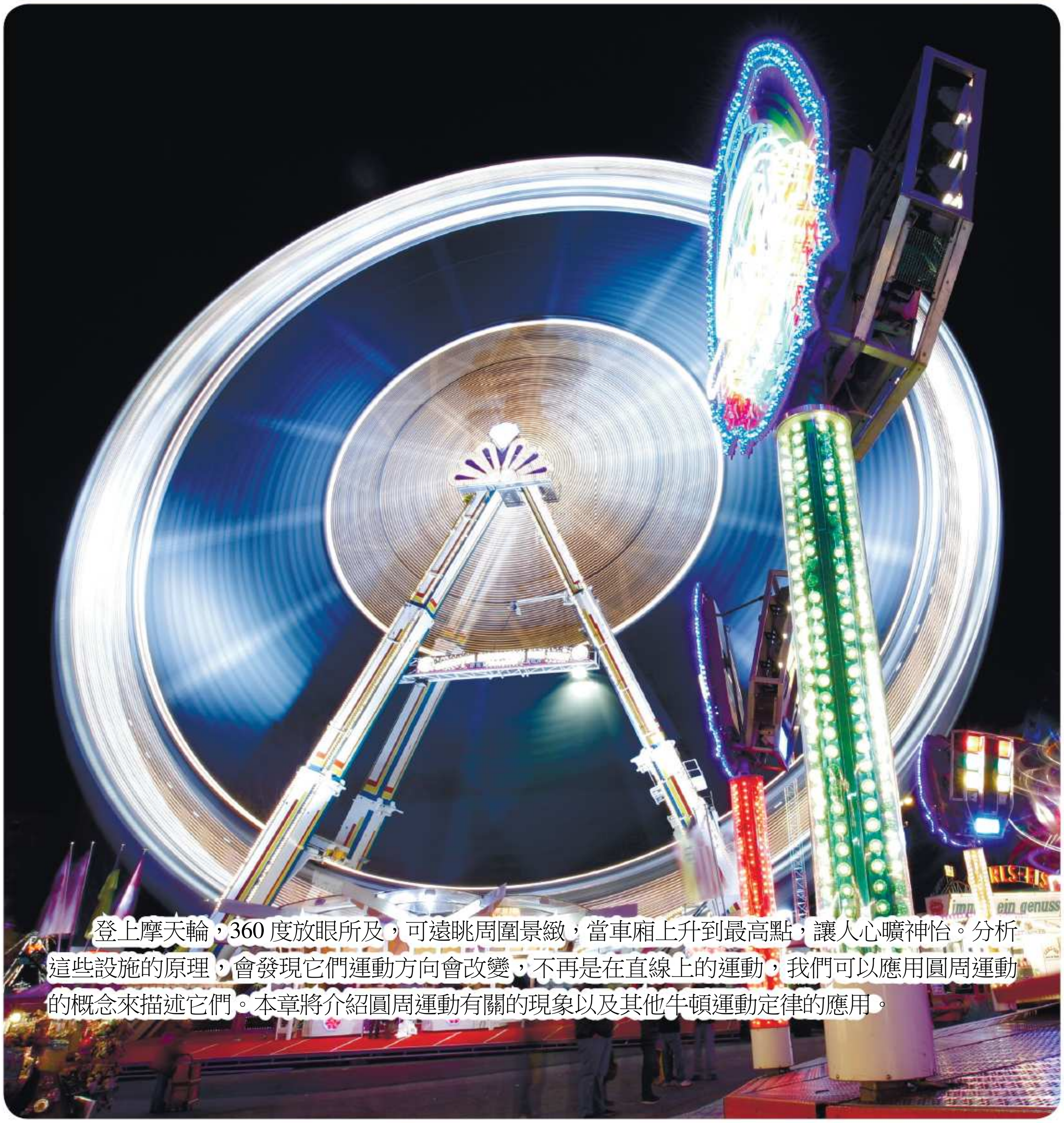
CH 5 牛頓運動定律的應用



登上摩天輪，360 度放眼所及，可遠眺周圍景緻，當車廂上升到最高點，讓人心曠神怡。分析這些設施的原理，會發現它們運動方向會改變，不再是在直線上的運動，我們可以應用圓周運動的概念來描述它們。本章將介紹圓周運動有關的現象以及其他牛頓運動定律的應用。

CHAPTER 5 5-1 等速圓周運動

圓周運動屬於二維的平面運動，是日常生活中常見的曲線運動，例如月亮繞著地球作近似圓周的運動（圖 5-1），光碟片轉動時碟片上的每一點繞著中心軸作圓周運動。當質點以等速率繞著轉軸作圓周運動時，此運動稱為**等速圓周運動**（uniform circular motion），此處的等速是指等速率，因為圓周運動上的速度方向不斷在改變，所以屬變速運動。

∴圖 5-1　月亮繞著地球作圓周運動的示意圖。

手錶的秒針針尖繞軸心作圓周運動時，每 60 秒繞一圈，60 秒即稱為秒針作圓周運動的**週期**（period），以 T 表示，其單位為秒，故圓周運動的週期就是質點繞轉軸一周所需的時間。而質點在每單位時間（每秒）所轉過的圈數則稱為**頻率**（frequency），常以 f 表示，其單位為 1／秒（1/s），又稱為**赫茲**（hertz，簡記為 Hz），例如行進中的某一臺腳踏車，車輪每秒繞著軸心轉三圈，則頻率為 3 赫茲。週期和頻率互為倒數，二者之間的關係式為

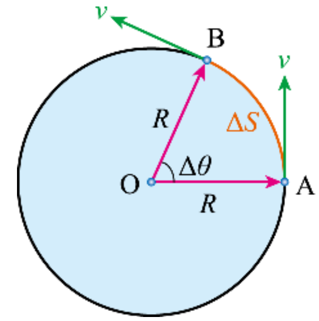
$$f = \frac{1}{T} \tag{5-1}$$

假設質點以等速率 v 作圓周運動時，半徑為 R，若質點在 Δt 時間內沿圓周所經的路徑長為 ΔS，則速率 v 可寫為

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \tag{5-2}$$

由圖 5-2 所示，$\Delta S = R\Delta\theta$，其中 $\Delta\theta$ 為質點所繞過的圓心角，在描述圓周運動時，$\Delta\theta$ 稱為**角移**（angular displacement），其 SI 制的單位為**弧度**（radian，簡寫為 rad），則(5-2)式可以改寫為

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{R\Delta\theta}{\Delta t} \qquad (5\text{-}3)$$



∴圖 5-2 質點作半徑為 R 的圓周運動時，路徑長 ΔS 與圓心角 $\Delta\theta$ 的關係。

(5-3)式中的 $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ 為質點在單位時間的角移，稱為**角速度**（angular velocity）ω，其 SI 制的單位為弧度／秒（rad/s）。例如秒針針尖在 60 秒內繞一圈，轉過的角度為 2π 弧度，所以針尖的平均角速度為 $\frac{2\pi}{60} = \frac{\pi}{30}$ 弧度／秒。等速圓周運動時，質點在單位時間內所轉過的角移皆相同，所以等速圓周運動是一種等角速運動，表示任一瞬間的角速度等於任一時間間隔的平均角速度。當質點以角速度繞圓心轉動時，角速度可以下式表示：

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (5\text{-}4)$$

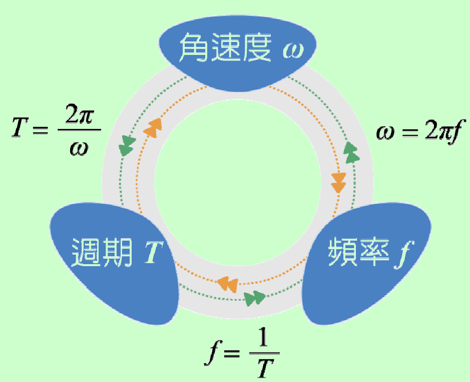
因此(5-3)式可以改寫為

$$v = R\omega = \frac{2\pi R}{T} \qquad (5\text{-}5)$$

5

便利貼

等速圓周運動中 ω、T 與 f 之間的關係



例題　5-1

某市售恆定角速度的 40 倍速光碟機（40X CD-ROM）碟片的轉速為每分鐘 9000 轉如右圖，若光碟片內、外圈的半徑各為 2.5 公分及 5.5 公分，則其角速度 ω 及內、外圈上的點，其切線速度量值各為多少？

解　角速度 $\omega = 2\pi f = 2\times 3.14\times\dfrac{9000}{60} = 942$（rad/s），

內圈上的點，其切線速度量值 $= R\omega = 2.5\times 10^{-2}\times 942 = 24$（m/s），

外圈上的點，其切線速度量值 $= R\omega = 5.5\times 10^{-2}\times 942 = 52$（m/s）。

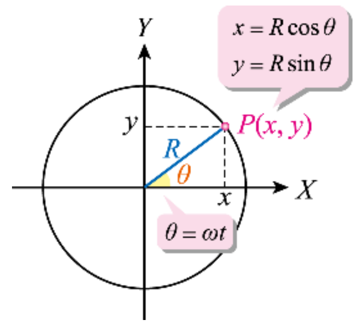
由(5-4)式可得角移 $\Delta\theta$ 與角速度 ω 之間關係為

$$\Delta\theta = \omega\Delta t \qquad (5\text{-}6)$$

或者可以寫為 $\theta = \omega t$。圖 5-3 中質點在 $t = 0$ 時，由 x 軸開始逆時針旋轉，我們可以知道質點位置與時間的關係為

$$x = R\cos(\omega t)，$$
$$y = R\sin(\omega t) \qquad (5\text{-}7)$$

由(5-7)式，$x^2 + y^2 = R^2\cos^2(\omega t) + R^2\sin^2(\omega t) = R^2$，可得圓方程式 $x^2 + y^2 = R^2$。



∴圖 5-3　作等速圓周運動的質點位置與時間的關係圖。

物體作等速圓周運動時，其速率維持不變，而速度的方向也就是運動的方向會不斷的隨時間而改變，因此等速圓周運動為一變速運動，當質點的速度隨時間而變動，表示質點在運動過程中具有加速度。等速圓周運動中，如圖 5-4(a)所示，當質點作逆時針方向旋轉由 A 點沿圓周運動至 B 點，在 Δt 時間內，速度由

