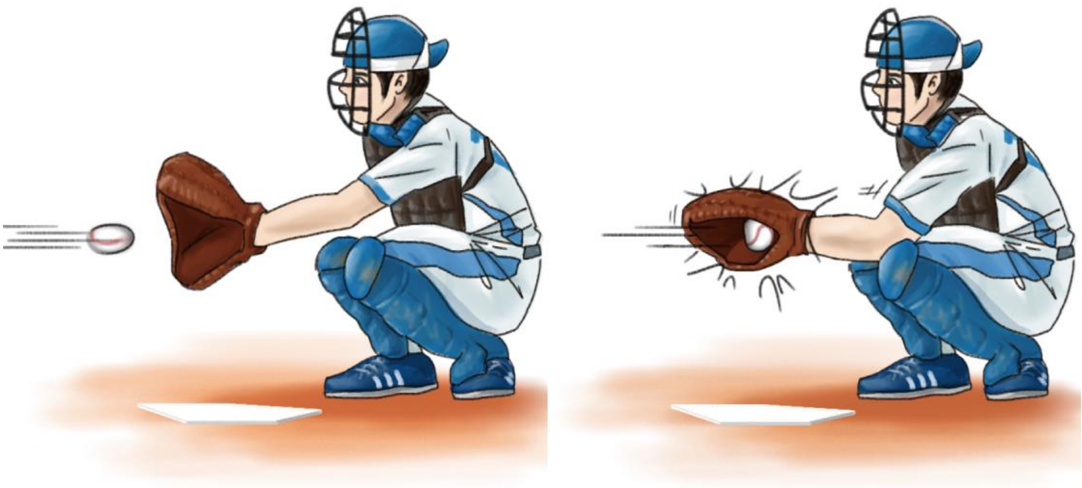


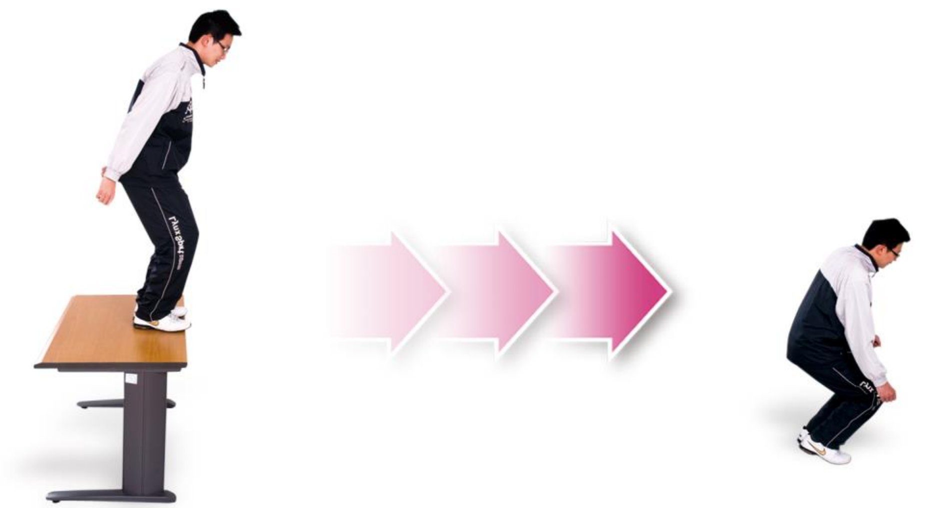
圖 6-4　捕手在接住棒球時會將手套略為後移，減小手套上所受到的作用力。

（kg · m/s）或牛頓 · 秒（N · s），與動量具有相同的單位。前述捕手在接住棒球時手套後移，可以減少痛感，是因為將球接住到完全停住所經時間間隔 Δt 拉長，由(6-6)式可知 $\vec{F}$ 變小，即將使接球時受到的作用力減小。

藉由測量觀察物體質量與速度，日常生活中有很多物體的動量變化是可以知道的，但是力的量測就不那麼直接。舉例而言，人從高處跳到地面，只要知道人的質量與接觸地面瞬間的速度，便可以輕易地知道人與地面接觸前後的動量變化；但是人與地面接觸是在很短的時間內發生的，要能在這極短的時間間隔內，
用彈簧或是其他可以量測力的儀器度量作用力而又不影響碰撞過程，是很困難的任務。但是由(6-7)式可得物體所受的平均作用力 $\vec{F}$ 等於物體所受衝量 $\vec{J}$ 除以作用時間 Δt，即：

$$\vec{F}=\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}=\frac{\vec{J}}{\Delta t} \tag{6-8}$$

只要知道碰撞作用時間 Δt，便可以推得人著地所受平均力的量值。如圖 6-5 所示，人跳落地面時，經常雙腳會自然彎曲，可以增加著地到停止前所經過的時間，由(6-8)式可以知道人所受的撞擊力量因而減小，可以減輕傷害的程度。



∴圖 6-5　人從高處跳落地面時，雙腳會自然彎曲，以減少傷害。

交通意外中，由於車輛發生碰撞後常常在很短的時間內會有很大的動量變化，因此駕駛人會承受巨大的力量。乘車繫上安全帶可以在車輛發生碰撞時繫住駕駛人，延長駕駛人與方向盤的碰撞過程，安全氣囊開始充氣再給予緩衝作用，增加乘客運動停止前所經過的時間，以降低衝擊力（如圖 6-6）。

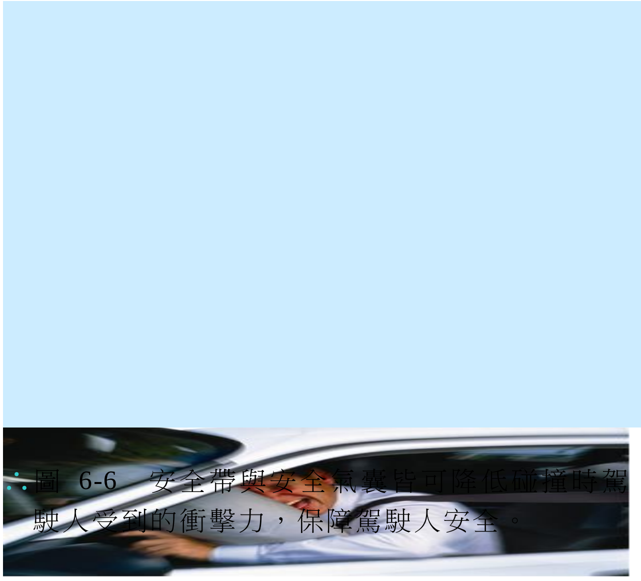


圖 6-6 安全帶與安全氣囊皆可降低碰撞時駕駛人受到的衝擊力，保障駕駛人安全。

例題 6-3

車輛以 72 公里／時的速度行駛，若發生正面碰撞使車輛停止，碰撞時間共歷時 0.2 秒，此時車內乘客要將一個 10 公斤的小孩抱住，所需平均力的量值為多少？此力量是否為人力可及？

思路：乘客對小孩施加的衝量等於車輛中小孩的動量變化。

解 先將車速的單位換算為公尺／秒，

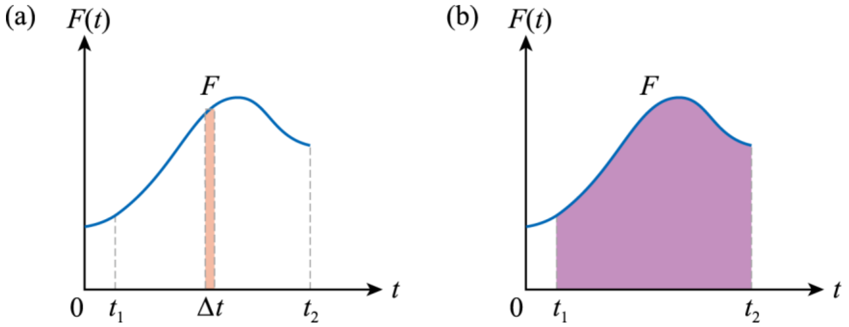
$$72（公里／時）=\frac{72000（公尺）}{3600（秒）}=20（公尺／秒），$$

由 $\vec{p}=m\vec{v}$，碰撞期間小孩的動量變化量 $=0-10\times 20=-200$（kg · m/s），

平均施力量值 $F=\dfrac{200}{0.2}=1000$（N），

1000 N 亦即約 100 公斤重之力，以水平方向施力，非一般人力可及，故依道路交通管理處罰條例第 31 條規定，兒童乘車時應坐在安全座椅上。

上述之撞擊過程中，在 Δt 時間間隔內所受的外力如果不是一個定值，衝量又該如何計算？當施力方向固定時，外力是時間的函數，如圖 6-7 將施力 $F(t)$ 對時間 t 作圖，則在一極短時間間隔 Δt 中，物體所受的力可視為定力，衝量 $J=F\Delta t$，即為圖 6-7(a) 中橘色區域的面積，而在 t_1 至 t_2 時間中的總衝量，則是在圖 6-7(b) 中紫色區域的面積，亦即 $F(t)-t$ 圖曲線與 t 軸所包圍的面積。



