2-1 向量的運算

2-2 二維空間的位移、速度及加速度

2-3 二維的等加速運動—拋體運動

CH 2

平面運動

生活中的各種運動，不論是奔馳的跑者、投出的籃球、彈起的網球或擊出的棒球，其運動的軌跡都是在平面上。描述物體在平面的運動，一般需要兩個不同的坐標，圖中騰空飛躍的騎車特技，一如斜向拋出的球，都可利用拋體運動的獨立性將平面運動分解成兩個獨立的、彼此互相垂直的直線運動。在本章中將延伸推廣上一章所學，介紹如何描述與分析平面運動的問題。

CHAPTER 2 | 2-1

向量的運算

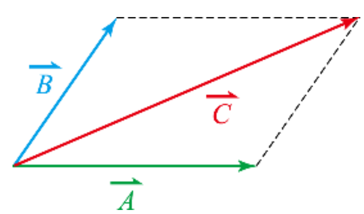
物理量因為性質的不同，通常可以分為純量與向量。純量為沒有方向性的物理量，如路徑長、速率、質量、溫度等。向量為同時具有方向和量值的物理量，如位置、位移、速度、加速度、力等。在一維空間中，常利用符號的正負來表示方向，但在討論二維空間時，則需要明確的方向，此時向量的基本性質及三角函數是非常有用的工具。因此，在此先介紹在物理學中經常涉及的向量性質與應用。

一、向量的合成

一向量 $\overrightarrow{A}$ 可以用帶有箭頭的線段 $\overrightarrow{PQ}$ 表示，如圖 2-1 所示。P 點稱為向量 $\overrightarrow{A}$ 的起點（箭尾端），Q 點為終點（箭頭端）。向量的方向由 P 指向 Q，即箭頭的方向。向量的量值以線段的長度來代表，通常以 A 或 $|\overrightarrow{A}|$ 表示之。

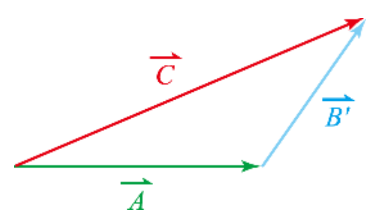
∴圖 2-1 $\overrightarrow{A}$ 可以用帶有箭頭的線段 $\overrightarrow{PQ}$ 表示。

兩向量的相加稱為向量的合成，可以使用平行四邊形法或三角形法。欲求向量 $\overrightarrow{C}=\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$，可將 $\overrightarrow{A}$ 和 $\overrightarrow{B}$ 起點置於同一點，在二向量之終點作平行於原向量之虛線，形成一平行四邊形，其對角線即為兩向量之和 $\overrightarrow{C}$，如圖 2-2 所示。此方法稱為平行四邊形法（parallelogram method）。



∴圖 2-2　平行四邊形法

我們也可以將 $\overrightarrow{B}$ 平行移至 $\overrightarrow{A}$ 的終點，使 $\overrightarrow{A}$、$\overrightarrow{B}$ 頭尾相接；自 $\overrightarrow{A}$ 的起點至 $\overrightarrow{B}$ 的終點所連接的向量 $\overrightarrow{C}$ 即為 $\overrightarrow{A}$、$\overrightarrow{B}$ 兩向量的和，如圖 2-3 所示，此方法稱為三角形法（triangle method）。比較圖 2-2 及圖 2-3 可以

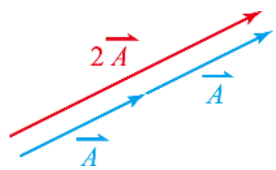


∴圖 2-3　三角形法

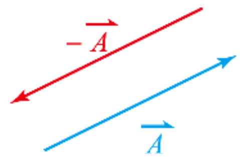
發現，三角形法中的三角形，即平行四邊形對角線所分割成的兩個全等三角形之一，故此二種方法是等效的。

二、純量與向量的乘積

$\vec{A}$ 為向量，m 為純數，則純數 m 與向量 $\vec{A}$ 的乘積 $m\vec{A}$ 為一向量，其量值為原來 A 的 $|m|$ 倍。若 m 為正值，則 $m\vec{A}$ 與 $\vec{A}$ 同方向；若 m 為負值，則 $m\vec{A}$ 與 $\vec{A}$ 反方向。如圖 2-4 所示，$2\vec{A}$ 之長度為 $\vec{A}$ 的 2 倍，方向與 $\vec{A}$ 相同；若 $m=-1$，則 $m\vec{A}=-\vec{A}$，$-\vec{A}$ 與 $\vec{A}$ 為量值相等，方向相反的兩向量，如圖 2-5 所示。



∴圖 2-4　$\vec{A}+\vec{A}=2\vec{A}$



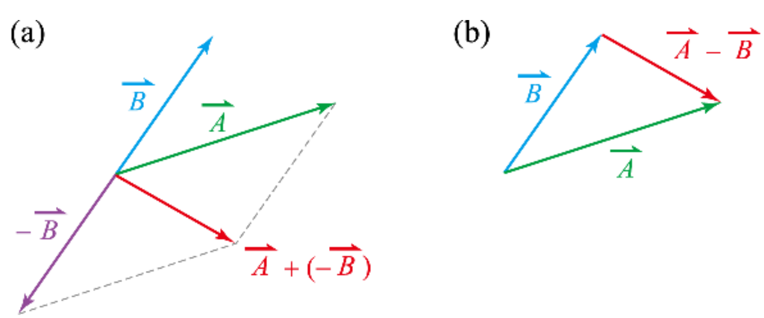
∴圖 2-5　$-\vec{A}$ 的方向和 $\vec{A}$ 相反，但兩者的量值相等，故 $\vec{A}+(-\vec{A})=0$。