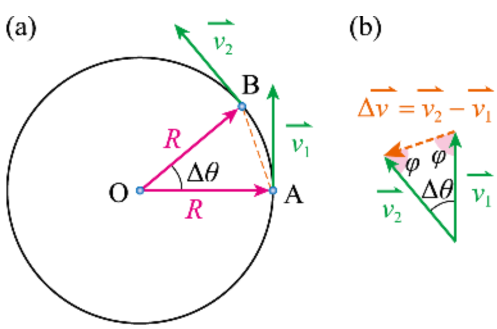
$\vec{v_1}$ 改變為 $\vec{v_2}$，速度變化量 $\Delta\vec{v}$ 為 $\vec{v_2}-\vec{v_1}$，並且 $|\vec{v_1}|=|\vec{v_2}|$。將 $\vec{v_2}$ 與 $\vec{v_1}$ 兩向量的起點重合，再利用三角形法，畫出 $\Delta\vec{v}$、$\vec{v_1}$ 與 $\vec{v_2}$ 的向量圖，如圖 5-4(b)所示。

質點的瞬時加速度 $\vec{a}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$，由於質點作等速圓周運動，所以 $|\vec{v_1}|=|\vec{v_2}|$，即圖 5-5(b)中的三角形為等腰三角形，其中 $\vec{v_1}$ 與 $\vec{v_2}$ 皆在圓周的切線方向上，而當 Δt 趨近於 0 時 $\vec{v_1}$、$\vec{v_2}$ 皆與 $\Delta\vec{v}$ 垂直，所以 $\Delta\vec{v}$ 的方向應指向圓周運動時的圓心。所以不論質點運動至圓周上任一處，該處加速度的方向皆與速度方向垂直，並且指向圓心，故稱為**向心加速度**（centripetal acceleration）。在圖 5-5(b) 中，由於箭矢之長度可代表該物理量之大小，故可知 $|\Delta\vec{v}|=v\Delta\theta$，並且可以推得 $a=\dfrac{v\Delta\theta}{\Delta t}$，因此向心加速度的量值為

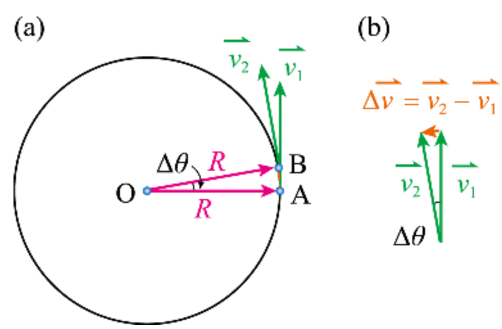
$$|\vec{a}|=\lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right|=v\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)=v\omega \qquad (5\text{-}8)$$

由(5-5)式 $v=R\omega$，上式可改寫為

$$a=R\omega^2=\frac{v^2}{R}=\frac{4\pi^2R}{T^2} \qquad (5\text{-}9)$$



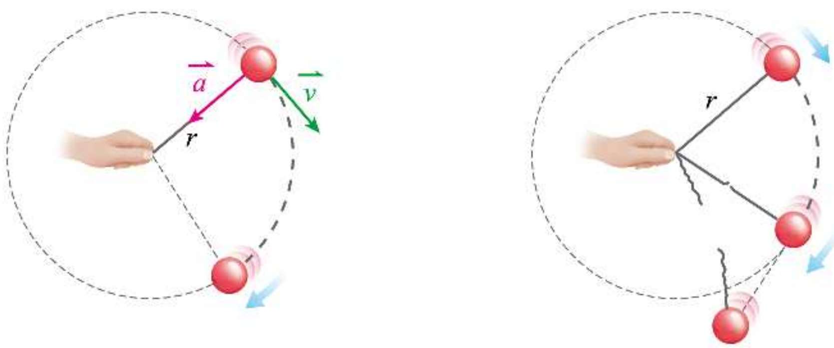
∴圖 5-4　等速圓周運動中，(a) 質點由 A 點運動至 B 點的瞬時速度分別為 $\vec{v_1}$ 與 $\vec{v_2}$。(b) $\Delta\vec{v}=\vec{v_2}-\vec{v_1}$ 的向量圖。



∴圖 5-5　等速圓周運動中，(a) 當時間間隔 Δt 很小時，也就是 B 點趨近於 A 點。(b) $\vec{v_2}$ 與 $\vec{v_1}$ 向量的夾角 $\Delta\theta$ 也很小。

當外力作用在物體上，恰提供向心加速度時，物體將作圓周運動。舉例來說，如圖 5-6 所示，手握細繩使小球繞圓心作等速圓周運動時，手需透過細繩不停地向圓心方向對小球施力。如果細繩斷裂，小球會沿著圓的切線方向運動，像這樣子需施一個向圓心方向的力，才能維持小球作等速圓周運動，這個力叫做向心力（centripetal force），很明顯的向心力是維持物體作圓周運動的必要條件。由牛頓第二運動定律以及向心加速度的公式（(5-9)式），向心力的數學表示式為

$$F = ma = mR\omega^2 = m\frac{v^2}{R} = m\frac{4\pi^2 R}{T^2} \tag{5-10}$$



∴圖 5-6　小球繞圓心作等速圓周運動時，手施力提供向心力。如果細繩斷裂，小球會沿著圓的切線方向運動。

動動手

手臂風火輪

將右手手臂伸直，迅速繞圈揮動數圈，手臂近身體端的血液因缺乏足夠的向心力而向手掌處集中，手掌血液不易向心臟回流，則手掌因血液集中使微血管充血而變得潮紅。

例題 5-2

一物體作半徑為 R 的等速圓周運動，週期為 T，則其平均速率為多少？經過 $\frac{1}{4}$ 周及 $\frac{1}{2}$ 周之平均加速度的量值各為多少？瞬時加速度的量值又各為多少？

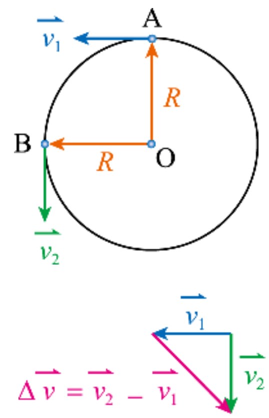
解

(1)平均速率 $v=\dfrac{\Delta S}{\Delta t}=\dfrac{\text{圓周長}}{\text{週期}}=\dfrac{2\pi R}{T}$ ，

等速圓周運動中速率時時相等且固定不變，

故瞬時速率等於平均速率，亦即各點瞬時速度的量值不變。

(2)經過 $\frac{1}{4}$ 周，$\vec{v_1}$ 、 $\vec{v_2}$ 兩向量的夾角為 90°，

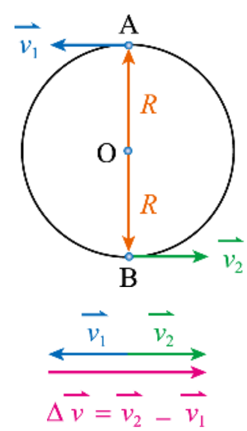


$$|\Delta\vec{v}|=|\vec{v_2}-\vec{v_1}|=\sqrt{2}v=\sqrt{2}\frac{2\pi R}{T}$$ ，

平均加速度的量值

$$|\vec{a}|=\left|\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right|=\left|\frac{\vec{v_2}-\vec{v_1}}{\Delta t}\right|=\frac{\sqrt{2}v}{\frac{T}{4}}=\frac{4\sqrt{2}v}{T}=\frac{8\sqrt{2}\pi R}{T^2}$$ 。

(3)經過 $\frac{1}{2}$ 周，$\vec{v_1}$ 、 $\vec{v_2}$ 兩向量的夾角為 180°，



$$|\Delta\vec{v}|=|\vec{v_2}-\vec{v_1}|=2v$$ ，

平均加速度的量值

$$|\vec{a}|=\left|\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\right|=\left|\frac{\vec{v_2}-\vec{v_1}}{\Delta t}\right|=\frac{2v}{\frac{T}{2}}=\frac{4v}{T}=\frac{8\pi R}{T^2}$$ 。

瞬時加速度即為向心加速度，

等速圓周運動各點加速度的量值皆相等，

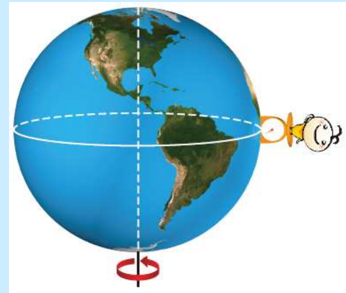
$$a=R\omega^2=R\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2=\frac{4\pi^2 R}{T^2}$$ 。

自我練習

求經過 $\frac{1}{6}$ 周之平均加速度的量值。

例題　5-3

已知地球的半徑為 6.4×10^3 公里如右圖，在地表赤道上量體重，會因為地球的自轉而使量得的體重變小。假設地球自轉的角速度會改變，地球自轉愈快則量得的體重愈小，若量得的體重變為零，則地球自轉的週期為多少？



解　設人的質量為 m，赤道上的人所受作用力包括地球對人的萬有引力 mg，以及磅秤的正向力 N（量得的體重），兩者的合力即為人隨地球運轉作圓周運動所需的向心力。

而 $mg-N=m\dfrac{4\pi^2R}{T^2}$，故地球自轉愈快週期 T 愈小，則量得的體重 N 愈小。

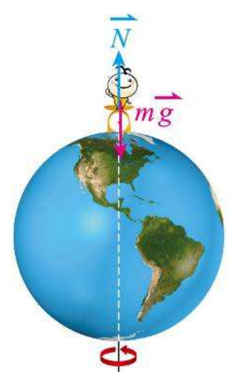
若量得的體重變為零，表示磅秤對人的正向力 N 等於零，則地球對人的引力即等於圓周運動的向心力，

即 $mg=m\dfrac{4\pi^2R}{T^2}$，得 $m\times9.8=m\times\dfrac{4\times3.14^2\times6.400\times10^6}{T^2}$，