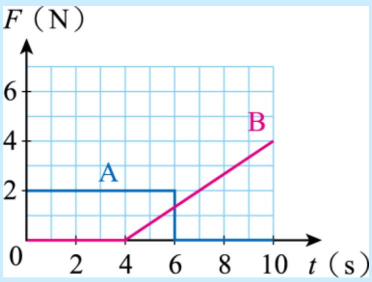
∴圖 6-7　施力 $F(t)$ 對時間 t 作圖，$F(t)$ 曲線與 t 軸所包圍的面積即為衝量。

想一想

1. 同樣甩動手臂，撞擊到桌面比撞擊到書包來得疼痛，原因為何？
2. 當我們甩動手臂時，撞擊到桌角比撞擊到桌面來得疼痛，其主要原因與第 1 題所討論的因素有何不同？

例題　6-4

一物體質量 10 公斤，原為靜止於光滑水平面上，A、B 兩人沿同一水平方向對物體施力，其 $F(t)-t$ 圖如右圖所示。則 10 秒內 A、B 所施衝量量值各為多少？而物體末速度量值為多少？



思路：(1)衝量 $\vec{J}=\vec{F}\Delta t$，其量值為 $F(t)-t$ 圖曲線與 t 軸所包圍的面積。
(2)A、B 兩人施力方向相同，總衝量量值為兩人所施衝量量值之和。

解　A 所施衝量量值 $J_A = 2\times6 = 12$（N．s），

B 所施衝量量值 $J_B = \dfrac{1}{2}\times4\times(10-4) = 1$:（N．s），

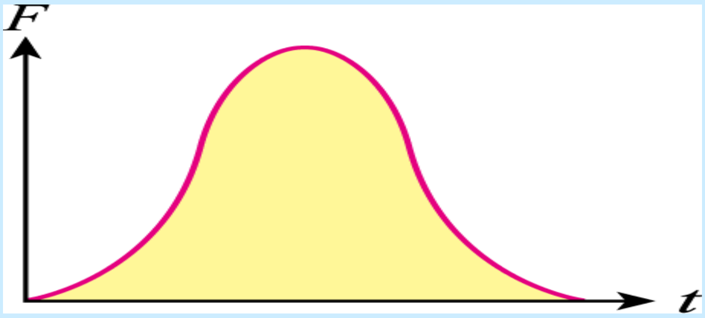
又 $\vec{J} = m\Delta\vec{v}$ ， $J_A + J_B = 24 = 10\times v$ ， $v = 2.4$（m/s）。

自我練習

例題 6-4 中，依圖中施力方式，何時物體的速率達到 1.5 公尺／秒？

例題　6-5

一般的近海漁船常在船側掛了很多舊輪胎，如下左圖所示，以減小靠岸時或漁船之間的碰撞力與擦撞，若一艘 10 公噸的漁船以 1.0 公尺／秒的速度靠向岸邊，接觸時間為 1.4 秒，碰撞期間所受作用力與時間關係如下右圖所示，圖形中黃色面積為 14000 牛頓．秒，則接觸期間船所受的平均作用力的量值為何？碰撞後船速為何？



思路：衝量即為 $F-t$ 圖曲線下之面積，船所受衝量與原動量方向相反。

解　平均力量值 $F = \dfrac{J}{\Delta t} = \dfrac{14000}{1.4} = 10000$（N），

衝量亦即動量變化量， $J = \Delta p = 10000\times v' - 10000\times 1.0 = -140$：，

$v' = -0.40$（m/s），碰撞後船以 0.40 m/s 的速度反向遠離岸邊。

自我練習

例題 6-5 中，若該船以 1.0 公尺／秒的速度遠離岸邊而去，某人抓住纜繩欲使船停止，且其水平方向最大施力為 200 牛頓，則至少需花多少時間？

CHAPTER 6 6-2

質心運動

由兩個以上質點組合成的系統，稱為**質點系統**（system of particles），一般所稱的物體是由呈連續分布的許多質點所組成。如圖 6-8，騎乘單車飛躍入湖，身體各部分可以想像為由許多個質點組合而成，分析各質點運動狀態非常複雜，但是藉由分析身體質心運動軌跡可以簡化問題，因此在討論物體運動行為時，常以質心為代表點。在討論質點系統的質心運動問題之前，我們先來討論兩質點所組成的系統。

∴圖 6-8　騎乘單車飛躍入湖，藉由分析身體質心運動軌跡可以簡化問題。

一、兩個質點系統的質心運動

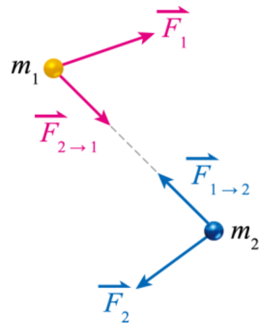
假設有兩個質量分別為 m_1 與 m_2 的質點，質點 m_1 受到外力 $\vec{F_1}$ 與來自質點 m_2 的作用力 $\vec{F}_{2\to1}$（如圖 6-9）；質點 m_2 則受到外力 $\vec{F_2}$ 與來自質點 m_1 的作用力 $\vec{F}_{1\to2}$。由牛頓第二運動定律可以得到：

$$\vec{F_1}+\vec{F}_{2\to1}=m_1\vec{a_1}，$$

$$\vec{F_2}+\vec{F}_{1\to2}=m_2\vec{a_2}，$$

兩式相加可以得到：

$$\vec{F_1}+\vec{F}_{2\to1}+\vec{F_2}+\vec{F}_{1\to2}=m_1\vec{a_1}+m_2\vec{a_2}。$$



∴圖 6-9　兩質點所組成的系統中的受力與運動。

Note

本節下標的表示法為「$\vec{F_1}$」表質點 m_1 受到的外力，「$\vec{F}_{1\to2}$」表質點 m_1 給予質點 m_2 的作用力（m_1 與 m_2 系統的內力）。

由於 $\vec{F}_{2\to1}$ 與 $\vec{F}_{1\to2}$ 為作用力與反作用力，其量值相等，方向相反，對於質點系統而言稱為內力，因此由牛頓第三運動定律可得 $\vec{F}_{2\to1}=-\vec{F}_{1\to2}$，故：

$$\vec{F_1}+\vec{F_2}=m_1\vec{a_1}+m_2\vec{a_2} \tag{6-9}$$

此外，根據上冊(3-19)式質心位置的定義 $\vec{r_C}=\dfrac{m_1\vec{r_1}+m_2\vec{r_2}}{m_1+m_2}$，因此質心的速度 $\vec{v_C}$ 與加速度 $\vec{a_C}$ 分別為：

$$\vec{v_C}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\vec{r_C}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{m_1\Delta\vec{r_1}+m_2\Delta\vec{r_2}}{(m_1+m_2)\Delta t}=\frac{m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2}}{m_1+m_2} \tag{6-10}$$

由(6-10)式知，只要知道兩質點的速度與質量，即可求出它們質心的速度。

$$\vec{a_C}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{\Delta\vec{v_C}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to0}\frac{m_1\Delta\vec{v_1}+m_2\Delta\vec{v_2}}{(m_1+m_2)\Delta t}=\frac{m_1\vec{a_1}+m_2\vec{a_2}}{m_1+m_2} \tag{6-11}$$

移項可得：

$$(m_1+m_2)\vec{a_C}=m_1\vec{a_1}+m_2\vec{a_2}$$

$(m_1+m_2)\vec{a_C}$ 即為系統所受的外力 $\vec{F}$，因此：

$$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}=m_1\vec{a_1}+m_2\vec{a_2}=(m_1+m_2)\vec{a_C} \tag{6-12}$$

由此式可知，系統內質點間的相互作用力並不影響質心的運動。由於系統質量：

$$M=m_1+m_2$$

改寫(6-12)式可得：

$$\vec{F}=M\vec{a_C} \tag{6-13}$$

因此質點系統的運動狀態可以用其所受外力與質心加速度關係式(6-13)式表示之。

6

二、質點系統的質心運動

考慮一個由 N 個質點組合成多質點系統，系統內各個質點的質量分別為 m_1、m_2、m_3、⋯、m_i、⋯、m_N，作用在質點 m_i 上的力為 $\vec{F_i}+\vec{F}_{1\to i}+\vec{F}_{2\to i}+\vec{F}_{3\to i}+\cdots+\vec{F}_{j\to i}+\cdots$（$i\neq j$），當我們把 N 個質點所受總力相加可得：

$$\vec{F}=(\vec{F_1}+\vec{F}_{2\to 1}+\vec{F}_{3\to 1}+\vec{F}_{4\to 1}+\cdots)+(\vec{F_2}+\vec{F}_{1\to 2}+\vec{F}_{3\to 2}+\vec{F}_{4\to 2}+\cdots)$$

$$+(\vec{F_3}+\vec{F}_{1\to 3}+\vec{F}_{2\to 3}+\vec{F}_{4\to 3}+\cdots)+\cdots \tag{6-14}$$