三、向量的減法

兩向量相減可將欲減去的向量反向後，再以向量加法處理，即

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B}) \tag{2-1}$$

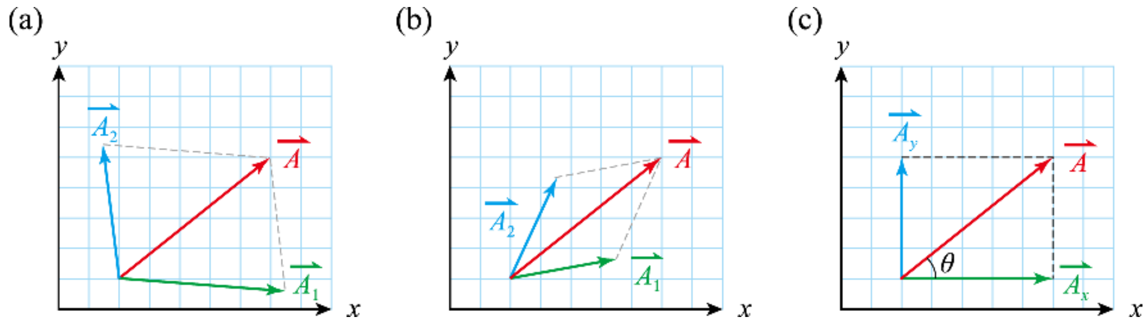
如圖 2-6(a) 所示。更簡便的方法是將兩向量之起點（即箭尾）重合在一點後，由第二向量（$\vec{B}$）的箭頭作一向量指向第一向量（$\vec{A}$）之箭頭，所作之向量即為 $\vec{A}-\vec{B}$，如圖 2-6 (b)所示。



∴圖 2-6　以作圖法求 $\vec{A}$ 和 $\vec{B}$ 的向量差。(a) 利用向量的加法。(b) 用向量的減法，將第二向量（$\vec{B}$）的箭頭連向第一向量（$\vec{A}$）的箭頭，即為 $\vec{A}-\vec{B}$。

四、向量的分解和單位向量

向量的分解為向量合成的反向運算，既然兩向量可以合成為一向量，一向量也可以分解為兩向量。一向量分解為兩向量的方式有無窮多種（如圖 2-7），但通常分解為沿直角坐標軸上相互垂直的兩分量，如圖 2-7(c)所示。



∴圖 2-7 一個向量可以分解成數個分向量之和，其分解方式有無限多種。在直角坐標系中，以圖(c)的分解方式最為簡單和方便，$\vec{A_x}$ 和 $\vec{A_y}$ 分別平行於 x 軸和 y 軸。

故平面上的任一向量均可視為由沿直角坐標軸上相互垂直的兩向量所合成，即 $\vec{A}=\vec{A_x}+\vec{A_y}$。若令 $\hat{i}$ 與 $\hat{j}$ 分別表示指向 x 軸正向及 y 軸正向之**單位向量**（unit vector），即 $|\hat{i}|=|\hat{j}|=1$，則 $\vec{A_x}=A_x\hat{i}$，$\vec{A_y}=A_y\hat{j}$，$\vec{A_x}$、$\vec{A_y}$ 分別稱為 $\vec{A}$ 在 x 軸及 y 軸的分量。$\vec{A}$ 可記為 $\vec{A}=\vec{A_x}+\vec{A_y}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}$。由於 $A_x\hat{i}$、$A_y\hat{j}$ 互相垂直，與 $\vec{A}$ 恰構成直角三角形，如圖 2-7(c)。故 $\vec{A}$ 的量值和方向可分別由分量 A_x、A_y 計算而得，量值：

$$|\vec{A}|=\sqrt{A_x^{\,2}+A_y^{\,2}} \tag{2-2}$$

方向：和 x 軸正方向之間的夾角為 θ，則

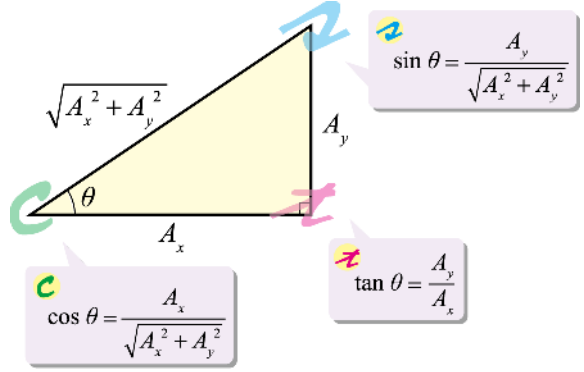
$$\tan\theta=\frac{A_y}{A_x} \tag{2-3}$$