得 $T=5075$（秒）= 84 分 35 秒。

自我練習

如右圖，地球自轉的快慢是否會影響在北極點測量的體重？

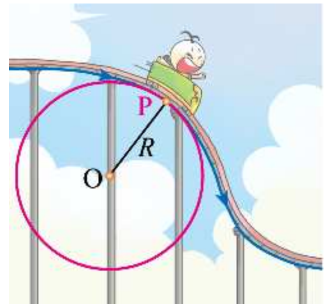


由以上的推演可知，向心力是維持物體作圓周運動的必要條件。一般來說，運動中的物體若其運動方向改變，考量以曲率中心 O 為圓心，必定伴隨著向心力的作

用。例如衛星繞行星的運動，是靠著萬有引力互相吸引提供衛星繞行星運動的向心力；公路上的彎道常常是內側較低而外側較高，以便提供汽車轉彎所需的向心力。

Note

給定一個曲線及其上一點 P，會有一個圓與曲線切在 P 點；在 P 點的最佳近似圓的半徑，在數學上稱為曲線軌跡上在 P 點的曲率半徑 R，其圓心則為曲率中心 O。



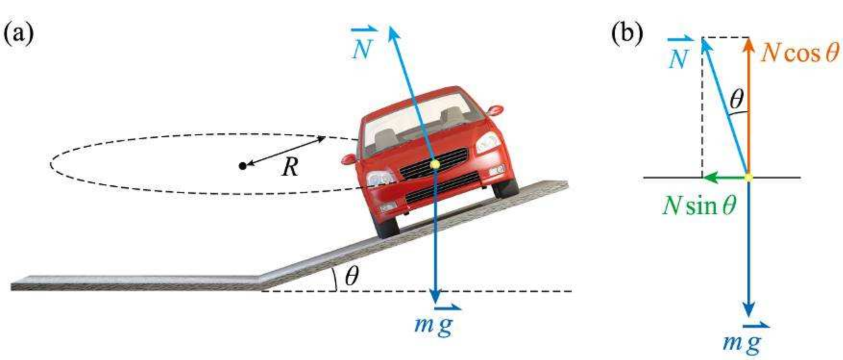
以汽車行經公路上的彎道為例，當車輛的速限較高，如高速公路或是快速道路的匝道，路面設計常常為內側較低而外側較高，如圖 5-7(a)中所示，汽車的質量為 m，以等速率 v 行駛在曲率半徑為 R 的彎道上，路面與水平面夾 θ 角，若地面光滑，車子轉彎時所需的向心力全依靠正向力的水平分量來提供。由圖 5-7(b)的力圖可知

$$\begin{cases} \text{向心力} = N\sin\theta = m\dfrac{v^2}{R} \\ \text{鉛直方向成力平衡：} N\cos\theta = mg \end{cases} \tag{5-11}$$

得

$$\tan\theta = \frac{v^2}{gR} \tag{5-12}$$

∴圖 5-7　(a)車子在光滑路面轉彎時，路面的正向力可以提供車子轉彎時所需的向心力。(b)車子的受力分析圖。



所以山路的彎道上、高速公路或快速道路上，其內外側的傾斜度設計與所標示的速限息息相關。由(5-11) 式可知 $N=\frac{mg}{\cos\theta}>mg$，故路面所提供的正向力大於車子本身的重量。

在一般水平道路上，轉彎行進的車子所需的向心力無法由車子在路面上的正向力提供，此時要避免車子向路面外側打滑，可以靠著輪胎與地面上的靜摩擦力提供轉彎所需的向心力。

例題 5-4

汽車在水平路面轉彎時，必須靠輪胎與地面的靜摩擦力來作為轉彎所需的向心力如右圖。若輪胎與地面的靜摩擦係數為 0.50，想要以迴轉半徑 10 公尺來轉彎，則車速不可超過多少？

思路：(1)迴轉半徑即彎道曲線的曲率半徑 R。

(2)摩擦力作為圓周運動之向心力。

解 車子前進時，輪胎不停轉動，但在輪胎與地面的接觸點上，

輪胎與地面並無垂直於運動方向之相對運動，此時摩擦力為靜摩擦力。

若人與汽車的總質量為 m，

地面可產生之最大靜摩擦力為 $\mu_s mg=0.50\times m\times 9.8$，

以速率 v 轉彎，所需的向心力 $F=ma=m\frac{v^2}{R}=f_s$，

當車速愈快，則所需的向心力 f_s 愈大，

能安全轉彎的條件是 f_s 未超過最大靜摩擦力，

故 $m\frac{v^2}{10}=0.50\times m\times 9.8$，

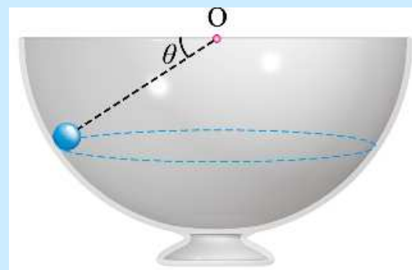
得 $v=\sqrt{9.8\times 0.50\times 10}=7.0$（m/s）即為最大的車速量值。

自我練習

倘若車速為 10 公尺／秒，欲安全轉彎，則最小的迴轉半徑為多少？

例題 5-5

如右圖，有一半徑為 R 的半球形碗，球心為 O 點，碗壁光滑且固定於水平地面上如右圖。今有一質量為 m 的質點在碗壁上作水平的等速圓周運動，質點與 O 點的連線與水平面夾 θ 角，則質點之速率為若干？



解　小球受重力 $m\vec{g}$ 及正向力 $\vec{N}$ 作用，

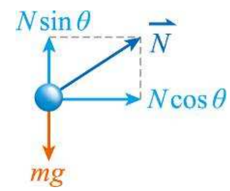
鉛直方向成力平衡，即 $N\sin\theta = mg$ ……①，

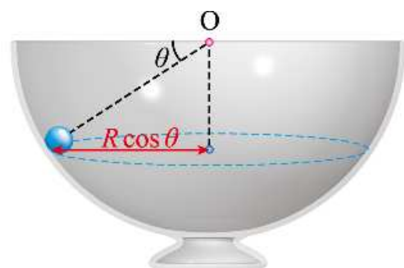
正向力在水平方向的分力作為圓周運動的向心力，

即 $N\cos\theta = m\dfrac{v^2}{R\cos\theta}$ ……②，

由①②得 $\dfrac{mg}{\sin\theta}\cos\theta = m\dfrac{v^2}{R\cos\theta}$ ，

故 $v = \sqrt{gR\cos\theta\cot\theta}$ 。

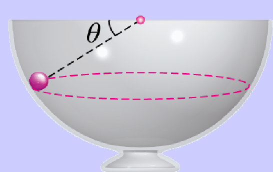




動動手

圓周運動小實驗

將一小鋼珠置於半圓形的碗中，將碗以圓圈方式搖晃數圈後靜止，鋼珠獲得一速度並在碗壁內側作水平圓周運動。觀察鋼珠在不同速率之下的 θ 角與圓半徑的變化。



CHAPTER 5

5-2 簡諧運動

觀察日常生活中，人走路時手臂會小幅度的來回擺動，牆上掛鐘的擺錘會作週期性的擺動，還有弦樂器上琴弦的振動與敲擊樂器中鼓面的起伏，這些都是自然界中所作週期性的擺動或振動現象，如圖 5-8 所示。可以發現這些現象的共通特性是：當處在穩定狀態的物體受到擾動，該物體會受到恢復力的作用，使其在平衡位置兩旁作往復的週期運動。分析這些振動現象，會發現有一種最簡單、最基本的振動，其恢復力的量值與位移的量值成正比，且恢復力與位移方向相反，稱為**簡諧運動**（simple harmonic motion，簡記為 SHM）。

∴圖 5-8　鐘擺的擺動、琴弦的振動、大鼓鼓面的起伏都可以看到週期性的振動現象。

回顧第三章中所述，當彈簧受外力後，在其彈性限度內，其形變量 $\vec{x}$ 和彈簧恢復力的量值 $\vec{F}$ 遵守虎克定律，即

$$\vec{F} = -k\vec{x} \qquad (5\text{-}13)$$

當彈簧一端固定，另一端繫上一物體（可視為質點），觀察此彈簧上質點的振動，若沿著彈簧的軸心方向（$\vec{x}$ 方向）施力使彈簧伸長，外力去除後，質點受彈簧的恢復力（簡稱彈簧力或恢復力）開始向原點方向運動，由牛頓運動定律可知

$$\vec{F} = -k\vec{x} = m\vec{a}\ ,$$

此時質點位移的量值 x 與加速度的量值 a 成正比，上式中負號表示二者方向相反，質點在其平衡位置附近會沿一直線作往復的週期性運動。研究這一質點的週期性運動會發現，質點距平衡點的位移隨時間變化的關係恰為正弦或是餘弦函數，也就是質點距平衡點的位移 x 呈現正弦或餘弦函數的振盪。若觀察相等時間間隔下質點的位置並繪製成圖，則如圖 5-9 所示，位移 x 的數學關係可寫為

$$x = A\cos\theta \tag{5-14}$$

其中 A 為振幅，由於圖 5-9 中是在相等時間間隔下的觀察，因此 θ 為某一時間間隔的倍數，將其表示為 $\theta = \omega t$，且時間 $t = 0$ 時質點的位移恰在振幅 A 處（拉動繫在彈簧上的質點在 $t = 0$ 時放開），則質點距平衡點的位移 x 和時間 t 的數學關係式為

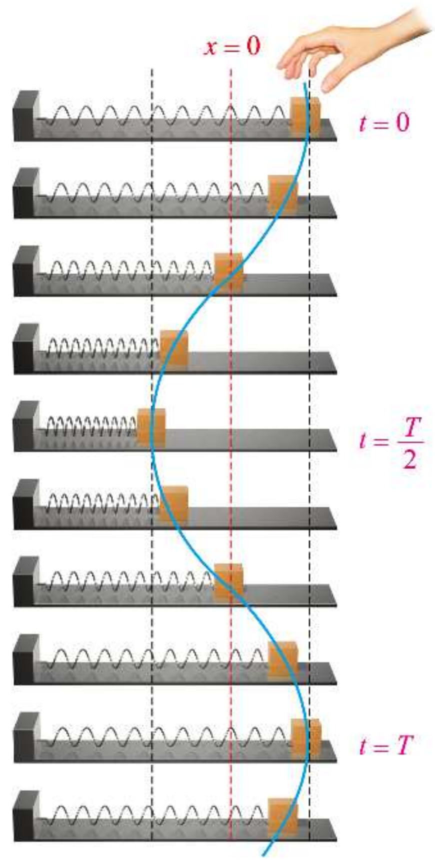
$$x = A\cos(\omega t) \tag{5-15}$$

ω 稱為**角頻率**（angular frequency），角頻率 ω 與週期 T 的關係為

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \tag{5-16}$$

Note

討論簡諧運動時，位移 $\vec{x}$ 是物體與平衡點間的位移，而不是物體在兩個時刻間的位移。



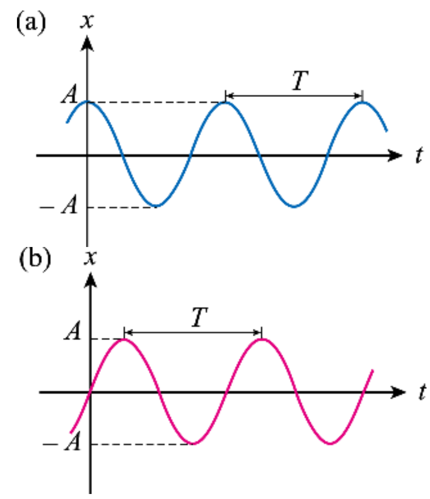
∴圖 5-9　觀察掛在彈簧上質點的振動，會發現外力去除後物體受彈簧的恢復力開始向原點方向運動，質點距平衡點的位移 x 呈現餘弦函數的振盪。