由於 $\vec{F}_{j\to i}$ 與 $\vec{F}_{i\to j}$ 為一對作用力與反作用力，故：

$$\vec{F}_{j\to i}=-\vec{F}_{i\to j}$$

因此在(6-14)式中，系統所受作用力與反作用力兩兩相抵消後只餘下外力：

$$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\cdots=\sum_i\vec{F_i}$$

推廣(6-12)式可以得到：

$$\vec{F}=\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}+\cdots=m_1\vec{a_1}+m_2\vec{a_2}+m_3\vec{a_3}+\cdots$$

$$=\sum_i m_i\vec{a_i}=(\sum_i m_i)\vec{a_C}=M\vec{a_C} \tag{6-15}$$

假想把系統全部的質量集中在質心，質心的加速度 $\vec{a_C}$ 相當於總外力 $\sum_i\vec{F_i}$ 作用在質心時所產生的加速度。

再推廣(6-10)式：

$$\vec{v_C}=\frac{m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2}+\cdots}{m_1+m_2+\cdots}$$

$$m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2}+\cdots=M\vec{v_C}=(m_1+m_2+\cdots)\vec{v_C}$$

即：

$$\vec{p}=M\vec{v_C}=\vec{p_1}+\vec{p_2}+\vec{p_3}+\cdots \tag{6-16}$$

上式的物理意義為系統總動量為各質點之動量和；那內力是否影響系統總動量呢？由於質點間相互作用的力屬於內力，系統任兩質點互相作用力的量值相等但方向相反，因此造成的動量變化量，也是量值相等方向相反的，換言之，質點間的內力並不會改變系統的總動量。

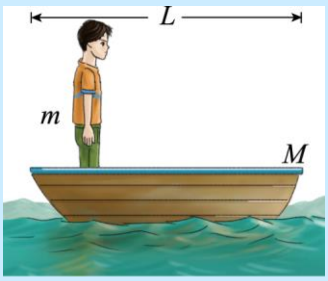
便利貼

系統質心與系統各質點物理量之關係

1. 系統質量 M ⇒ $M=\sum_i m_i$
2. 質心位置 $\vec{r}_C$ ⇒ $\vec{r}_C=\dfrac{\sum_i (m_i \vec{r}_i)}{\sum_i m_i}$
3. 質心位移 $\Delta\vec{r}_C$ ⇒ $\Delta\vec{r}_C=\dfrac{\sum_i (m_i \Delta\vec{r}_i)}{\sum_i m_i}$
4. 質心速度 $\vec{v}_C$ ⇒ $\vec{v}_C=\dfrac{\sum_i (m_i \vec{v}_i)}{\sum_i m_i}$
5. 系統動量 $\vec{p}$ ⇒ $\vec{p}=M\vec{v}_C=\sum_i \vec{p}_i$
6. 質心加速度 $\vec{a}_C$ ⇒ $\vec{a}_C=\dfrac{\sum_i (m_i \vec{a}_i)}{\sum_i m_i}$
7. 系統受力 $\vec{F}$ ⇒ $\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i$

例題 6-6

靜止的湖面上一小船質量為 M，長度為 L，質量為 m 的小威原本靜止地站在船頭，如圖所示，且不計水的阻力。若小威向船尾起跑，腳底對船水平方向施力平均量值為 F，則小威與船的加速度各為多少？人船系統的質心加速度為多少？



思路：(1)小威與船受力量值均為 F。

(2)系統質點間的作用力不改變系統總動量，亦不造成質心加速度。

解　取向右為正，小威起跑時對船水平方向施力為 $-F$，此即為船所受之力，

由 $\vec{F}=M\vec{a_1}$，船的加速度 $a_1=\dfrac{-F}{M}$，負號表示方向向左。

小威亦受船施予量值為 F 的水平方向反作用力，

由 $\vec{F}=m\vec{a_2}$，故小威的加速度 $a_2=\dfrac{F}{m}$，方向向右。

小威與船之間的作用力，對人船系統而言為內力，系統無外力作用，

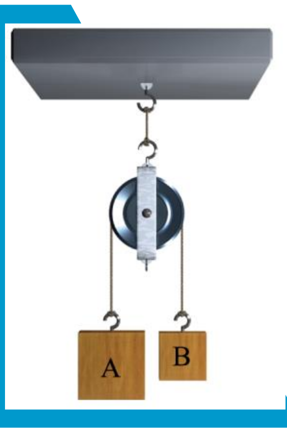
由(6-13)式可知人船系統的質心加速度為零。

自我練習

小威在船上來回奔跑，是否會改變人船系統的質心速度？

例題　6-7

如右圖所示的裝置稱為阿特午機，使用一質量可忽略且無摩擦的定滑輪，一輕繩跨過滑輪，兩端各懸掛質量為 6.0 公斤與 4.0 公斤之 A、B 兩物體。由靜止釋放後歷時 3.0 秒，求此時 A、B 兩物體的質心速度與質心加速度。（設重力加速度 $g=10$ 公尺／秒 ^{2}）



解　由上冊圖 4-17 阿特午機之介紹所得關係式

$\vec{a_A}=\dfrac{m_A-m_B}{m_A+m_B}\vec{g}$，取方向向上為正，

A 的加速度 $a_A=\dfrac{6.0-4.0}{6.0+4.0}\times(-10)=-2.($（m/s^2），負號表示方向向下。

B 的加速度與 A 的加速度量值相等、方向相反，故 $a_B=2.0$（m/s^2），方向向上。

3.0 秒之末速 $v_A = -2.0 \times 3.0 = -6.$（m/s）；$v_B =$ 0236 $=$ （m/s），

質心速度 $\overrightarrow{v_C} = \dfrac{m_A \overrightarrow{v_A} + m_B \overrightarrow{v_B}}{m_A + m_B}$，

$$v_C = \frac{6.0 \times (-6.0) + 4.0 \times 6.0}{4.0 + 6.0} = -1.2$$（m/s），負號表示方向向下，

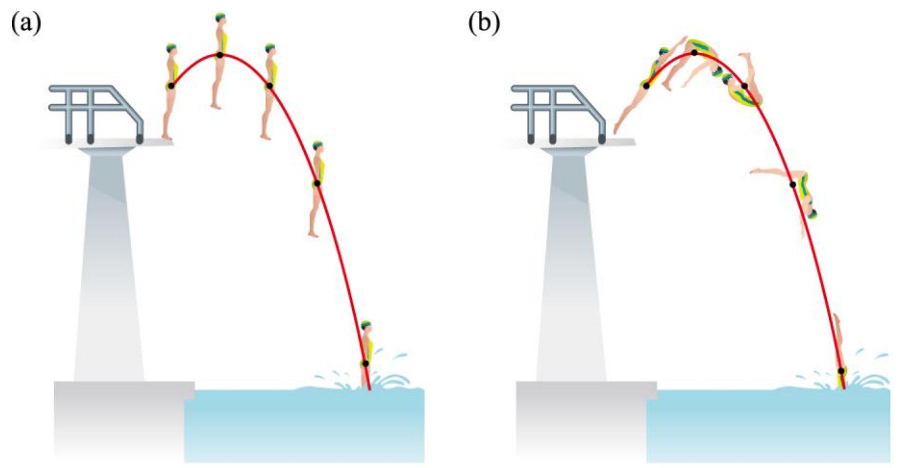
質心加速度 $\overrightarrow{a_C} = \dfrac{m_A \overrightarrow{a_A} + m_B \overrightarrow{a_B}}{m_A + m_B}$，

$$a_C = \frac{4.0 \times 2.0 + 6.0 \times (-2.0)}{4.0 + 6.0} = -0.40$$（m/s^2），負號表示方向向下。

| 自我練習 |

例題 6-7 中，若以質心加速度計算 3.0 秒末之質心速度，結果是否相同？

若忽略空氣阻力，當跳水選手以保持直立的姿勢跳入水中，身體各部分的運動軌跡皆為拋物線，身體質心運動軌跡也是拋物線（如圖 6-10(a)）。若選手以翻轉的方式跳入水中，選手身上各點的軌跡非常複雜，但是分析觀察結果可以發現，運動過程中選手所受的外力和僅為重力，因此身體質心仍沿拋物線運動（如圖 6-10(b)）。



∴圖 6-10　跳水選手跳入水中的過程中，其質心運動的軌跡皆為拋物線。

6

例題 6-8

質量為 m 的砲彈以 v_0 之初速，θ 之仰角自地面射出，若砲彈在達最高點後爆裂為質量相等的 A、B 兩碎塊，且兩碎塊同時著地。已知其中 A 碎塊以初速為零自由落下，求 B 落地之處與出發點的水平距離。