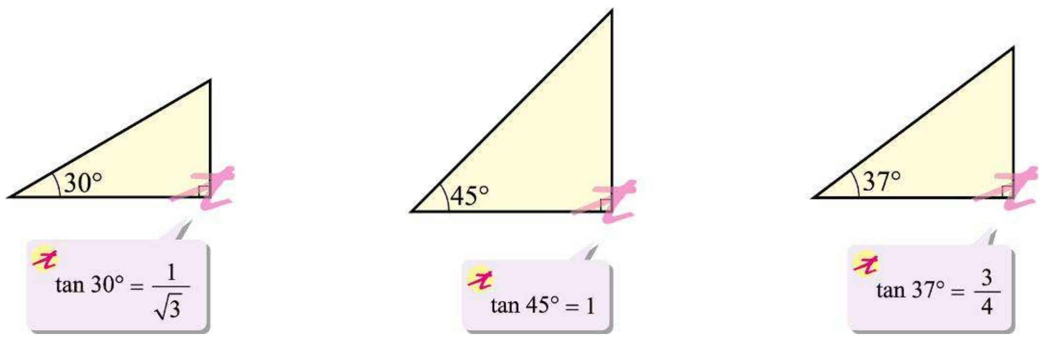
Note

正切函數 tan θ 的介紹：

欲明確表示方向時，用「和$+x$ 方向之間的夾角為 θ，$\tan\theta=\dfrac{A_y}{A_x}$」來表示是最常用的方式。因為是表示如右圖中直角三角形的邊和角的關係，所以稱為三角函數。常用的三角函數除正切函數 tanθ 外，還有正弦函數 sinθ 和餘弦函數 cosθ，其中

$$\sin\theta=\frac{A_y}{\sqrt{A_x^{\ 2}+A_y^{\ 2}}}\ ,\ \cos\theta=\frac{A_x}{\sqrt{A_x^{\ 2}+A_y^{\ 2}}}\ 。$$



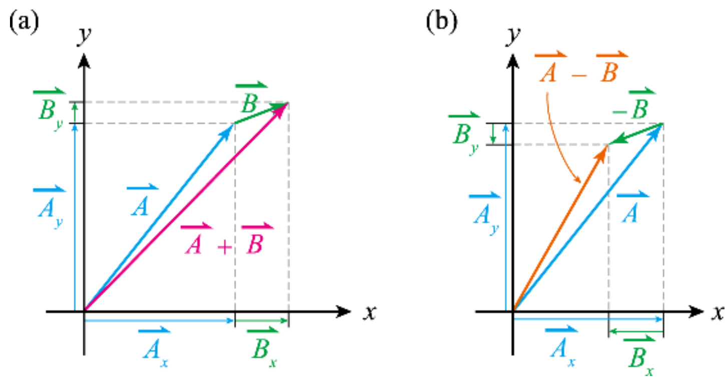


以兩互相垂直的單位向量 $\hat{i}$ 與 $\hat{j}$ 表示向量，可以簡化對向量的運算。由於方向平行的向量在合成時可以將向量長度直接加減，將向量均分解為 x 方向與 y 方向的分量，x 方向的分量互相加減後，再對 y 方向的分量互相加減，即可得向量相加或相減後的結果。例如：兩向量 $\overrightarrow{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}$ 和 $\overrightarrow{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}$，則

$$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j})+(B_x\hat{i}+B_y\hat{j})=(A_x+B_x)\hat{i}+(A_y+B_y)\hat{j} \qquad (2\text{-}4)$$

$$\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}=(A_x\hat{i}+A_y\hat{j})-(B_x\hat{i}+B_y\hat{j})=(A_x-B_x)\hat{i}+(A_y-B_y)\hat{j} \qquad (2\text{-}5)$$

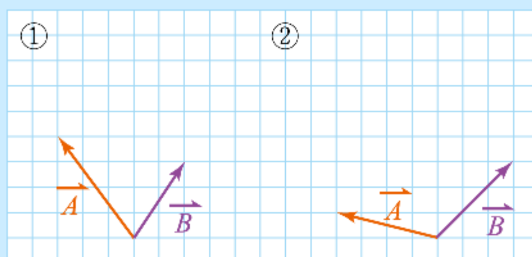
如圖 2-8 所示，這種以分量來運算的方法稱為**解析法**（analytical method）。



∴圖 2-8　計算向量的加法與減法時，可直接將它們在同一方向的分量相加或相減即可。
(a)向量的加法　(b)向量的減法

例題　2-1

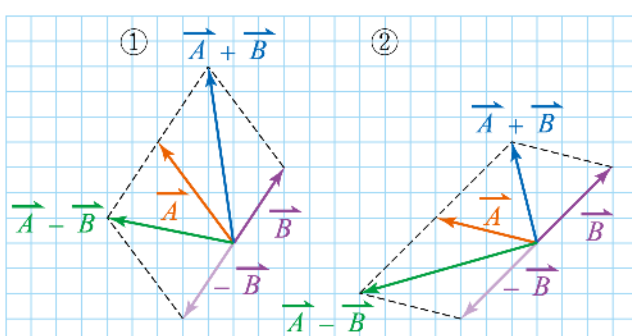
分別以平行四邊形法、三角形法與解析法求下列各題 $\vec{A}+\vec{B}$ 、 $\vec{A}-\vec{B}$ 之大小。