Note

ω 在簡諧運動中為角頻率，ω 在圓周運動中則為角速度。

由 $\omega t = \frac{2\pi}{T}t = 2\pi\frac{t}{T}$，可知 ωt 等於(時間間隔 t 占週期 T 的比例)乘上 2π（2π 表示環繞一圈 360 度），因此 ωt 的意義可表示角度 θ。

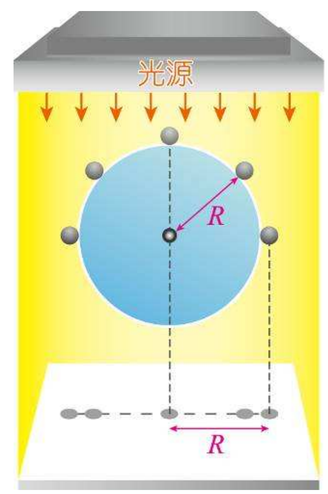
(5-15)式的函數圖形如圖 5-10(a)所示，質點會在 $x=A$ 和 $x=-A$ 之間在一直線上來回運動，其運動週期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 符合(5-16)式。$x=0$ 稱為平衡點，恰在軌跡的中點，而 $x=A$ 與 $x=-A$ 稱為端點。如圖 5-10(b)所示，若選取時間 $t=0$ 時，質點的位移恰在平衡點處且向右移動，則質點距平衡點的位移和時間 t 的數學關係式不再是如(5-15)式的餘弦函數，而是 $x=A\sin(\omega t)$。



∴圖 5-10　簡諧運動的位移 x 和時間 t 的關係圖。

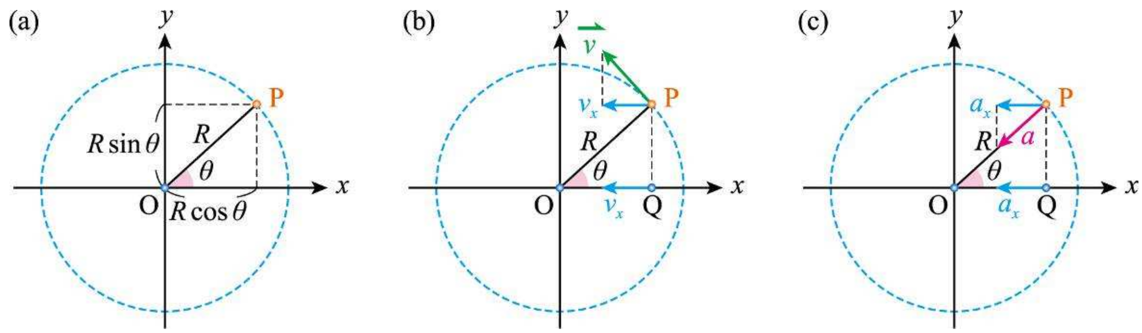
一、參考圓與簡諧運動

回顧質點在等速圓周運動的情形下，由(5-7)式中質點的位置向量在 x 軸上的分量為 $x=R\cos(\omega t)$，與簡諧運動中質點距平衡點的位移 x 和時間 t 的數學關係式(5-15)式：$x=A\cos(\omega t)$ 相比較，可以發現二者數學關係式很類似，因此質點的簡諧運動與等速圓周運動中的位置向量在 x 軸方向上的分量具有相同的數學關係式。實驗上可以利用圖 5-11 所示的實驗裝置來模擬：小球以半徑 R 在鉛直面上作等速圓周運動，而其上方恰有類似太陽光的平行光照射在小球上，如圖 5-11。小球在地面上的投影，會在一直線上來回運動，此小球投影的運動即為簡諧運動，圓周運動半徑 R 即為簡諧運動的振幅，圓周運動的週期 T 也是簡諧運動週期。



∴圖 5-11　在鉛直面上以半徑 R 作等速圓周運動的小球，由上方以平行光照射之，則在地面上的球影即為簡諧運動。

前述質點的速度與加速度在簡諧運動與等速圓周運動中的 x 軸方向上的分量具有相同的數學關係式。當小球作等速圓周運動時的半徑為 R，角速度為 ω，由(5-5)式與(5-9)式可以得到小球運動的速率 $v=R\omega$，向心加速度 $a=R\omega^2$。由於小球在作等速圓周運動時，它在直徑上的投影作簡諧運動，由



∴圖 5-12　由小球作等速圓周運動時在直徑上的投影，可以得到簡諧運動的速度與加速度，其中 $\theta=\omega t$。圖(a)為位移 x；圖(b)為速度 v_x；圖(c)為加速度 a_x。

$\omega=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{\theta-0}{t-0}$，因此 $\theta=\omega t$，可以得到小球的位置向量在直徑上投影得到的分量為

$$x = R\cos\theta = R\cos(\omega t) \qquad (5\text{-}17)$$

由圖 5-12 可得小球速度向量與加速度向量在 x 軸上的投影（x 分量）分別為

$$v_x = -v\sin\theta = -R\omega\sin(\omega t) \qquad (5\text{-}18)$$

$$a_x = -a\cos\theta = -R\omega^2\cos(\omega t) \qquad (5\text{-}19)$$

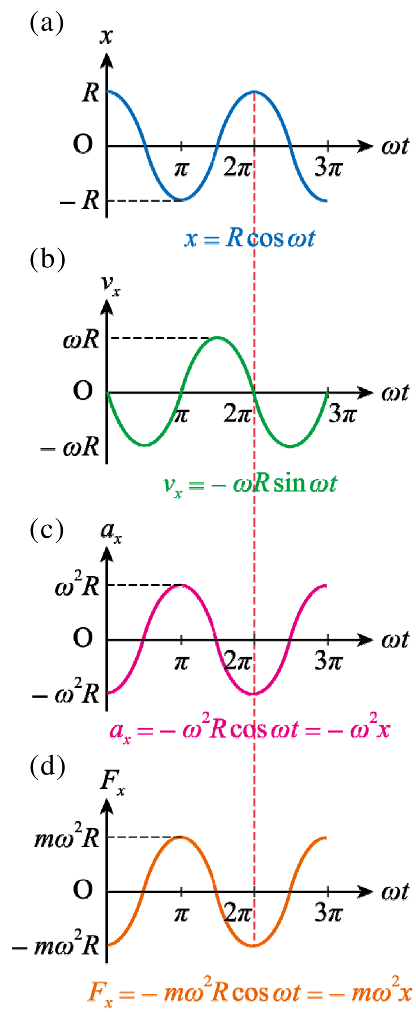
(5-18)式與(5-19)式分別代表物體作簡諧運動時所具有的速度與加速度。比較(5-17)式與(5-19)式，可以得到

$$a_x = -\omega^2 x \qquad (5\text{-}20)$$

由牛頓第二運動定律 $F_x=ma_x$，可知

$$F_x = -m\omega^2 x \qquad (5\text{-}21)$$

(5-21)式表示簡諧運動中質點所受恢復力的大小與質點位移的大小成正比，且恢復力與位移的方向相反。



∴圖 5-13　物體作簡諧運動時：
(a)位置與時間的關係圖；
(b)速度與時間的關係圖；
(c)加速度與時間的關係圖；
(d)恢復力與時間的關係圖。

而由(5-17)式、(5-18)式、(5-19)式與(5-21)式可以得到物體作簡諧運動時的位移 x、速度 v_x、加速度 a_x 與恢復力 F_x 之數學形式，將這些物理量繪圖如圖 5-13 所示。由圖中可以清楚看到物體作簡諧運動時，最大速度發生在平衡點上，此處的加速度為零；最大加速度則發生在左右端點上，此處的速度為零。物體作簡諧運動時的位移 x、速度 v_x、加速度 a_x 與恢復力 F_x 之關係整理如表 5-1 所示。

∴表 5-1　簡諧運動中，質點在不同位移時的速度、加速度與所受恢復力的關係，R 為參考圓的半徑。

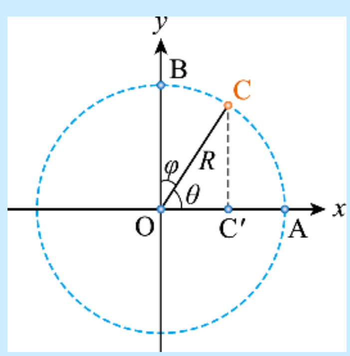
	左端點	平衡點	右端點
位移 x	$-R$（量值最大）	0（量值最小）	$+R$（量值最大）
速度 v_x	0（量值最小）	$\pm R\omega$（量值最大）	0（量值最小）
加速度 a_x	$+R\omega^2$（量值最大）	0（量值最小）	$-R\omega^2$（量值最大）
恢復力 F_x	$+mR\omega^2$（量值最大）	0（量值最小）	$-mR\omega^2$（量值最大）

Note

當質點距平衡點的位移 x 與時間 t 的關係呈現正弦或餘弦函數，此質點必然作簡諧運動。當位移 x 與時間 t 的關係呈現餘弦函數，則速度與時間的關係呈現正弦函數，而加速度與時間的關係呈現餘弦函數。

例題　5-6

在 x 軸作簡諧運動的物體，不停的來回作週期運動如右圖，因計時的起點不同，其位置函數的表示方式也就不同，相對應的圓周運動也不同。



(1) 若質點在半徑 R，角速度為 ω 的參考圓上，由 A 點出發逆時針方向運動，$\theta=\omega t$ 為位置向量與 x 軸的夾角，其在 x 軸的投影位置就是由右端點出發向左運動的簡諧運動，此簡諧運動的 $x(t)$ 函數為何？

(2) 若質點在半徑 R，角速度為 ω 的參考圓上，由 B 點順時針方向運動，$\varphi=\omega t'$ 為位置向量與 y 軸的夾角，其在 x 軸的投影位置就是由平衡點出發向右運動的簡諧運動，此簡諧運動的 $x(t')$ 函數為何？

解　(1)圖中參考圓上的 C 點投影在 x 軸上的 C′點，投影位置距平衡點的位移 x 即 $\overline{OC'}$ 長，$x = R\cos\theta = R\cos(\omega t)$。

(2)考慮質點在參考圓上由 B 點到 C 點，以角度 φ 來表示其位置，其投影位置距平衡點的位移 x 應表為 $x = R\sin\varphi = R\sin(\omega t')$。