思路：(1)起拋至落地期間，砲彈所受總外力僅為重力，在著地前，不論砲彈爆裂與否，其質心的軌跡相同。

(2)兩碎塊落地前，其質心位置即為砲彈未爆裂狀態之落地點。

解　以起拋點為原點，若砲彈未曾爆裂，依上冊第二章拋體運動(2-29)式，

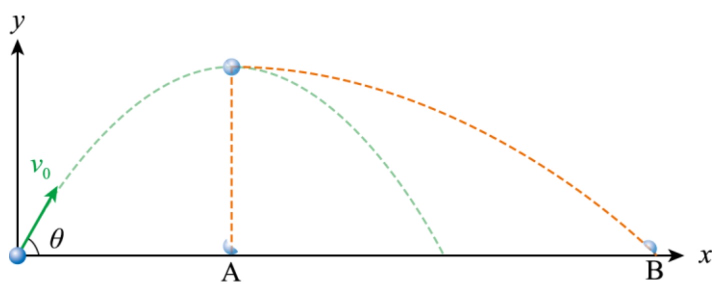
其射程 $R_C = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$，

A 落點為未爆裂砲彈射程之半，$R_A = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$，

又質心落點與出發點的水平距離 $R_C = \dfrac{\frac{m}{2}R_A + \frac{m}{2}R_B}{\frac{m}{2} + \frac{m}{2}} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{g}$，

可得 $R_B = \dfrac{3v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$，

故 B 落地之處與出發點的水平距離為 $\dfrac{3v_0^2 \sin 2\theta}{2g}$。



CHAPTER 6 6-3 動量守恆

一、動量守恆律

由牛頓第二運動定律(6-4)式可以知道動量的時變率等於施於物體上的外力和，

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F} \tag{6-17}$$

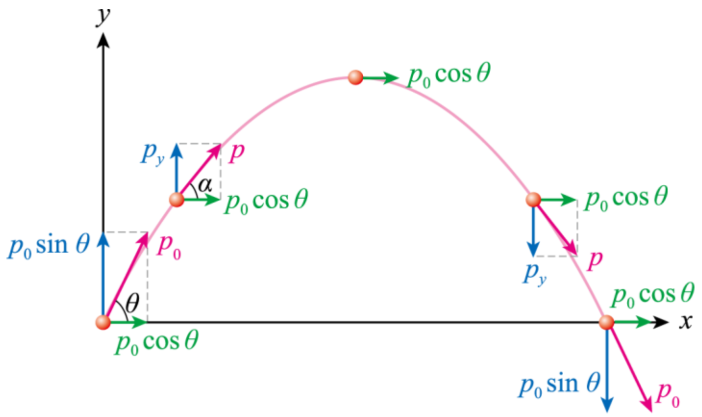
因此如果物體所受外力和為零，則動量的時變率為零，也就是說動量不隨時間而變，為一個定值，以數學形式表示為：

$$\vec{p} = m\vec{v} \text{ 為定值} \tag{6-18}$$

此時，若物體原先為靜止，則物體保持靜止狀態；若物體原先速度為 $\vec{v_0}$ ，則物體以 $\vec{v_0}$ 作等速運動。

動量守恆的例子在日常生活中隨處可見，例如圖 6-11 中在手中拋接的球，若不考慮空氣阻力，物體只受到鉛直向下的重力作用，因此在鉛直的方向上會有動量的改變，考慮質量固定的情況，則鉛直方向上的速度會改變；但是在水平方向上物體不受力，因此動量維持不變，這是一種斜拋運動，如圖 6-12，亦即水平方向上的動量是守恆的，故水平方向上的速度不變。

∴圖 6-11 在雙手中拋接的球為一斜拋運動。



∴圖 6-12 物體的斜拋運動中，水平方向上的動量是守恆的。

二、質點系統的動量守恆

前頁所討論的系統僅限於單一質點，如果是多質點系統受力運動，則以「物體動量的時變率等於作用於物體的外力」描述的牛頓第二運動定律式，即(6-4)式，多質點系統所受之作用力即為系統中各質點受外力之向量和，(6-17)式可以改寫為：

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \cdots$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p_2}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p_3}}{\Delta t} + \cdots$$

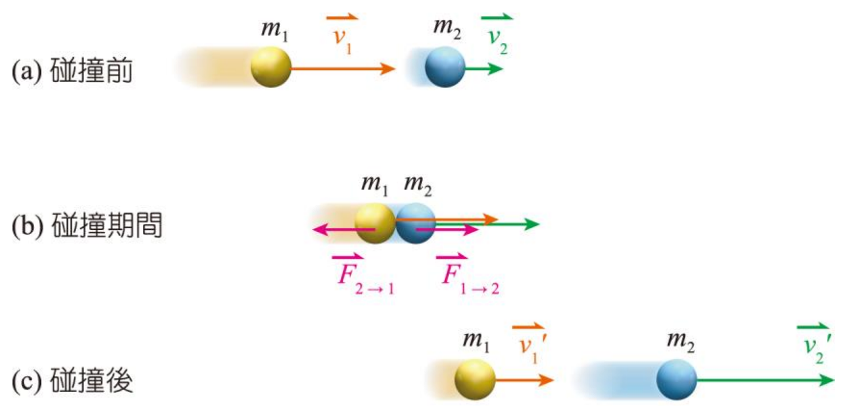
$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p_1} + \Delta \vec{p_2} + \Delta \vec{p_3} + \cdots}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} \text{ ,}$$

上式中 $\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3} + \cdots$ 為系統總動量，因此多質點系統所受的外力和等於系統總動量的時變率。若系統不受外力作用，則其總動量維持不變，這就是質點系統的動量守恆律，以數學式表示如下：

$$\sum_i \vec{p_i} = \sum_i m_i \vec{v_i} \text{ 為定值} \qquad (6\text{-}19)$$

研究質點間交互作用所產生的影響，最常見的就是兩質點一維的碰撞，假設有兩個質量分別為 m_1 與 m_2 的質點，分別以 $\vec{v_1}$ 與 $\vec{v_2}$ 的速度運動，並發生碰撞，兩個質點碰撞後分別以 $\vec{v_1'}$ 與 $\vec{v_2'}$ 的速度運動，如圖 6-13 所示。若設兩質點碰撞的期間沒有外力作用，由(6-19)式可知碰撞前後系統總動量不變：

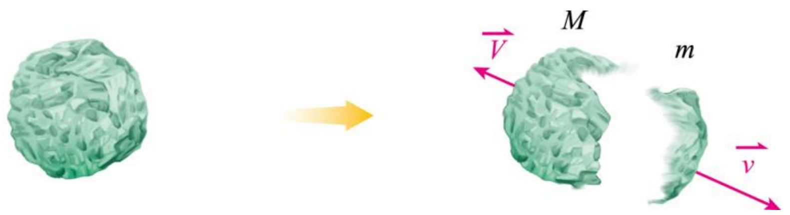
$$m_1 \vec{v_1} + m_2 \vec{v_2} = m_1 \vec{v_1'} + m_2 \vec{v_2'} \qquad (6\text{-}20)$$



∴ 圖 6-13　質量分別為 m_1 與 m_2 的兩質點發生碰撞。

雖然系統合力為零時，系統總動量變化量為零，但是每一質點仍然受到系統內其他質點的作用，因此個別質點還是可能有動量的改變。以兩質點所組成的系統而言，由於質點間相互作用的力屬於內力，其量值相等方向相反，因此兩質點各自的動量變化量，也是量值相等方向相反的，但系統總動量不變。

常見的動量守恆例子中，除了碰撞過程外，物體爆炸時由於過程短暫，動量大致不變，也是遵守動量守恆律的例子。為簡化問題，考慮一原先靜止的物體裂開成為兩個部分（如圖 6-14），其質量分別為 M 及 m，速度則分別為 $\overrightarrow{V}$ 及 $\overrightarrow{v}$，靜止物體原先的動量為零，由於系統總動量保持不變，因此裂開解體後各部分的動量和也是零；由 $0=M\overrightarrow{V}+m\overrightarrow{v}$，得 $\overrightarrow{V}=-\dfrac{m}{M}\overrightarrow{v}$，可知兩者速度方向相反，且速率與質量成反比。



∴圖 6-14　原先靜止的物體裂開成為兩個部分後，$M\overrightarrow{V}=-m\overrightarrow{v}$。

例如步槍射擊時（如圖 6-15），子彈和步槍所組成的系統在擊發前總動量為零，子彈發射後它們的動量和也應該是零，由於子彈速度很快，甚至高達 900 公尺／秒（聲速約為 330 公尺／秒），因此在擊發後，步槍動量與子彈動量二者量值相等，方向相反。這也就是步槍在發射子彈時會反衝造成後座力的原因。煙火綻開時，煙花總是往四面八方綻放，而不是只往單一方向運動，這是因為爆炸瞬間也是遵守動量守恆律的例子。