思路：向量的合成 $\vec{A}+\vec{B}=\vec{C}$ 。利用平行四邊形法求向量的合成，合成向量為平行四邊形的對角線；利用三角形法求向量的合成，合成向量與兩原向量構成封閉的三角形；利用解析法求向量的合成，

$$\vec{A}+\vec{B}=(A_x+B_x)\hat{i}+(A_y+B_y)\hat{j}$$ 。

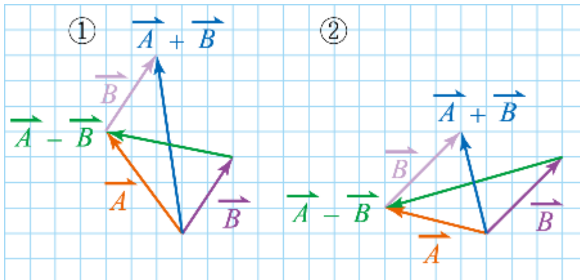
解　(1)平行四邊形法：



(2)三角形法：

①將 $\overrightarrow{B}$ 平移至 $\overrightarrow{A}$ 箭頭處，如圖中淡紫色向量，再由 $\overrightarrow{A}$ 之箭尾畫一向量至淡紫色向量之箭頭，如圖中之藍色向量，此藍色向量即為 $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$ 。

②若 $\overrightarrow{A}$ 、$\overrightarrow{B}$ 之箭尾端已重合，由 $\overrightarrow{B}$ 之箭頭直接畫一向量至 $\overrightarrow{A}$ 之箭頭處，如圖中綠色向量，此綠色向量即為 $\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}$ 。



(3)解析法：

① $\overrightarrow{A}=-3\hat{i}+4\hat{j}$ ，$\overrightarrow{B}=2\hat{i}+3\hat{j}$ ，

$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=(-3\hat{i}+4\hat{j})+(2\hat{i}+3\hat{j})=-\hat{i}+7\hat{j}$ ，$|\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}|=\sqrt{(-1)^2+7^2}=\sqrt{50}$ ，

$\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}=(-3\hat{i}+4\hat{j})-(2\hat{i}+3\hat{j})=-5\hat{i}+\hat{j}$ ，$|\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}|=\sqrt{(-5)^2+1^2}=\sqrt{26}$ 。

② $\overrightarrow{A}=-4\hat{i}+\hat{j}$ ，$\overrightarrow{B}=3\hat{i}+3\hat{j}$ ，

$\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=(-4\hat{i}+\hat{j})+(3\hat{i}+3\hat{j})=-\hat{i}+4\hat{j}$ ，$|\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$ ，

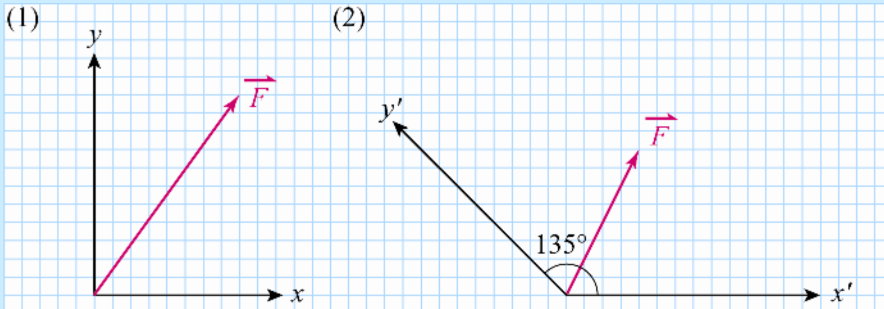
$\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}=(-4\hat{i}+\hat{j})-(3\hat{i}+3\hat{j})=-7\hat{i}-2\hat{j}$ ，$|\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}|=\sqrt{(-7)^2+(-2)^2}=\sqrt{53}$ 。

例題 2-2

如圖，

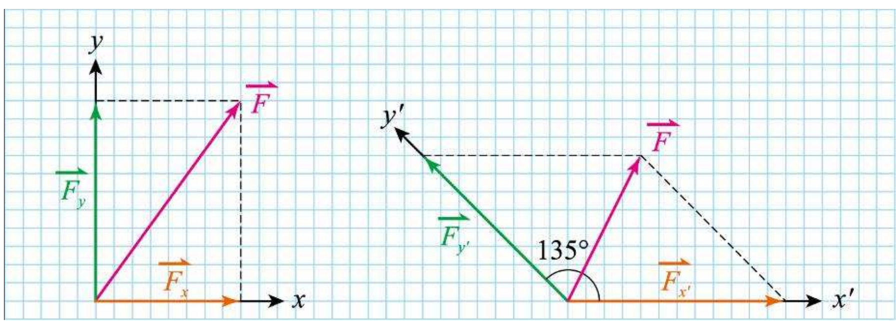
(1) 畫出力 F 沿互相垂直之 x、y 兩方向之分量。

(2) 畫出同一力 F 沿夾 135° 角之 x' 、 y' 兩方向分解之分量。



思路：在欲分解向量的終點畫平行兩軸的虛線，虛線與兩軸的交點即為兩分量的終點。

解



想一想

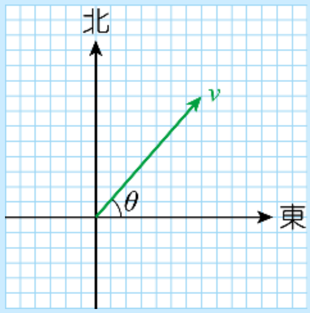
分力可能比分解前的力更大嗎？分解成二垂直方向的分力有可能比分解前的力更大嗎？為什麼分解向量通常選擇互相垂直的二個方向？