自我練習

由平衡點出發向左運動的簡諧運動，$x(t)$ 函數為何？該如何選擇相對應的參考圓？

例題　5-7

地震發生常常帶來破壞，當地震來襲時傳來水平方向的振動，置於地板的物體開始水平搖擺作簡諧運動如右圖，設某地測得物體位移對時間的函數為 $x = 0.020\cos(10t)$，其中物理量的單位皆為 SI 制，請回答下列問題：

(1) 物體之振幅、週期、最大速率、最大加速度的量值各為多少？

(2) 當物體振動到最右端，再向左運動到達位移 $x = 0.010$ 公尺時，其速度與加速度各為多少？（方向向右為正值）

(3) 若物體與地面的靜摩擦係數為 0.50，此物體是否會因為地震而滑動？

解　(1)依簡諧運動，其位移對時間的基本函數形式：$x = R\cos(\omega t)$ 可知：

振幅 $R = 0.020$（m），亦即 x 的最大值；

角頻率 $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 10$，週期 $T = \dfrac{2\pi}{10} = 0.63$（s）；

$v_x = -R\omega\sin(\omega t)$，最大速率 $= R\omega = 0.020\times10 = 0.20$（m/s）；

$a_x = -R\omega^2\cos(\omega t)$，最大加速度的量值 $= R\omega^2 = 0.020\times10^2 = 2.0$（$\mathrm{m/s^2}$）。

5

(2)《方法一》

當其向左運動 $x = 0.020 \cdot \cos(10t) = 0.010$ ， $\cos(10t) = 0.50$ ，

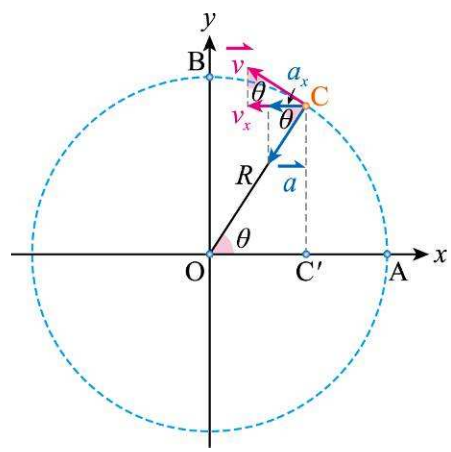
$\sin(10t) = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \pm 0.87$ ； $v_x = -0.20\sin(10t) = \mp\dfrac{\sqrt{3}}{10} = \mp 0.17$ （m/s），

物體向左運動，速度取負值 $v_x = -\dfrac{\sqrt{3}}{10} = -0.17$ （m/s）；

$a_x = -2.0\cos(10t) = -2.0 \times \dfrac{1}{2} = -1.0$ （m/s^2）。

《方法二》

若以對應的等速圓周運動來看，當 $x = 0.010$ 公尺，此時對應的等速圓周運動上質點在圖上 C 點之位置，



$0.010 = 0.020\cos\theta$ ，得 $\theta = \dfrac{\pi}{3} = 60°$ ；

而後可再由圖中看出，

C 點的切線速度在 x 軸的投影量

$v_x = -0.20\sin\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{10} = -0.17$ （m/s），

此即為該物體之速度 v。

同理，亦可由圖中看出，C 點的切線加速度在 x 軸的投影量

$a_x = -2.0\cos\dfrac{\pi}{3} = -2.0 \times \dfrac{1}{2} = -1.0$ （ m/s^2 ），

此即為該物體之加速度 a。

(3) 地震時的最大加速度為 $2.0\ m/s^2$ ，質量為 M 的物體若要隨地面運動，需施力 $F = Ma = 2M$ ，

地面與物體間的最大靜摩擦力 $= Mg\mu_s = M \times 9.8 \times 0.50 = 4.9M$

大於運動時所需的作用力，故不會滑動。

【註：地震時須慎防物架、櫥櫃、花瓶等物體傾倒。】

自我練習

當物體自平衡點向右運動到達位置 $x = 0.010$ m 時，其速度與加速度各為多少？

二、彈簧的振盪運動

在光滑水平面上一理想彈簧的一端固定在牆壁上，另一端則繫上質量為 m 的物體，如圖 5-14 所示。彈簧未受力時物體的位置取為原點 $x = 0$，當沿著彈簧的軸心方向（x 方向）施力使彈簧伸長，外力去除後物體受彈簧的恢復力開始向原點方向運動，物體受彈簧的恢復力 $\vec{F_s}$ 遵守虎克定律

$$F_s = F_x = -kx \tag{5-22}$$

其中 k 為彈簧的力常數，發現物體受彈簧的恢復力，其加速度和其位移成正比，但方向相反，比較物體作簡諧運動時所受的力，由(5-21)式，

$$F_x = -m\omega^2 x$$

此力和其位移成正比但方向相反，正合乎簡諧運動的特性，因此受彈簧的恢復力作用的物體，作簡諧運動。比較(5-21)式與(5-22)式得

$$k = m\omega^2 \tag{5-23}$$

因此彈簧上的振盪物體作簡諧運動的角頻率

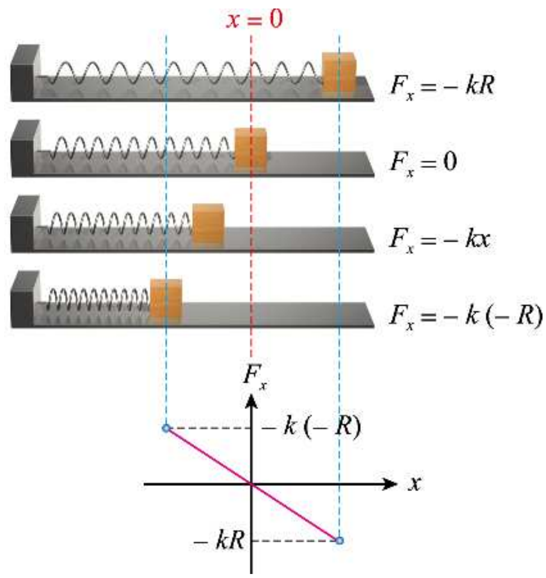
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{5-24}$$

而其週期 T 則為

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{5-25}$$

Note

內部摩擦不考慮的輕彈簧，在其比例限度內可視為一理想彈簧。

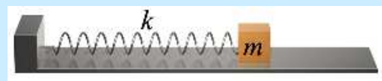


∴圖 5-14　物體受彈簧的恢復力遵守虎克定律 $\vec{F_x} = -k\,\vec{x}$。

(5-25)式表示彈簧的振動週期與彈簧的力常數的平方根成反比，而與所繫物體質量的平方根成正比，但和振幅無關。只要是拉開彈簧不超過其彈性限度，彈簧的恢復力遵守虎克定律，彈簧上的物體作簡諧運動的週期不變。較不易拉開或壓縮的彈簧，其力常數 k 值較大，稱為硬彈簧；當硬彈簧振動起來，其所繫物體振動週期比掛在軟彈簧上小，也就是說硬彈簧振動的頻率比軟彈簧為高。

例題 5-8

一彈簧之力常數 $k=100$ 牛頓／公尺，一端固定，另端繫一質量 $m=1.0$ 公斤的物體，如圖所示，使其在光滑水平面上作簡諧運動，振幅為 10 公分。請回答下列問題：



(1) 簡諧運動的週期為多少？

(2) 物體經過平衡點時速率最大，此最大速率為多少？

(3) 當物體距平衡點 8.0 公分時，加速度的量值為多少？

解

(1)週期 $T=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}=2\pi\sqrt{\dfrac{1.0}{100}}=0.20\pi=0.63$（s）。

(2)最大速率即為參考圓的速率 $=\dfrac{2\pi R}{T}=\dfrac{2\pi\times0.10}{0.20\pi}=10\times0.10=1.0$（m/s）。

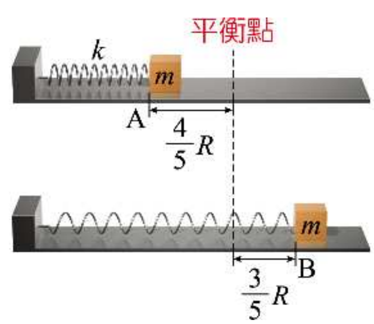
(3)當物體距平衡點 8.0 公分時，

彈簧力的量值 $=kx=100\times0.080=8.0$（N），

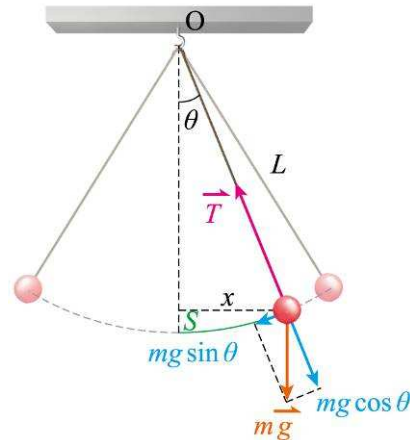
加速度 $a=\dfrac{F}{m}=\dfrac{8.0}{1.0}=8.0$（$m/s^2$）。

自我練習

如右圖，物體由圖中 A 點運動至 B 點，歷時最少需多久？（R 為振幅）



三、單擺運動



∴圖 5-15　單擺以小角度擺動，作簡諧運動，$2S$ 為弧長，x 為擺錘離開鉛直線的水平位移（此圖中的角度 θ 為求繪圖清楚，畫得較大些）。

如圖 5-1 所示，利用一長度 L、質量不計的細繩，在下方懸著質量為 m 的擺錘，將擺錘移至與鉛直線夾 θ_0 角處靜止釋放，擺錘將以 θ_0 角來回擺動，此裝置稱為單擺，而伽利略發現單擺在小角度擺動時，擺動週期為定值。

當擺角為 θ 之瞬間，擺錘所受沿圓弧的切線方向的力為

$$F_t = -mg\sin\theta \tag{5-26}$$

負號表示所受力為恢復力，當以小角度擺動時（θ 很小時，見表 5-2），$\sin\theta \approx \theta = \dfrac{S}{L}$，此時擺錘擺動的圓弧 $2S$ 接近於弦長 $2x$，即 $S \approx x$，因此(5-26)式可寫為

$$F_t = -mg\sin\theta \approx -mg\theta \approx -mg\frac{x}{L} \tag{5-27}$$

∴表 5-2　θ 與 $\sin\theta$ 的比較

θ（度）	60°	45°	30°	10°	5°	2°
θ（rad）	1.0472	0.7854	0.5236	0.1745	0.0873	0.0349
$\sin\theta$	0.8660	0.7071	0.5000	0.1736	0.0872	0.0349