∴圖 6-15　在擊發後，步槍動量與子彈動量二者量值相等，方向相反。

6

Note

燃火當空固然受重力作用，但爆炸時間很短，討論爆炸前後的動量變化可以忽略重力的作用。

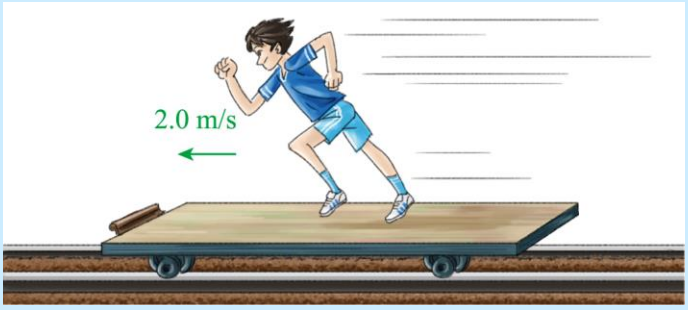
想一想

1. 對著牆壁練習網球時，網球會被牆壁反彈回來。網球在與牆壁碰撞前後，動量明顯有改變，但是牆壁穩固不動，動量似乎沒有改變，這是否違反了動量守恆律？
2. 原為靜止狀態的甲乙兩人穿溜冰鞋立於冰上，當兩人互推而運動，則應如何界定所要討論的系統，才會符合動量守恆？

例題　6-9

水平光滑的軌道上有一質量為 100 公斤的台車，上載一 50 公斤的人，台車原為靜止。

(1)當該人以對地 2.0 公尺／秒的水平速度，向左方奔跑，如圖所示，此時台車對地的速度為何？



(2)承上，該人隨後又停止奔跑，此時台車的速度為何？

思路：軌道為水平光滑，故人車系統在水平方向不受外力，奔跑前後動量守恆。

解 (1)依動量守恆：$m_1\vec{v_1}+m_2\vec{v_2}=0$，取水平方向向右為正，

$0=50\times(-2.0)+100v_2$，$v_2=1.0$（m/s），故車速為向右 1.0 m/s。

(2)停止奔跑之後，人車速度相同，且仍維持動量守恆，故車速為零。

自我練習

若台車原以 10 公尺／秒的速度行進，當車上之人以對地 4.0 公尺／秒速度，仰角 60°向後（逆車行方向）躍起瞬間，台車的速度為何？

例題 6-10

在例題 6-8 中，砲彈在最高點爆裂成質量相等的 A、B 兩碎塊時，如右圖所示，恰使 A 之速度變為零，則此瞬間 B 之速度 $\vec{v_B}$ 為何？

思路：砲彈爆裂時，水平方向不受外力，故水平方向之動量守恆。鉛直方向雖受重力作用，但爆裂視為瞬間完成，故鉛直方向之動量亦守恆。

解 砲彈在最高點之水平動量為 $mv_0\cos\theta$，鉛直動量為零，砲彈爆裂係瞬間完成，故爆裂前後動量守恆，設 $\vec{v_B}=v_{Bx}\hat{i}+v_{By}\hat{j}$，

鉛直方向：$0=\frac{m}{2}\times0+\frac{m}{2}\times v_{By}$，$v_{By}=0$，

水平方向：$mv_0\cos\theta=\frac{m}{2}\times0+\frac{m}{2}\times v_{Bx}$，$v_{Bx}=2v_0\cos\theta$，

爆裂後瞬間 B 之速度為 $2v_0\cos\theta$，方向與砲彈爆裂前相同。

自我練習

若 A、B 兩碎塊之質量比為 1：2，爆裂後瞬間 A 之速度仍為零，則此瞬間 B 之速度為何？

6

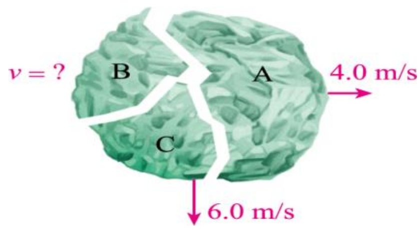
例題　6-11

如圖所示，原為靜止的物體爆裂成 A、B、C 三塊，質量分別為 $2m$：m：m，已知碎塊皆在同一水平面上，若 A 以 4.0 公尺／秒向東飛出，C 以 6.0 公尺／秒向南飛去，則 B 的速度為何？

解　水平面上的動量守恆，

可分成互相垂直的兩方向來討論，

以向東定為 $+x$ 方向，向北定為 $+y$ 方向，



東西方向： $2m\times 4.0 + p_x = 0$，

$p_x = m\times v_x = -2m\times 4.0$， $v_x = -8.0$（m/s），

南北方向： $m\times(-6.0) + p_y = 0$，

$p_y = m\times v_y = m\times 6.0$， $v_y = 6.0$（m/s），

故 B 的速度量值 $=\sqrt{8.0^2+6.0^2}=1.0\times 10$（m/s），

$\tan\theta=\dfrac{6}{8}=\dfrac{3}{4}$， $\theta=37°$ 方向為西偏北 37°。

自我練習

爆炸瞬間，A、B、C 三塊的運動方向是否可能不在同一平面上？

CHAPTER 6 6-4 角動量守恆

靜止的物體受外力作用，物體會因受力加速而開始移動；要使物體轉動，則需要施一力矩。由 6-1 節中牛頓第二運動定律(6-4)式可以知道動量的時變率等於施於物體上的外力，在物體轉動的例子中，施予力矩是否也有相對應的關係呢？

考慮一質量為 m 的質點在半徑為 r 的圓周上運動（如圖 6-16），質點因受力矩 τ 作用繞著垂直紙面通過 O 點的轉軸轉動，此力矩由施於質點上的外力 F 以半徑 r 為力臂所形成，由上冊第三章中力矩（圖 6-17）的定義為：

$$\tau = Fd = 力 \times 力臂 \tag{3-11}$$

則圖 6-16 中質點所受力矩量值為：

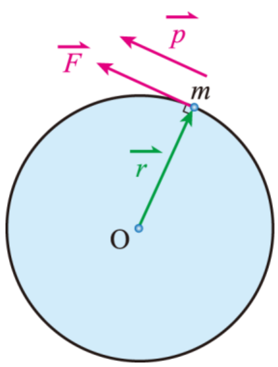
$$\tau = rF \tag{6-21}$$

由牛頓第二運動定律(6-4)式可得：

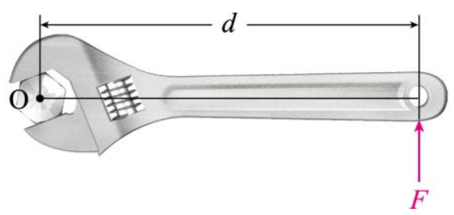
$$\tau = rF = r\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta p}{\Delta t} \tag{6-22}$$

由於式中 r 為定值，上式可以改寫為：

$$\tau = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta (rp)}{\Delta t} \tag{6-23}$$



∴圖 6-16　質量為 m 的質點受力矩 $\tau = rF$ 作用，在半徑為 r 的圓周上運動。



∴圖 6-17　力矩為力與力臂的乘積。

6

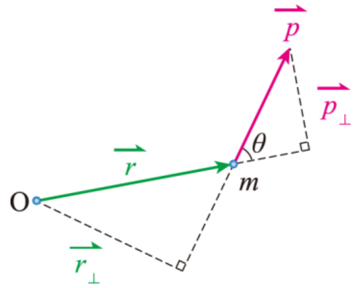
推導得上式中的數學形式需要 $\vec{r}$ 與 $\vec{p}$ 是互相垂直的。一般來說，r 不一定是圓周運動的半徑，而是質點與轉動軸距離。當 $\vec{r}$ 與質點的動量 $\vec{p}$ 垂直時（如圖 6-16），$\vec{r}$ 與 $\vec{p}$ 的乘積，定義為該質點對轉動軸的**角動量** L（angular momentum），

$$L = rp \qquad (6\text{-}24)$$

角動量的 SI 制單位為公斤·公尺 ²／秒（kg · m²/s）。

當 $\vec{r}$ 與 $\vec{p}$ 不是互相垂直的情況，若 θ 為 $\vec{r}$ 與 $\vec{p}$ 的夾角（如圖 6-18），則質點相對於軸心 O 點的角動量定義為：

$$L = rp_{\perp} = rp\sin\theta \qquad (6\text{-}25)$$



∴ 圖 6-18　r 與 p 的夾角為 θ 時，質點角動量量值為 $L = rp\sin\theta$。

角動量是向量，其方向可由右手定則來決定：右手四指先由軸心指向質點的位置，然後往質點的動量方向（即質點速度的方向）捲曲，則伸直大拇指的方向即為角動量的方向（如圖 6-19），L 的方向與外力 F 對 O 點的力矩 τ（上冊第三章圖 3-20）方向是平行的。