例題　2-3

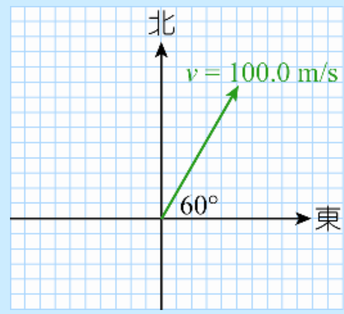
(1) 一架飛機以速度 v 水平飛行，方向為東偏北 θ 角度，如圖(1)，求其向東方與向北方之速度分量。

(2) 承上題，若飛機速度 $v=100.0$ 公尺／秒，$\theta=60°$，如圖(2)，則其向東方與向北方之速度分量為若干？

(1)

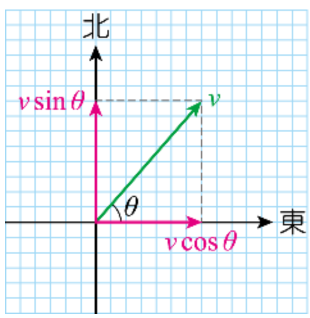


(2)

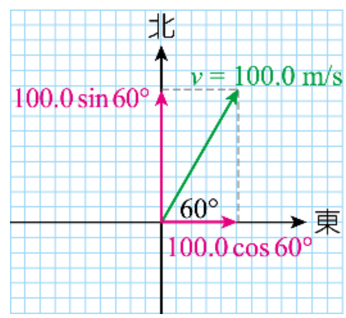


思路：向量分解成兩分量，若分量互相垂直，則兩分量與原向量形成直角三角形，可使用三角函數表示原向量與分量間的關係。

解 (1)



(2)



向東分量為 $v\cos\theta$，

向北分量為 $v\sin\theta$。

向東分量為 $100.0\times\cos 60°=50.00$（m/s），

向北分量為 $100.0\times\sin 60°=86.60$（m/s）。

2

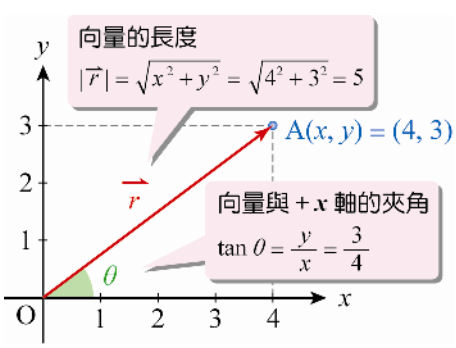
CHAPTER 2 | 2-2 二維空間的位移、速度及加速度

一、位置向量和位移

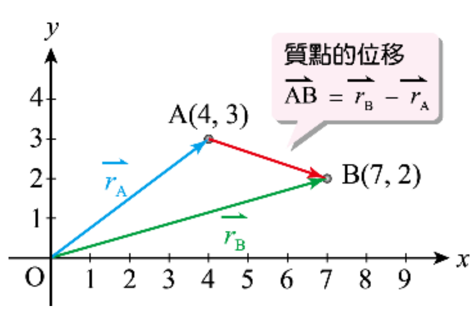
質點在平面上的位置可以在平面上任選取一直角坐標系，用坐標(x, y)來表示，亦可以用由坐標原點指向質點所在位置的向量 $\vec{r}$ 來加以描述，此向量稱為位置向量。位置向量的量值$|\vec{r}|$為用來描述質點位置至坐標原點的距離，位置向量的方向則描述了質點在平面上相對於坐標原點的方位。位置向量 $\vec{r}$ 與坐標$(x,\ y)$的關係為：$|\vec{r}|=\sqrt{x^2+y^2}$，其方向則以和$+x$軸之間的夾角θ來表示，而$\tan\theta=\dfrac{y}{x}$。例如：一質點某一時刻的位置在圖 2-9 的 A 點，則其位置向量 $\vec{r}$ 的量值為$|\vec{r}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$，而$\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{3}{4}$，$\theta$約等於 37°。

當質點在平面上運動時，其位置向量 $\vec{r}$ 的量值與方向均可能隨時間變化，而其位置向量 $\vec{r}$ 的變化量$\Delta\vec{r}$，即為質點的位移。位移仍為一向量，如圖 2-10 所示，質點由 A 點移至 B 點，位移$\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$，式中$\vec{r}_A$、$\vec{r}_B$分別為質點初始時刻與終止時刻的位置向量。依上述「位移」的定義，將兩位置向量相減所得的向量差$\Delta\vec{r}$，恰為由起點 A 指向終點 B 的向量。

$$\Delta\vec{r}=\vec{r}_B-\vec{r}_A=\overrightarrow{AB} \tag{2-6}$$



∴圖 2-9　A 點的位置向量 $\vec{r}$ 與坐標(x, y)的關係。



∴圖 2-10　質點由 A 點移至 B 點的位移為$\overrightarrow{AB}=\vec{r}_B-\vec{r}_A$。

例題 2-4

圖 2-10 中，以解析法表示位置向量 $\vec{r}_A$ 與位置向量 $\vec{r}_B$，並據以計算位移 $\overrightarrow{AB}$ 之量值與方向。

解

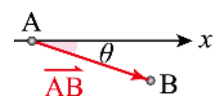
$\vec{r}_A = 4\hat{i} + 3\hat{j}$，$\vec{r}_B = 7\hat{i} + 2\hat{j}$，