由於 F_t 提供了沿切線方向的力，當以小角度擺動時（θ 很小時），F_t 可視為在水平方向，如同水平面上彈簧上的物體受到的恢復力，而且擺錘的運動軌跡也可被視為是一直線，同時 x 也可被視為就是擺錘離開平衡點的位移。因此小角度的單擺擺動可視為在水平方向上的簡諧運動，與(5-21)式相較，可以得到

$$F = -m\omega^2 x = -m\left(\frac{g}{L}\right)x \tag{5-28}$$

由(5-28)式恢復力的量值 F 和位移的量值 x 成正比且二者方向相反，所以可知小角度的單擺擺動也是簡諧運動，由(5-28)式可得角頻率為

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \tag{5-29}$$

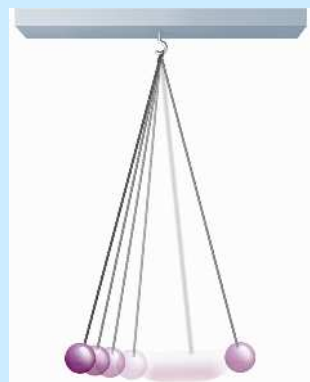
而其擺動的週期 T 為

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \tag{5-30}$$

在週期的推導過程中，位移 x 與擺錘質量 m 先後被消去，這表示單擺在小角度擺動時和上述二者無關，最後只與擺長 L 和實驗地點的重力加速度 g 有關，所以利用單擺週期的特性可用來製作一個簡單的計時工具，方便人類的使用。

例題 5-9

週期為 2.0 秒的單擺稱為秒擺如右圖所示，欲製造一個秒擺，擺長與擺錘的質量各為多少？



解 單擺的週期 $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = 2.0$，

擺長 $L = (\frac{2.0}{2\pi})^2 \times 9.8 = \frac{9.8}{\pi^2} \approx 1.0$（m），

此週期與擺錘質量無關，只要擺繩質量相對於擺錘質量可忽略即可。

自我練習

週期為 1.0 秒的單擺，擺長為多少？

簡諧運動存在於許多自然界的現象中，大如地震波的傳遞、直立的汽油桶在海水中載浮載沉，小到固體中的原子在平衡點附近振盪，如圖 5-16 所示，都可以用簡諧運動來描述。

想一想

哪些原則可作為判斷物體是否作簡諧運動的依據？

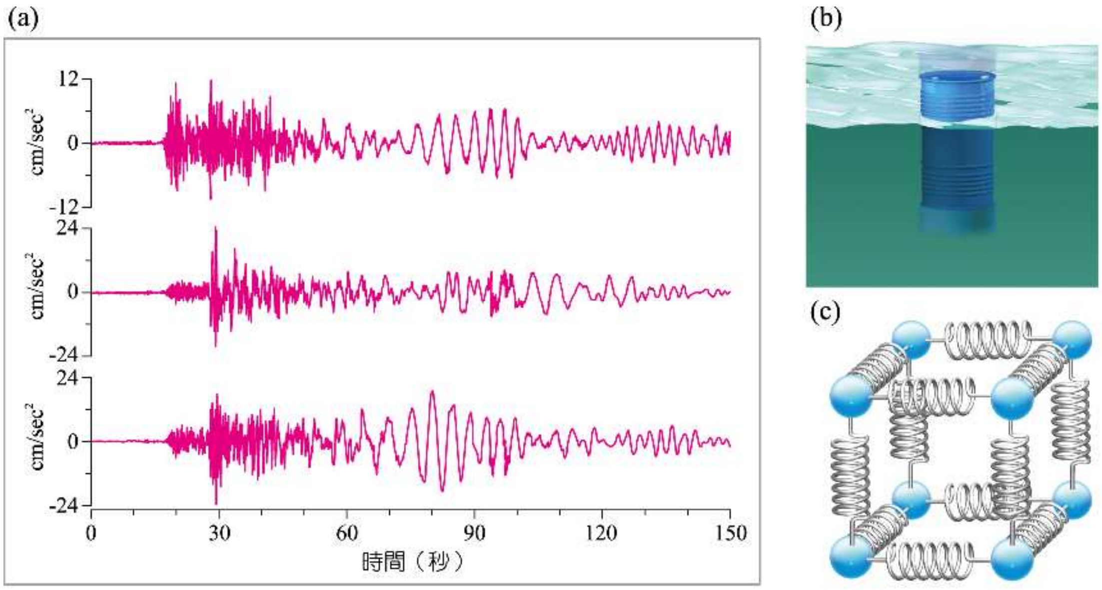
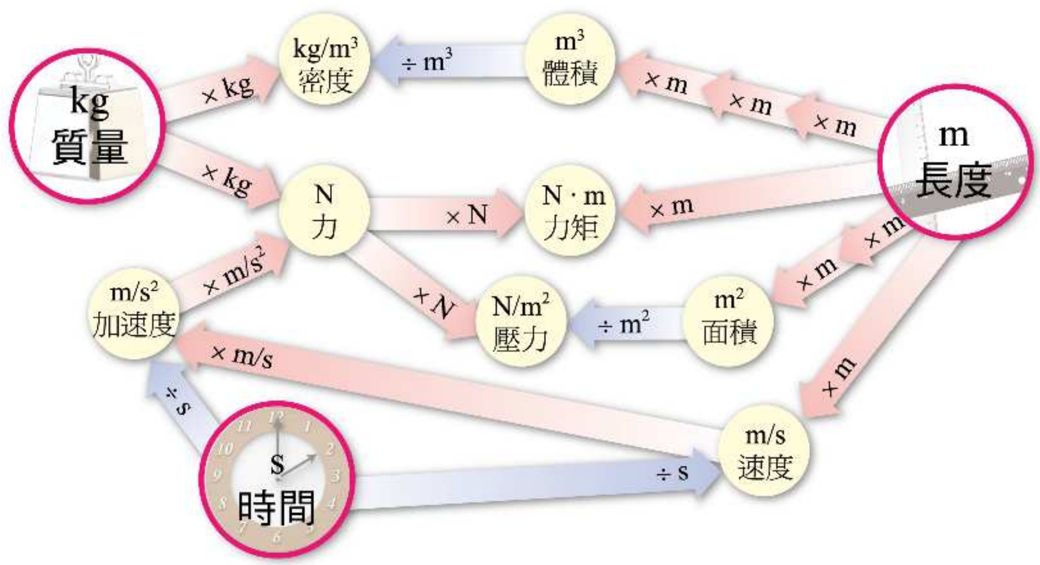


圖 5-16　簡諧運動存在於許多自然界的現象中。
(a) 地震儀記錄下的地震波　(b) 直立的汽油桶在海水中載浮載沉
(c) 原子在平衡點附近振盪，在固體內原子間之作用力可以比擬為彈簧力。

5-3 物理量的因次

在人類的歷史上，因為文明發展與地域的不同，長度的單位也不斷演進與更替，除了公尺之外，還有英吋、英呎等，甚至也可以用一支筷子長等其他方式來表示。不過使用不同的單位名稱，在測量同一物體時，數字部分會各有不同。但如果使用正確的測量方式，也都能正確的表示物體的長度，測量結果皆能代表「長度」這個物理量。像這種描述相同物理量的不同單位，我們稱它們都具有相同的因次（dimension）「長度」，以 L 表示；所有的質量單位，例如公斤、公克、毫克等也具有相同的質量因次；而所有的時間單位，例如秒、月、季等，也具有相同的時間因次。這三個因次對應到力學中物理量的**基本單位**（basic units）：長度（以 L 表示）、質量（以 M 表示）和時間（以 T 表示）。其他的物理量的單位可以從基本單位導出，稱為**導出單位**（derived units），例如加速度單位為 m/s^2，是從長度單位 m 和時間單位 s 導出；又如力的單位 $kg \cdot m/s^2$，是從質量單位 kg、長度單位 m 和時間單位 s 所導出，如圖 5-17 為力學中的基本單位與導出單位關係圖。在力學中物理量的



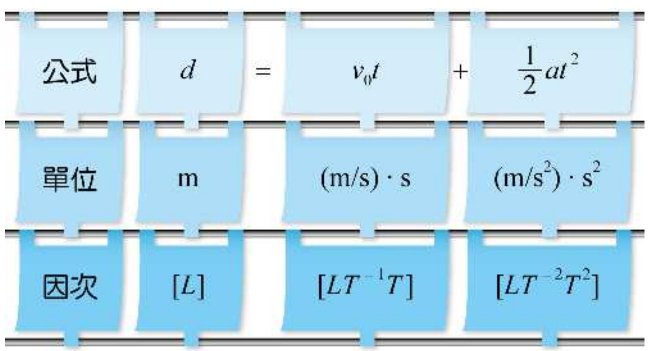
∴圖 5-17　力學中基本單位與導出單位關係圖。

因次都可以寫成 $L^aM^bT^c$ 的形式，以 $[L^aM^bT^c]$ 來表示，例如加速度的因次為 $[LT^{-2}]$，動量的因次為 $[LMT^{-1}]$ 等。表 5-3 列出一些力學中物理量的因次。

∴表 5-3 力學物理量的因次

物理量	因次	物理量	因次	物理量	因次
長度	$[L]$	面積	$[L^2]$	體積	$[L^3]$
時間	$[T]$	速度	$[LT^{-1}]$	加速度	$[LT^{-2}]$
質量	$[M]$	動量	$[LMT^{-1}]$	力	$[LMT^{-2}]$
力矩	$[L^2MT^{-2}]$	角度	1	角速度	$[T^{-1}]$
功	$[L^2MT^{-2}]$	動能	$[L^2MT^{-2}]$	位能	$[L^2MT^{-2}]$
衝量	$[LMT^{-1}]$				

任何物理量都有一定的因次；當兩物理量具有相同因次時，才可以進行加、減的代數運算，也因此一個等式兩邊的物理量就必然具有相同的因次。而因次的概念可以用來分析兩個物理量是否相同，例如焦耳與卡就具有相同的因次。因次也可以檢驗物理公式中各項的物理量是否一致，例如等加速度運動中 d、v_0t 與 $\frac{1}{2}at^2$ 應有相同的因次「長度」，如圖 5-18 所示。