∴ 圖　6-19　角動量方向由右手定則決定。

Recall

基礎物理(二)B 上冊第三章圖 3-20

∴ 圖 3-20　右手螺旋定則：若選取逆時針方向轉動的力矩為正，則順時針方向轉動的力矩為負。

改寫(6-23)式可得：

$$\tau = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta L}{\Delta t} \qquad (6\text{-}26)$$

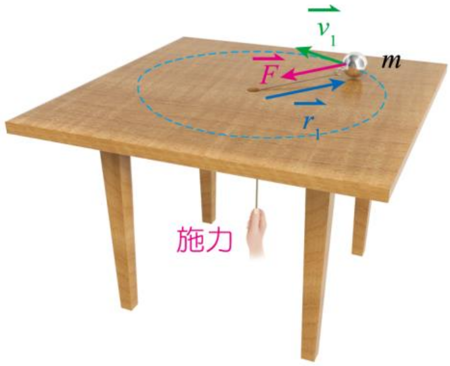
上式中指出角動量的時變率等於施於物體上的外力矩，與牛頓第二運動定律(6-4)式中，即 $\vec{F} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$，動量的時變率等於施於物體上的外力相似，其中顯示造成轉動的力矩 τ 相當於平移時的外力 F，而轉動時的角動量 L 則相當於平移時的動量 p 的角色。

對某一固定軸而言，若質點所受外力矩和為零時，則其總角動量維持不變，這就是角動量守恆律

對作圓周運動的質點來說，角動量可簡單表示為 $mr_1v_1 = mr_2v_2$，因 $v = r\omega$，故

$$mr_1^{\,2}\omega_1 = mr_2^{\,2}\omega_2 \qquad (6\text{-}27)$$

上式 ω 為角速度。例如細繩一端繫一質量為 m 之小鋼珠，另一端穿過桌面並施力 $\vec{F}$，使鋼珠在無摩擦之水平桌面上作半徑 r_1、速率 v_1 之圓周運動（如圖 6-20），若增大 F 使半徑 r_1 減小為 r_2，此時細繩對鋼珠之施力方向通過圓心，故力矩為零，系統的角動量守恆 $L_1 = L_2$，即 $mr_1^{\,2}\omega_1 = mr_2^{\,2}\omega_2$，故半徑 r_1 減小為 r_2 後，$\omega_2 > \omega_1$，角速度增大；又 $mr_1v_1 = mr_2v_2$，故其速率 v_2 將會大於原速率 v_1。



∴圖 6-20　細繩一端繫一質量為 m 之小鋼珠，另一端穿過桌面並施力 $\vec{F}$，使鋼珠在無摩擦之水平桌面上作半徑 r_1、速率 v_1 之圓周運動。

例題　6-12

右圖中，遊樂場的旋轉吊椅一圈坐滿人，連同吊椅總質量為 8.0×10^{2} 公斤，旋轉時每圈歷時 5.0 秒，吊椅軌跡為一半徑 5.0 公尺的圓。此時，人及吊椅對轉軸的總角動量為多少？對人與吊椅系統以平均施加外力矩 8.0×10^{2} 公尺・牛頓的方式，將此系統由靜止加速到上述狀態需歷時多久？

思路：系統角動量的時變率等於施於物體上的外力矩，$\tau=\dfrac{\Delta L}{\Delta t}$。

解　角動量量值 $L=rp\sin\theta$，此時 $\theta=90^\circ$，

$$L=rmv=5.0\times800\times2\pi\times\frac{5.0}{5.0}=8000\pi=2.5\times10^{4}\ (\text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s})，$$

$$由\ \tau=\frac{\Delta L}{\Delta t}，\ \Delta t=\frac{8000\pi}{800}=31\ (\text{s})。$$

自我練習

例題 6-12 中，欲使其在 30 秒後停止，則平均施加的外力矩為多少？

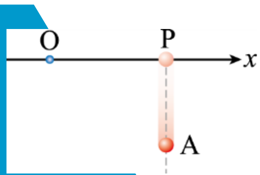
例題　6-13

質量 2.0 公斤的質點 P，位於 O 點右邊 10.0 公尺的同一水平高度上，如右圖所示，若 P 在 0 秒時由靜止自由落下，且只考慮重力作用，1.0 秒後質點落至其正下方 A 點處，則對 O 點而言，

(1) 當 0 秒及 1.0 秒時，P 所受力矩量值各為多少？

(2) 當 0 秒及 1.0 秒時，P 的角動量量值各為多少？

（設重力加速度 $g=10$ 公尺／秒 ^{2}）



思路：當 $\vec{r}$ 與 $\vec{p}$ 不互相垂直時，$L=rp_{\perp}=rp\sin\theta$，$\theta$ 為 $\vec{r}$ 與 $\vec{p}$ 的夾角。

解　(1)P 受力 $F=mg=2.0\times10=20$（N），

0 秒時 $\tau_0=r_0\times mg\times\sin90^\circ=r_0\,mg=10.0\times20=2.0\times10^{2}$（m・N），

1.0 秒時 $\tau_1 = r_1 \times mg \times \sin\theta = r_0\, mg = 10.0 \times 20 = 2.0 \times 10^2$（m · N），

自由落下後，受力不變，受力方向與 O 點的垂直距離亦保持 10.0 m，故此力矩不隨時間而變！

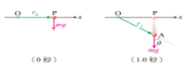
(2)0 秒時，動量為零，

故角動量為零。

1.0 秒時，速率 $v = gt = 10 \times 1.0 = 10$（m/s），

動量 $p = mv = 2.0 \times 10 = 20$（kg · m/s），

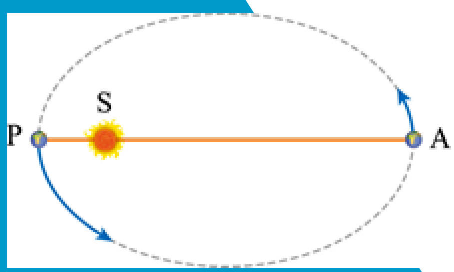
對 O 點角動量 $L = r_1 p\sin\theta = r_0 p = 10.0 \times 20 = 2.0 \times 10^2$（kg · m²/s）。



例題 6-13 中，對 A 點而言，當 0 秒及 1.0 秒時，P 的角動量量值各為多少？

例題 6-14

由克卜勒行星運動定律可知，地球受太陽之引力，繞太陽作橢圓軌道運動，太陽位於橢圓一焦點上，則一年之中，地球與太陽的距離將隨季節不同而改變。上述地球繞太陽的運動以太陽為參考點，太陽對地球的引力是否會改變地球公轉的角動量？當地球由遠日點 A 運行到近日點 P 的過程，其角速度如何變化？



解 太陽對地球的引力恆指向太陽，對太陽而言，力臂長為零，此力對地球的公轉運動不產生力矩，故地球公轉的角動量不變。

當角動量守恆時，$mr_1^2\omega_1 = mr_2^2\omega_2$，若 $r_1 > r_2$，則 $\omega_1 < \omega_2$，

故當地球與太陽的距離變小，則其角速度變大，亦即地球在近日點時的角速度較大。

延伸閱讀與觀念分析

延伸閱讀：火箭與動量守恆原理

「昨日的夢想，驅動著今日的希望，更將在未來具體實現」，在人類文明的科技史上的種種進步與發明，這似乎是一個最生動的描述。

遠古時代人們仰望星空，開始對遠際星宿的神祕保有敬意，卻也在內心建構著探索太空的幻想；牛郎織女、嫦娥奔月的傳說，再再反映著這深刻又浪漫的夢想。太空的探測，火箭是必備的工具，火藥是古代中國人三大重要的發明，宋代出現了利用燃燒火藥來產生高速氣體，以推進弓箭高速射出的技術。

∴圖 6-21　美國的高達德是現代火箭科學的創始人。

美國的高達德（Robert H. Goddard，1882～1945）則是現代火箭科學的創始人，他 16 歲時閱讀了威爾斯（H. G. Wells，英國，1866～1946）的科幻小說名著後，便嚮往太空飛行，並且投身火箭的研究，他的父母親一直支持他的夢想，並將家裡的積蓄都供給他買燃料施放火箭，甚至有一次沒有升空的火箭打中他家唯一的一部車，但是他卻沒有氣餒。終於在 1926 年，由他設計、製造的世界上第一架液態燃料火箭升空了。由於高達德畢生宣揚火箭是探測月球的可行工具，也因此常常受到媒體的誤解與取笑。1920 年紐約時報的編輯駁斥高達德火箭可用於太空飛行的論點，認為在真空的環境下，火箭雖然噴出氣體，但是沒有空氣提供的反作用力作用在火箭上，火箭不可能航行。當然今日我們知道當火箭飛行時，大量氣體會高速向後方噴出，根據動量守恆律，火箭所獲得向前的動量，剛好與噴出氣體向後的動量相等，因此真空中火箭飛行是可行的。然而當年各界對他的抨擊此起彼落：有人認為火箭會危害社區安全，警察把他當成是想用爆裂物