$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (7\hat{i} + 2\hat{j}) - (4\hat{i} + 3\hat{j}) = 3\hat{i} + (-1)\hat{j} = 3\hat{i} - \hat{j}$，

表質點在 x 方向有 3 個單位的向右位移，y 方向有 1 個單位的向下位移。

$\overrightarrow{AB}$ 之量值 $= |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$，

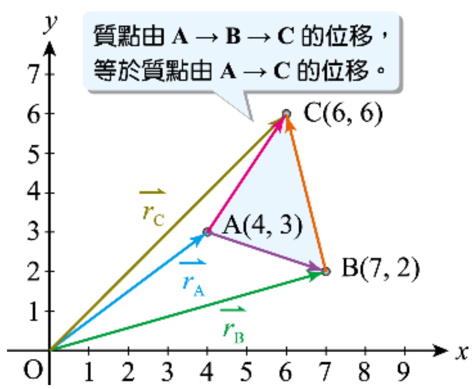
$\overrightarrow{AB}$ 指向右下方，設其與 x 軸正向夾 θ 角，



則 $\tan\theta = \dfrac{y}{x} = \dfrac{(-1)}{3} = -\dfrac{1}{3}$。

考慮質點由 A 點經 B 到達 C 的狀況，如圖 2-11 所示，按上述位移的定義，由 A 至 B 的位移為 $\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$，由 B 至 C 的位移為 $\overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B$，而總位移 $\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A$ 恰等於前兩式的向量和，即

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \tag{2-7}$$



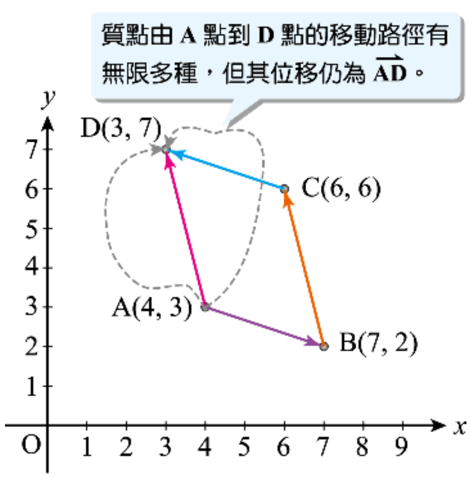
∴圖 2-11　質點由 A 點移至 B 點再移至 C 點的總位移等於直接由 A 點移至 C 點之位移。

故總位移等於各分段位移的向量和。同理，在圖 2-12 中，質點由 A 點經 B、C 兩點再到 D 點的位移為：

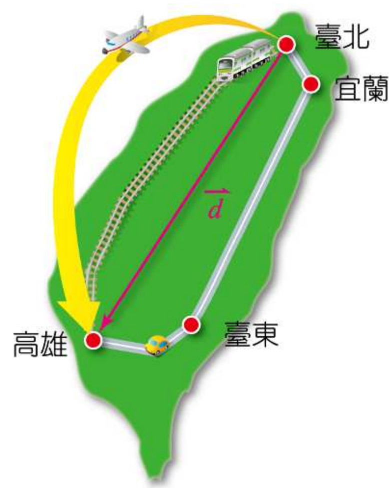
$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} \tag{2-8}$$

路徑長與位移不同，路徑長是質點運動所經歷的軌跡總長，為一純量。初始位置與末位置相同的任意路徑都對應同一位移。如圖 2-12 所示，質點由 A 點至 D 點的移動路徑有無限多種，但只要初位置於 A 點，末位置於 D 點，位移仍為 $\overrightarrow{AD}$。如圖 2-13 中，由臺北到高雄有各種不同的路線，第一條路線是由臺北搭火車到高雄，第二條路線是由臺北開車經由宜蘭、臺東再到高雄，第三條路線則是由臺北搭飛機到高雄，這三條路線的路徑長皆不相同，但位移都是相同的。

一般只要質點有運動，其路徑長通常就不為零，而位移則不然。例如，質點若沿封閉路徑運動一周，其位移等於零，但其路徑長則不為零，而等於封閉路徑之周長。



∴圖 2-12　質點由 A 點經 B、C 至 D 點的總位移等於直接由 A 點移至 D 點之位移。



∴圖 2-13　臺北到高雄有各種不同的路線，但位移都相同。

例題 2-5

圖 2-12 中，以解析法表示位移 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{BC}$ 與 $\overrightarrow{CD}$，並據以計算總位移 $\overrightarrow{AD}$ 之量值與方向。

思路： $\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}$，這種將向量 $\vec{A}$ 以互相垂直的分量表示的方法稱為解析法，且 $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}\cdots=(A_x+B_x+C_x+\cdots)\hat{i}+(A_y+B_y+C_y+\cdots)\hat{j}$ 。

解

各點位置向量 $\vec{r_A}=4\hat{i}+3\hat{j}$ ， $\vec{r_B}=7\hat{i}+2\hat{j}$ ， $\vec{r_C}=6\hat{i}+6\hat{j}$ ， $\vec{r_D}=3\hat{i}+7\hat{j}$ ，

$\overrightarrow{AB}=(7\hat{i}+2\hat{j})-(4\hat{i}+3\hat{j})=3\hat{i}-\hat{j}$ ，

$\overrightarrow{BC}=(6\hat{i}+6\hat{j})-(7\hat{i}+2\hat{j})=-\hat{i}+4\hat{j}$ ，