∴圖 5-18　物理公式、物理單位與因次的相關性質。

以等加速度公式中，$v = v_0 + at$ 為例，寫出各項因次如下：

公式	v	=	v_0	+	at
因次	$[\frac{L}{T}]$		$[\frac{L}{T}]$		$[\frac{L}{T^2}T]$

等式兩邊的各項因次是相同的，因此等式是可以成立的。另外一例是某生經過冗長的計算後，得到速度、加速度與時間之間有如下關係，$v = v_0 + at^2$，不知此結論是否正確。如果寫出等式兩邊的因次，可以得到式子右邊第二項的因次為$[\frac{L}{T^2} \times T^2] = [L]$，與其他兩項不同，故很容易可以發現此項有誤。

Note

不同的物理量可能會有相同的因次，但因次不同必為不同的物理量。

例題 5-10

利用虎克定律寫出彈簧的力常數 k 的因次，並利用物理量的因次分析，找出彈簧振動的週期公式。

解 將質量為 m 的物體連在彈簧上並在光滑的水平面上作簡諧運動，彈簧振動的週期公式可能與彈簧的力常數 k、振動物體的質量 m、振幅 R 三者有關，故週期 T 的公式可以寫為 $T = ck^x m^y R^z$，c 為無因次的常數。

由 $k = \frac{作用力}{形變量}$，k 的因次為 $[LMT^{-2}L^{-1}] = [MT^{-2}]$，質量 m 的因次為 $[M]$，振幅 R 的因次為 $[L]$，將各物理量用因次表示，即 $[T] = [(MT^{-2})^x (M)^y (L)^z]$，比較等號兩邊相同因次的冪次，可得 $\begin{cases} x + y = 0 \\ -2x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$，

聯立式可解得 $z = 0$，$x = -\frac{1}{2}$，$y = \frac{1}{2}$，故週期的公式為：$T = c\sqrt{\frac{m}{k}}$，其中係數 c 為一無因次的常數，可以透過實驗測量 T、m、k 三個值來得到。

延伸閱讀與觀念分析

延伸閱讀：傅科擺（Foucault pendulum）

天文學家哥白尼（Nicolaus Copernicus，波蘭，1473～1543）在 1540 年提出了地動說，指出太陽是宇宙的中心，自轉中的地球，繞著太陽作公轉，哥白尼的地動說合理的解釋了當時觀察到的行星運行的現象。牛頓的萬有引力學說指出物質和物質之間皆有引力的存在，當物體的質量愈大，萬有引力就會愈強。因為太陽的質量很大，因此地球會受太陽巨大的萬有引力吸引，提供地球繞行太陽公轉所需的向心力，因而得以週而復始的運轉；另一方面，地球表面的物體與地球間也有萬有引力吸引，因此地表附近的物體受到指向地心的重力作用，不會因為地球的轉動而脫離了地球。

牛頓的萬有引力學說對地球的公轉運動現象提出了合理的解釋，法國著名的物理學家傅科（Léon Foucault，法國，1819～1868），在 1851 年利用傅科擺證明了地球自轉的現象。將重物掛在一條很長的細繩上，當拉開重物放手後它會開始擺動形成單擺，觀察過一段時間後會發現單擺擺動的方向變了，擺動平面旋轉的擺稱為傅科擺。分析這種擺動現象，是因為在地面上的單擺產生擺動時，單擺系統沒有受到外力矩作用，它的擺動平面會維持固定；但是觀測者卻隨著地球自轉而不自覺，但與擺動平面有相對運動，因此對於觀測者而言，單擺的擺動平面隨著時間過去會緩慢地旋轉。

想像在北極掛上一個單擺，地球旋轉軸通過單擺的懸掛點，由天空往地面看，地球每 24 小時逆時針旋轉一圈；相對而言，在地面上觀察傅科擺則會發現傅科擺的擺動平面順時針旋轉一圈。類似的實驗設計在北半球，會發現傅科擺的擺動平面總是順時針方向轉動，愈接近赤道的地方，擺面轉動速率愈小；而在赤道上傅科擺擺面是不轉動的；傅科擺在南半球，擺面則以逆時針方向轉動。

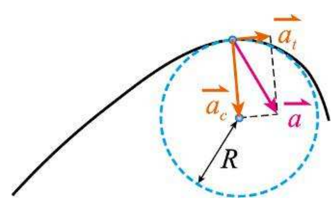
延伸閱讀與觀念分析

巴黎 先賢祠（Panthéon）中有傅科在 1851 年設計的傅科擺，他把 67 公尺長的鋼絲一端懸掛在屋頂上，另外一端則掛上一個質量為 28 公斤的大鐵球，並使這個裝置可以在任意方向自由擺動。這個壯觀的物理裝置使先賢祠成為巴黎最具吸引力的觀光景點，每隔約五分鐘，單擺的底端就會碰到一根小木柱，到這兒參觀的觀眾個個屏氣凝神，隨著這週期性擺動與期待中，細心的體會地球的運轉。

∴圖 5-18　傅科擺

觀念分析

本章討論了等速圓周運動，但真實生活中有許多的圓周運動並不是等速率的。當一個質點作圓周運動時又愈轉愈快，質點速度的方向隨時間改變，所以必定受有向心力，因此具有沿著半徑指向曲率中心的向心加速度 $\overrightarrow{a_c}$ ，但它的速率增加，因此在運動軌跡的切線方向的速率大小就有變化，也就是說質點具有切線方向的加速度 $\overrightarrow{a_T}$ 。一質點若作曲線運動且運動速率又有變化時，它同時具有向心加速度與切向加速度，向心加速度 $\overrightarrow{a_c}$ 的方向指向該點的曲率中心，大小則為瞬時速率的平方除以該點的曲率半徑 R，也就是 $|\overrightarrow{a_c}|=\dfrac{v^2}{R}$，任意曲線上由於曲率隨位置而變，所對應向心加速度的方向也隨曲率中心而改變，不是固定在一處。切向加速度 $\overrightarrow{a_T}$ 的方向則在質點運動路徑的切線方向上。值得注意的是，速度的方向永遠在質點運動路徑的切線方向上。



∴圖 5-20　質點若作曲線運動且運動速率又有變化時，它同時具有向心加速度與切向加速度。

本章重點

5-1 等速圓周運動

1. 質點以等速率沿著圓周繞中心軸轉動，則稱為等速圓周運動。
2. 質點作半徑為 R 的等速圓周運動，其 Δt 時間內的角移為 $\Delta\theta$，則質點角速度

   $\omega=\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}=\dfrac{2\pi}{T}=2\pi f$，速率 $v=R\omega$，向心加速度 $a=R\omega^2=\dfrac{v^2}{R}=\dfrac{4\pi^2R}{T^2}$。

5-2 簡諧運動

3. 當一個質點在其平衡位置附近，沿一直線作往復的週期性運動，恢復力的量值與位移的量值成正比，且兩者方向相反，此時質點距平衡點的位移隨時間變化關係符合正弦或餘弦函數，該質點作簡諧運動。
4. 受彈簧的恢復力作用的物體，作簡諧運動，其角頻率 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$，而其週期

   $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$。
5. 小角度的單擺擺動也是簡諧運動，擺動的角頻率為 $\omega=\sqrt{\dfrac{g}{L}}$，擺動的週期

   $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$。

5-3 物理量的因次

6. 力學中基本物理量：長度（因次以[L]表示）、質量（因次以[M]表示）和時間（因次以[T]表示）。
7. 具有相同因次的物理量才可以進行相加或相減的代數運算，也因此一個等式兩邊的物理量必須具有相同的因次。

習題

觀念題

1. 請指出以下敘述的誤謬之處：

   (1) 對物體的施力愈大，則物體的末速愈大。

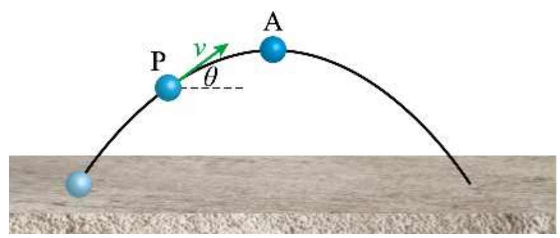
   (2) 週期運動的物體即為簡諧運動。

   (3) 太空船繞地球作等速圓周運動，因位置（與地心距離 R）尚未改變，若瞬間速率變小，則加速度瞬間變小。

   (4) 彈簧振子作簡諧運動，其振幅愈大則週期愈大。

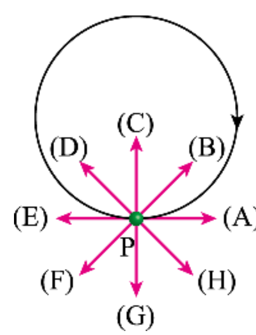
2. 行星繞太陽作橢圓運動，其加速度是否恆指向太陽？其向心加速度是否恆指向太陽？

3. 斜向拋射之拋體運動如右圖，最高點 A 之向心加速度為若干？若任意點 P 之速率為 v，方向與水平夾 θ 角，則此時之向心加速度為若干？

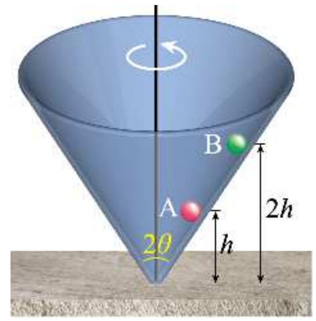


4. 等速圓周運動的物體具有以下哪些性質？ (A)必為等速運動 (B)必受到力的作用 (C)為等加速運動 (D)必具有法線速度 (E)必具有法向加速度 (F)必具有切向加速度。

5. 一質點作順時針方向的圓周運動，如右圖所示，若速率愈來愈慢，則在 P 點處之加速度的方向為何？

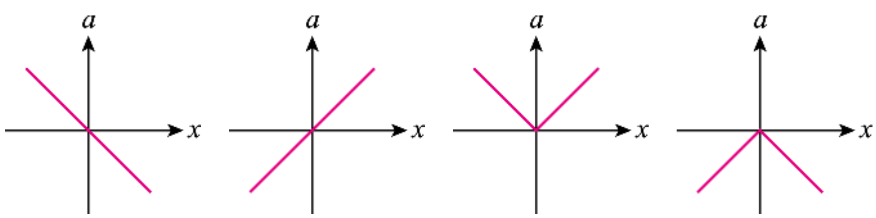


6. 右圖是一圓錐體，錐角為 2θ，倒立在地面上，有一小球 A 放在內壁距地面高 h 處作等速圓周運動，另一小球 B 放在內壁距地面高 $2h$ 處作等速圓周運動，則兩球之速率何者較大？



7. 簡諧運動中，加速度與位移的關係圖為下列何者？

(A) (B) (C) (D)