延伸閱讀與觀念分析

破壞社會安寧的狂熱份子，人們甚至譏稱高達德為「火箭人」。還好當時著名的航空英雄查理斯．林白（Charles A. lindbergh）力排眾議，告訴人們說：「快速的不僅是火箭，這一觀念更已超越時代。」

1969 年的阿波羅探月計畫中，一個根據高達德的理論所建造出來的液態燃料火箭，終於把人類送上月球，實現了人類太空探索的夢想。1969 年紐約時報刊登的勘誤啟事，撤回了之前的報導：有洞察力的研究與實驗，肯定了牛頓在十七世紀的發現，火箭可以在真空中如同在大氣中一般運作。

觀念分析

動量守恆的例子在日常生活中隨處可見，在實際應用中可分以下幾種情況：

(1) 如果物體不受外力或是所受外力和為零，則物體動量守恆，如果物體質量不變，則可以推得其速度為一定值。

(2) 若物體受外力作用時，作用力只在某一維度上，如物體的斜拋運動，由於物體只受到鉛直向下的重力作用，在水平方向上物體不受力，因此水平動量維持不變，亦即水平方向上的動量是守恆的。

(3) 若作用的時間很短，如煙火的爆炸，在爆炸瞬間煙火的碎片雖然受到重力的作用，但是因為作用的時間很短，重力乘以作用時間所得到的衝量量值太小，因此爆炸前後瞬間可視為動量守恆。

(4) 想像兩物體以彈簧連結形成一系統，若系統不受外力或是所受外力和為零，則此系統動量守恆；若彈簧彈開，此彈簧作用在兩物體上對於系統而言是內力，內力不影響系統動量守恆，但是會影響個別物體最終的運動狀態。

本章重點

6-1　動量與衝量

1. 物體質量 m 與其速度 $\vec{v}$ 的乘積，定義為物體的動量 $\vec{p}$ ，即 $\vec{p}=m\vec{v}$ 。
2. 牛頓原本所用來描述第二運動定律的敘述：作用於物體的外力等於物體動量的時變率，即 $\vec{F}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$ 。
3. 衝量 $\vec{J}$ 可以定義為，物體所受外力 $\vec{F}$ 與力作用時間間隔 Δt 的乘積，即 $\vec{J}=\vec{F}\Delta t$。
4. 作用在物體的衝量等於該物體的動量變化量，即 $\vec{J}=\Delta\vec{p}$ ，這一關係稱為衝量－動量定理。

6-2　質心運動

5. 系統質點間的相互作用力並不影響質心的運動。
6. 多質點系統的運動狀態可以用質心的運動狀態表示之，其中系統所受的外力等於各質點所受外力的總和。

6-3　動量守恆

7. 如果外力為零，則物體動量的時變率為零，稱為動量守恆律。
8. 多質點系統所受的外力等於系統總動量的時變率。若系統不受外力作用，則其總動量維持不變，這就是多質點系統的動量守恆律，以數學式表示為 $\sum\limits_i\vec{p}_i=\sum\limits_i m_i\vec{v}_i$ 為定值。

6-4　角動量守恆

9. 轉動軸到質點的距離與質點動量的垂直分量 $r\sin\theta$ 與質點動量 p 的乘積，定義為該質點對轉動軸的角動量 L， $L=rp\sin\theta$ 。
10. 角動量的時變率等於施於物體上的外力矩， $\tau=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta L}{\Delta t}$ 。

習題

觀念題

1. 若 A 物體的動能比 B 物體的動能大，則兩者之動量何者較大？
2. 試判斷下列敘述是否正確：一質點若不受外力則動量守恆，若受外力總和不為零，則動量必隨時間而變。
3. 試判斷下列敘述是否正確：物體所受的衝量即為物體的末動量。
4. 多質點系統中，各質點動量量值的和，是否即為系統總動量？
5. 由高處跳下，落在一彈簧墊讓身體反彈與落在水泥地上不反彈，何者所受的衝量較大？
6. 由高處跳下，落在一彈簧墊讓身體反彈與落在水泥地上不反彈，何者受力較大？
7. 德國藝術家勞希曼於 2005 年成立「跳地球」網站，發起「跳地球日」（World Jump Day），號召西半球民眾 2006 年 7 月 20 日格林威治 11 時 39 分 13 秒（臺北時間 7 月 20 日 19 時 39 分 13 秒）一齊往空中一跳，如圖所示，他說只

要有六億人同時這麼一跳，將能使地球改變軌道，離太陽遠一點，從而「停止全球暖化、延長白天時數，創造更適合人居住的氣候」。此一活動並非全球參與，且選定在臺北時間晚上約 7 點半，其原因為何？你認為這個活動有可能達到預定的目標嗎？

8. 常見花式溜冰選手，在作迴轉動作時，將張開的手腳縮回貼緊身體，此動作會使迴轉的角速度如何改變？

基礎題

6-1 動量與衝量

1. 如右圖所示，一頭體重 5 公噸的成年非洲象，以時速 36 公里奔跑時，其動量為多少？

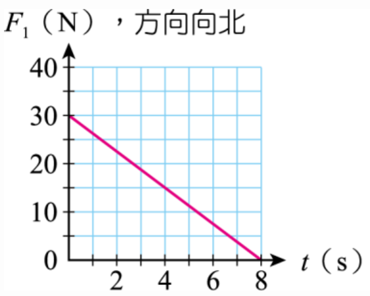
2. 一物體質量 2 公斤，初速度 $\overrightarrow{v_0}=-3\hat{i}+4\hat{j}$（公尺／秒），受 $\overrightarrow{F}=3\hat{i}+4\hat{j}$（牛頓）之力作用 2 秒，末速度之量值為何？

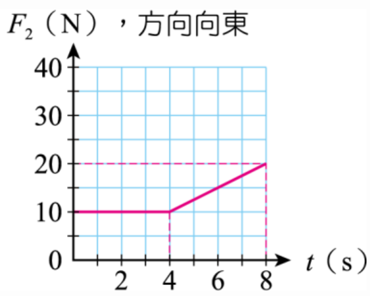
習題

3. 1.0×10公斤之物體在 0 秒時以 3.0 公尺／秒向北運動，若受 F_1及 F_2二力之作用，其方向各為向北及向東，力之量值如圖所示，求：

(1) 最初 8 秒內物體所受之衝量量值為多少？

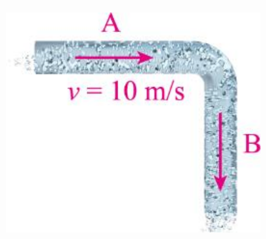
(2) 物體在第 8 秒末之瞬時速度量值為多少？





4. 將一質量為 4.0 公斤的鉛球，自地面以仰角 37°，初速 2.0 公尺／秒斜向拋出，直到鉛球落回同一水平面。其過程中，鉛直方向與水平方向動量變化量各為多少？（設重力加速度 $g=10$公尺／秒 ^{2}）

5. 如右圖所示，一粗細均勻之水管內，水以 10 公尺／秒等速率穩定流動，水管 B 處每秒流出的水量為 2.0 公斤，則水管在 90°轉彎處，水施於水管之合力量值為多少？



6. 機槍每秒發射 10 顆子彈，每顆子彈質量為 0.050 公斤，子彈出口速率為對地 6.0×10^2公尺／秒，則機槍的平均後座力是多少？

6-2 質心運動

7. 無摩擦的桌面上有質量相同的 A、B 兩個撞球，A 球以速率 v 正向撞擊靜止的 B 球，則撞擊前後兩球的共同質心速度各為何？

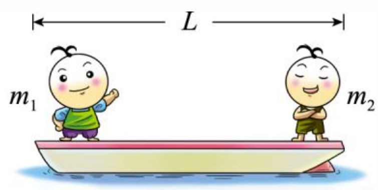
8. A 車質量 1.20×10^{3} 公斤，以 10.0 公尺／秒的速度向東運動，B 車質量 8.00×10^{3} 公斤，以 20.0 公尺／秒的速度向北運動，兩車質心速度量值為多少？

9. 承上題，若 A 車突然以向東 2.0 公尺／秒 ^{2} 的加速運動，則此系統受力為何？兩車質心加速度量值為多少？

10. 一炸彈自 6.0×10^{2} 公尺之高空由靜止自由落下，於中途爆裂成兩個等重的破片，在垂直線上分成上、下散開。如空氣的阻力可以不計，炸彈下落後 10 秒時有一破片擊中地面，則此時另一破片距地面之高度為多少？

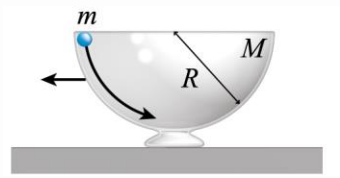
6-3 動量守恆

11. 一小船質量為 M，長為 L，船的兩端分別站立質量 m_1 和 m_2 兩個人（$m_1 > m_2$），原本二人及船皆靜止，如二人皆以速率 v（相對於船）相向而行，如圖所示，則人行走期間船移動速度為何？