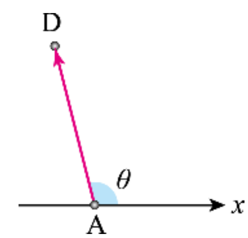
$\overrightarrow{CD}=(3\hat{i}+7\hat{j})-(6\hat{i}+6\hat{j})=-3\hat{i}+\hat{j}$ ，

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(3\hat{i}-\hat{j})+(-\hat{i}+4\hat{j})+(-3\hat{i}+\hat{j})=-\hat{i}+4\hat{j}$ ，

總位移 $\overrightarrow{AD}$ 之量值為 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{(-1)^2+4^2}=\sqrt{17}$ ，

$\overrightarrow{AD}$ 指向左上方，
設其與水平正向夾 θ 角（θ 為鈍角），

則 $\tan\theta=\dfrac{y}{x}=\dfrac{4}{(-1)}=-4$ 。

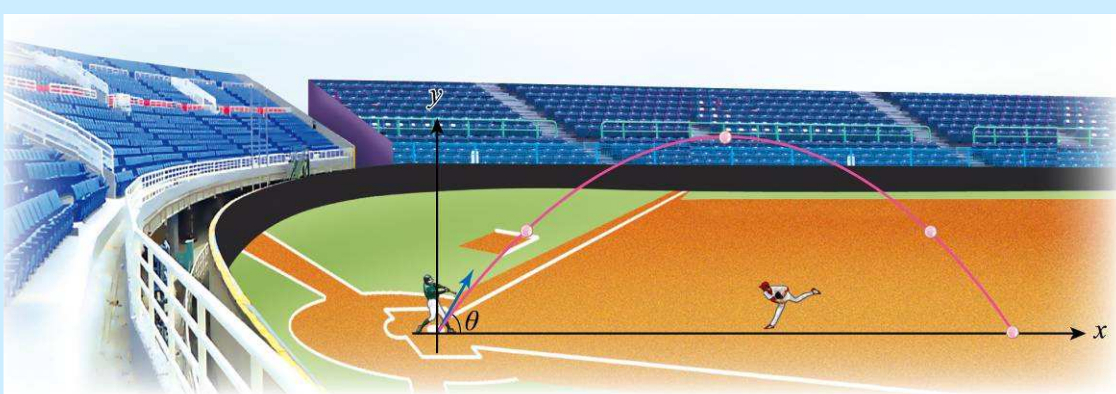


例題 2-6

棒球練習場上，小康投出快速直球，小熹奮力揮棒，將球反向擊出，若不計擊球點距離地面的高度，棒球被擊出後，軌跡如圖所示。請以小熹所在位置為坐標原點，畫出下列各向量。

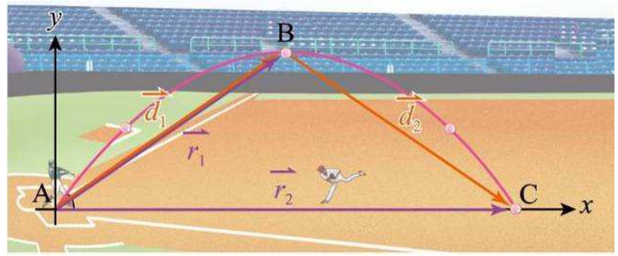
(1)棒球在軌跡最高點時之位置向量 $\vec{r_1}$ 。 (2)棒球落地點之位置向量 $\vec{r_2}$ 。

(3)棒球由拋射點至最高點之位移 $\vec{d_1}$ 。 (4)棒球由最高點至落地點之位移 $\vec{d_2}$ 。



思路：位置向量為一向量，由坐標原點指向棒球所在位置。位移向量為一向量，由棒球初位置指向末位置。

解　如圖，設拋射點為 A 點，最高點為 B 點，落地點為 C 點，位置向量為由原點指向棒球所在之向量。



(1)棒球在最高點之位置向量 $\vec{r_1}$ 為 $\overrightarrow{AB}$。

(2)棒球在落地點之位置向量 $\vec{r_2}$ 為 $\overrightarrow{AC}$。

(3)棒球由拋射點至最高點之位移 $\vec{d_1}=\vec{r_1}-0$，即圖上之 $\overrightarrow{AB}$，由於觀察者恰位於物體之初位置，故物體之位移恰為其末位置向量。

(4)棒球由最高點至落地點之位移 $\vec{d_2}=\vec{r_2}-\vec{r_1}$，即圖上之 $\overrightarrow{BC}$。

自我練習

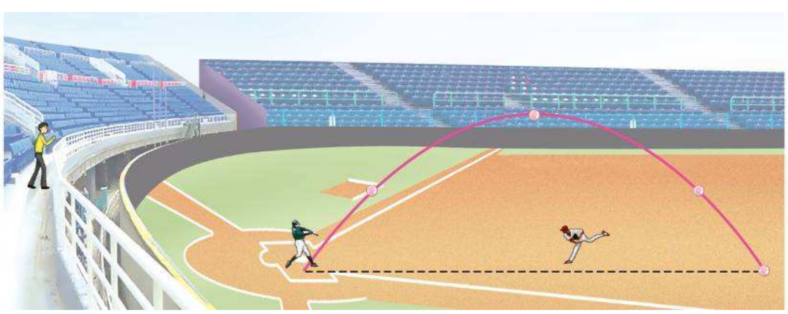
承上題，後方看臺上有一位觀眾，請以這位觀眾的觀點（改變坐標原點）重畫上例中之各向量。