基礎題

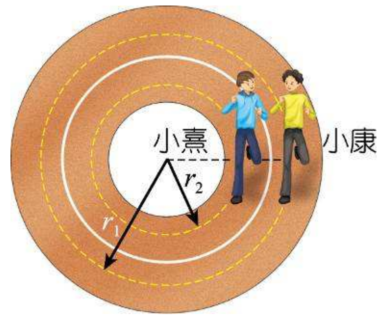
5-1 等速圓周運動

1. 一掛鐘的秒針長 6.0 公分，當其自 t_1 位置至 t_2 位置之時間間隔內，請完成下表中秒針尖端的各物理量：

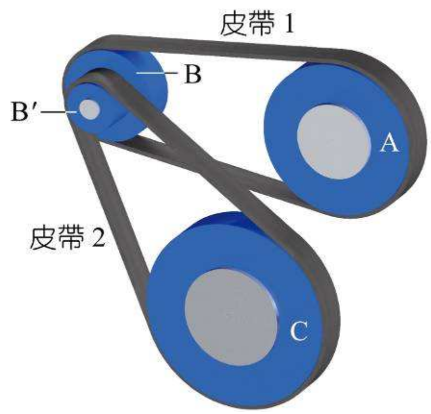
	t_1	t_2	平均速度量值	平均速率	平均加速度量值
1	0 秒	10 秒			
2	0 秒	15 秒			
3	0 秒	20 秒			
4	0 秒	30 秒			
5	0 秒	1 秒			

習題

2. 小康、小熹兩人沿圓形軌道同向跑步，小康沿著半徑為 r_1 的外跑道跑，小熹則沿著半徑為 r_2 的內跑道跑如右圖，設小康、小熹的速率皆為 v，則兩人的角速度比為多少？多久之後，小熹將超前小康一圈？

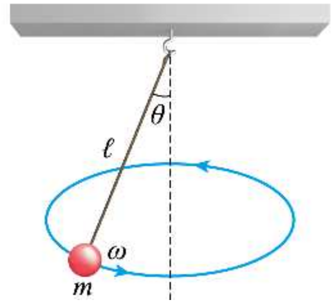


3. 如右圖為一飛輪系統，各輪的轉軸均固定且相互平行，B、B′二輪同軸且無相對轉動，A、B、B′、C 四輪的半徑比為 5：4：2：7，若傳動帶在各輪轉動中不打滑，則 A、C 二輪之角速度比為多少？

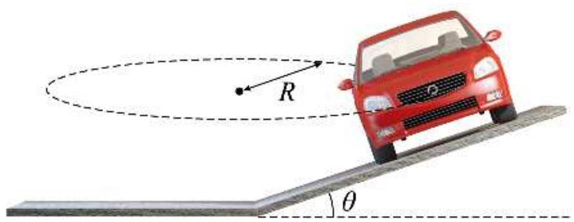


4. 腳踏車前（腳踏板處）、後（後輪處）二齒輪分別為 60 齒及 20 齒，並以鏈條連接，若後車輪輪緣距軸心 0.50 公尺，且和地面間沒有滑動現象，踏板、後輪與齒輪間皆不空轉，則腳踩一圈，車子前進多少公尺？

5. 如右圖，一單擺長為 ℓ ，擺錘質量為 m，當擺錘在一水平面上以等角速度 ω 繞鉛垂線旋轉時，若擺線與鉛垂線的夾角為 θ，則 $\cos\theta$ 等於多少？



6. 車子在彎路上前進，彎路與水平傾斜角度為 θ 角，曲率半徑為 R 如右圖，如果此車不利用摩擦力轉彎，則車子的速率應為多少？

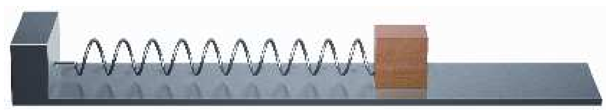


7. 如右圖，有一半球形的碗，碗壁光滑，固定於水平地面上，今有一質量為 m 的質點由碗緣自由下滑至碗底時，其角速度、向心加速度及碗壁對小球的正向力各為多少？

習題

5-2 簡諧運動

8. 如下圖，選出下列物體水平彈簧之彈力作用作簡諧運動所對應的圖形（取向右為正），圖中橫向坐標軸皆為時間軸。

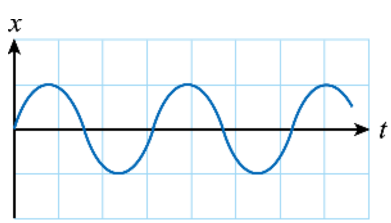


(1)由右端點開始運動的位置－時間函數圖。

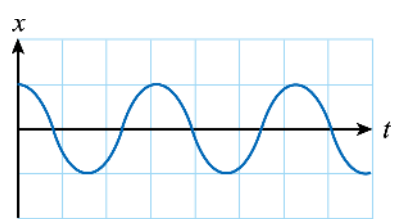
(2)由平衡點開始向右運動的加速度－時間函數圖。

(3)由左端點開始運動的速度－時間函數圖。

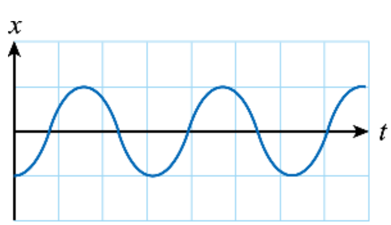
(A)



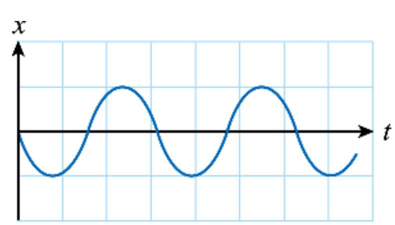
(B)



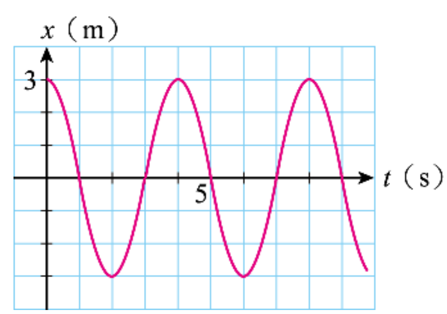
(C)



(D)



9. 右圖為某物體位置－時間關係圖，何時的加速度量值最大？此最大加速度量值為何？



10. 將一小沙漏裝滿沙子，用細線懸吊並使其作小角度擺動，在地上展開一長紙捲，讓擺動的沙漏將沙子漏在上面，並沿垂直於單擺擺動面的方向，以 6.0 公分／秒的速度拉動紙捲，紙上細沙痕跡如圖所示，則單擺週期為何？其擺長的長度為多少？（設重力加速度 $g = 10$ 公尺／秒 ^{2}）

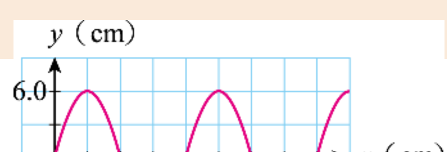
11. 一物體作簡諧運動，其最大速度為 2.0 公尺／秒，且最大加速度為 4.0 公尺／秒 ^{2}，則其週期與最大位移各為多少？

12. 設一物體作水平的 SHM，其位移與時間的關係為 $x = \frac{1}{3}\cos 8t$ ，各物理量均為 SI 制單位。求出下列各物理量：
(1)振幅。(2)週期。(3)最大速率。(4)最大加速度的量值。(5)當物體自其初位置向平衡點運動中行至位移為振幅之半處至少所需時間。

5-3 物理量的因次

13. 請由相關的公式推算，求得作用力 F 的因次。

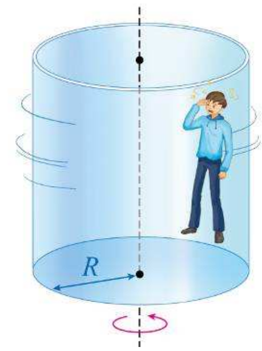
14. 某生考試時，臨時忘記運動公式的正確形式，只記得 $v^2 = v_0^2 + 2a(?)$ ，請由因次的分析找出括號內是什麼物理量？



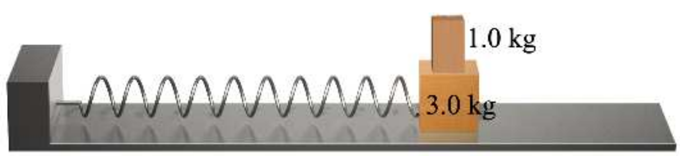
習題

綜合題

1. 小康靠在一大圓柱筒內壁如右圖，小康與內壁的靜摩擦係數是 μ，圓柱筒的半徑為 R。當小康與圓柱筒繞中心軸一起旋轉時小康不會摔下去，則轉動的最小頻率為多少？



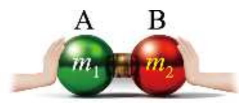
2. 一質量為 3.0 公斤的大木塊受彈力作用（彈簧的力常數為 100 牛頓／公尺），在光滑平面上作簡諧運動，另一質量為 1.0 公斤的小木塊置於大木塊上方，如圖所示。已知兩木塊間的靜摩擦係數為 0.50，若要維持兩木塊無相對運動，則大木塊最大速率為若干？（設重力加速度 g = 10 公尺／秒 ^{2}）



3. 比重為 s，截面積為 A，高 h 的長方形木塊浮於比重為 s_1 的液面時，如右圖所示，當施力下壓木塊一小段深度後放手，若不計水的阻力，則木塊是否作簡諧運動？其所作上下振動的週期為多少？

【註：浮力= 液面下的體積 × 液體密度】

4. 兩物體 A、B 的質量分別為 m_1 及 m_2，接在彈力常數為 k 的彈簧兩端如右圖。彈簧質量不計，把系統放在光滑水平桌面上。若將 A 與 B 相向壓縮彈簧，使彈簧減少 R 的距離後放手，則 A 與 B 都會作 SHM。試求：



(1)兩者的運動週期各為若干？　(2) A 在振動期間的最大速度量值為若干？

題組

在騎乘自行車時，如果有個碼表可以顯示時速，記錄里程，可以增加不少樂趣。自行車碼表通常又分成「有線」和「無線」兩種，如圖所示為自行車有線碼表，其構造主要由磁石 P 以及感應器 Q 作為偵測器，當有磁石通過感應器 Q 時，感應器即傳送一個訊號給碼表，碼表將每秒訊號數 f 乘以輪胎週長 $2\pi r$，即為車速 v，其關係表示為 $v=2\pi f$ 。

1.若輪胎半徑為 60 公分，磁石安裝位置距輪軸 40 公分，每秒訊號數 $f=4$ ，則車速為多少公尺／秒？

2.承上題，若磁石質量為 10 公克，則所受向心力為多少牛頓？