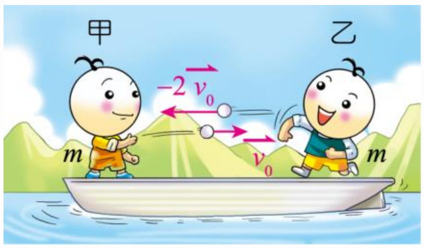
習題

12. 質量為 M、內半徑為 R 的半圓形碗狀物，靜置於水平桌面上，另一質量為 m 的小球（小球半徑大小可忽略）由碗口下滑，如右圖所示，若所有接觸面皆為光滑，以鉛直及水平兩方向來考慮，下滑過程系統是否動量守恆？



13. 一足球 0.42 公斤，以 13 公尺／秒的水平速度射門，質量 60.00 公斤的守門員鉛直躍起，恰在最高點抱住球，則守門員抱住球後瞬間之速率為多少？

14. 甲、乙兩人分別站在小船的船頭與船尾，如右圖所示，開始時，小船停在靜止的水中。甲以水平方向的速度 $\vec{v_0}$ 將質量為 m_0 的球擲向乙，同一時間乙以水平方向的速度 $-2\vec{v_0}$ 將一質量相同的球擲向甲。已知甲、乙兩人的質量均為 m，船的質量為 M。假設水對船的阻力可以不計，且在空中時，球速的改變可以忽略不計，則：



(1) 求兩球仍在空中時，船的速度 $\vec{v_1}$ 為何？

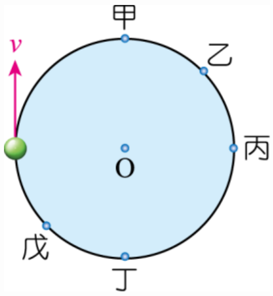
(2) 若乙接到甲擲來的球，但乙擲出的球未被甲碰觸到，直接落入甲後方的水中，則最後船的速度 $\vec{v_2}$ 為何？【91 指考】

15. 一砲彈以初速 $v_0=50$ 公尺／秒，以仰角 53°斜向發射，在最高點時，爆炸成質量相等的兩塊，其中一塊以速率 $v_1=45$ 公尺／秒鉛直下落，設重力加速度 $g=10$ 公尺／秒 ^{2}，則另一塊速度是多少？

■6-4 角動量守恆

16. 質量 2.00 公斤之物體在 xy 平面上以 $v_x = 30.0$ 公尺／秒及 $v_y = 60.0$ 公尺／秒之速度通過坐標點 (3.00, − 4.00)（單位：公尺），求此時該物對原點之角動量量值。

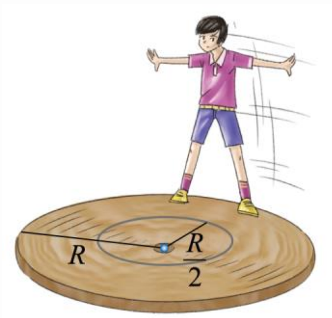
17. 一質點以O為圓心在一水平面上作等速圓周運動，其速率為 v，如圖所示。甲、乙、丙、丁、戊皆在圓周上，如果以丁點為參考點測量質點的角動量，則該質點角動量時間變化率的量值在圖中哪一處最大？
(A) 甲　(B) 乙　(C) 丙　(D) 丁　(E) 戊。　【99 指考】



18. 兩質量分別為 m_1 及 m_2 的小球，由一長度 ℓ 之細桿（質量不計）相連，並以通過質量中心，且垂直於細桿的軸，作等角速度 ω 的轉動，則系統之總動量及總角動量的量值各為多少？

19. 質量為 2.0 公斤的質點以 25 公尺／秒之初速度，以仰角 53°斜向拋出，求當達最大高度時，該質點對拋出原點之角動量量值為何？
（設重力加速度 $g = 10$ 公尺／秒 ^{2}）

20. 小威質量為 m，站在一水平轉動之輕質圓盤上距圓心為 R 處，並隨圓盤作圓周運動，角速度為 ω，如右圖所示。若圓盤質量不計，則當小威向圓心移動到距圓心為 $\frac{R}{2}$ 處時，圓盤的角速度變為多少？

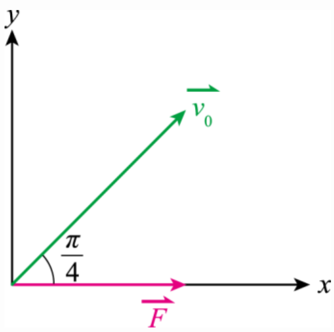


習題

21. 長度為 L 的輕繩一端固定，另一端繫有質量 M 的小木塊，以角速度 ω_0 在無摩擦的水平面旋轉，今質量 m 之子彈以速度 v 由上向下打入小木塊中，則木塊轉動角速度變為若干？（設子彈打入後，木塊仍在水平面上運動）

綜合題

*1. 一質量為 m 的小球，在一光滑水平面上，以速度 $\vec{v_0}$ 作直線運動。在時間 $t=0$ 時，小球開始受一定力 $\vec{F}$ 的作用，如圖所示，$\vec{F}$ 與 $\vec{v_0}$ 的夾角為 $\frac{\pi}{4}$，其量值分別為 F 及 v_0。設 $\vec{F}$ 的方向為正 x 軸方向，則當時間 $t=t'$ 時，下列敘述何者正確？



(A)小球動量在 x 方向的量值為 mv_0

(B)小球動量在 y 方向的量值為 $\frac{\sqrt{2}}{2}mv_0+Ft'$

(C)小球動量的方向與 x 軸的夾角仍為 $\frac{\pi}{4}$

(D)小球動量的量值為 mv_0+Ft'

(E)小球的動量在 x 方向的量值與在 y 方向的量值的比值為 $1+\frac{\sqrt{2}Ft'}{mv_0}$。

【96 指考】

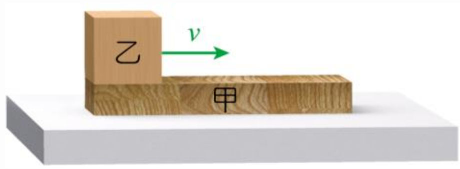
2. 質量為 m 的砲彈，以速度 $\vec{v}$ 對地自質量為 M 的砲身水平射出，則砲身的速度為多少？如果砲彈的速度 $\vec{v}$，是對後退的砲身而言，則砲身的速度為多少？

＊3. 質量為 5m 之台車，靜止於光滑水平軌道上，車上有三個質量皆為 m 之人，每人以 $\vec{v}$（相對於各人跳車後台車之速度）之水平速度跳離台車，則：

(1) 若三人相繼跳下後，台車之末速度為何？

(2) 若三人同時跳下，則台車末速度為何？

4. 如圖所示，在光滑水平面上有相互重疊之甲、乙兩木塊，其質量各為 2m 與 m。起初，甲木塊靜止在水平面上，而乙木塊在甲木塊上之左緣以初速 v 向右運動。已知甲、乙兩木塊之間的動摩擦係數為 μ_k，回答以下各問題（以 m、v、μ_k 及重力加速度 g 表示）。



(1) 假設甲木塊夠長，使得乙木塊不會掉落到水平面上。一段時間後，甲、乙兩木塊以同一速度 v_f 運動，求 v_f。

(2) 承(1)小題，求甲、乙兩木塊達到同一速度 v_f 所需的時間。【95 指考】

5. 質量分別為 2m、m、m 的甲、乙、丙三物體，放在旋轉盤上。它們與軸心的距離分別為 R、R、2R。當圓盤以等角速度旋轉而物體與圓盤相對靜止時，各物體所受的向心力之比及對軸心 O 點的角動量之比分別為何？

習題

題組

消防水柱的水壓總是很大，才能克服重力將水送到較高較遠處（放水量為350 L/min）。當強烈的水柱由出水瞄子噴出，體重太輕的人甚至會被消防送水管帶著走。運用水柱的反作用力，一款名為「噴射懸浮飛行器」的噴水飛行背包，能以向下噴射兩道高壓水柱方式把使用者推離水面，背包造型奇特，連有一根黃色輸水軟管，軟管另一頭連接發動機組。發動機組安裝在一個類似於船的裝置上，可漂浮於水面，使用者能在飛行過程中急轉彎或盤旋，高度可達9公尺，速度可達100公里／時。

1. 若消防員手持消防瞄子，水柱的出口速率為20公尺／秒，則消防員對水柱每分鐘施加衝量量值為多少？
2. 使用飛行背包時，若每個出水口每秒鐘出水量為20公升，水柱的出口速率為30公尺／秒，忽略輸水軟管的影響，則剛起飛時，兩條水柱可造成推力為多少？