(1)棒球在軌跡最高點時之位置向量 $\vec{r_1}'$。

(2)棒球落地點之位置向量 $\vec{r_2}'$。

(3)棒球由拋射點至最高點之位移 $\vec{d_1}'$。

(4)棒球由最高點至落地點之位移 $\vec{d_2}'$。



想一想

(1) 靜止的觀察者通常選取自身所在的位置為坐標原點。若坐標原點（觀察者）改變，那麼位置向量的量值與方向會改變嗎？位移的量值與方向會改變嗎？

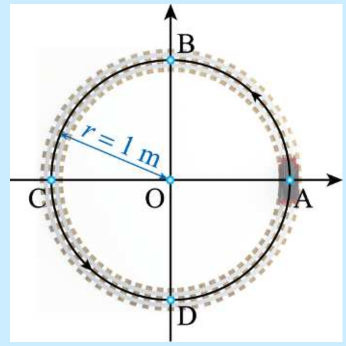
(2) 位移與位置向量在何種情況下，兩者會恰好相等？

例題 2-7

一小火車頭逆時針沿圓形軌道運動，該小火車頭於圖中 A 點出發。若觀察者位於圓心 O 點，繪出下列各向量。

(1) 小火車頭在 A、B、C、D 四點時之位置向量 $\vec{r}_A$、$\vec{r}_B$、$\vec{r}_C$、$\vec{r}_D$。

(2) 小火車頭由 C 點運動到 D 點之位移 $\vec{d}$。



思路：位置向量為一向量，由坐標原點指向物體所在位置；位移向量為一向量，由物體初位置指向末位置。

解　若觀察者位於 O 點。

(1)小火車頭在 A 點的位置向量 $\vec{r}_A = \overrightarrow{OA}$，

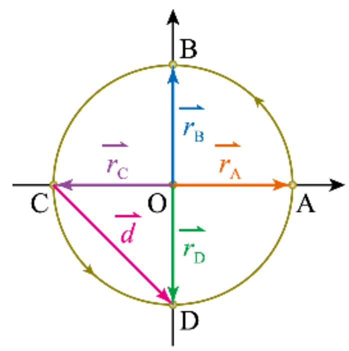
小火車頭在 B 點的位置向量 $\vec{r}_B = \overrightarrow{OB}$，

小火車頭在 C 點的位置向量 $\vec{r}_C = \overrightarrow{OC}$，

小火車頭在 D 點的位置向量 $\vec{r}_D = \overrightarrow{OD}$。

(2)小火車頭由 C 點移動至 D 點之位移

$\vec{d} = \vec{r}_D - \vec{r}_C$，即圖中之 $\overrightarrow{CD}$。

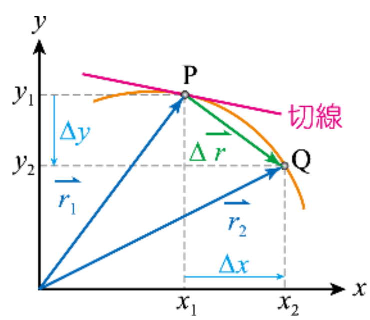


二、速度和速率

質點的位移對時間的變化率為速度，如圖 2-14 所示，質點於 Δt 時段內由 P 點運動至 Q 點，P 點的位置向量為 $\vec{r}_1$，Q 點的位置向量為 $\vec{r}_2$，則此時段內質點的平均速度定義為：

$$\vec{v}_{ave} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \qquad (2\text{-}9)$$

其中 $\Delta \vec{r} = \overrightarrow{PQ}$，且 PQ 連線為質點運動軌跡的割



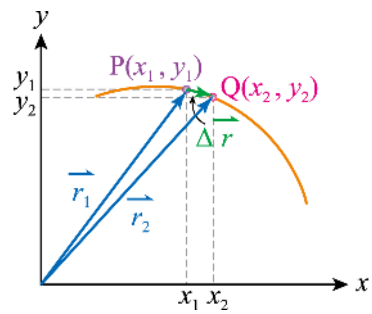
∴圖 2-14　質點於 Δt 時間間隔內由 P 點運動到 Q 點，位移 $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$，平均速度 $\vec{v}_{ave} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$。

線。若 Δt 甚短而趨近於零，$\overrightarrow{r_2}$ 將趨近於 $\overrightarrow{r_1}$，Q 點將趨近於 P 點，PQ 連線將由割線趨近成切線，此時質點的速度稱為瞬時速度，可寫為：

$$\overrightarrow{v} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t} \qquad (2\text{-}10)$$

瞬時速度 $\overrightarrow{v}$ 的方向即為質點運動軌跡的切線方向。若無特別說明，質點的速度指的是瞬時速度。

由於使用解析法來處理向量的運算相當方便，如圖 2-15 所示，質點在 P 點的位置向量可寫為 $\overrightarrow{r_1} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j}$，質點在 Q 點的位置向量可寫為 $\overrightarrow{r_2} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j}$，質點從 P 點到 Q 點的位移向量為：



∴ 圖 2-15　以解析法表示位置向量，再計算位移和速度較為簡便。

$$\begin{aligned}\Delta \overrightarrow{r} &= \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1} \\ &= (x_2 - x_1)\,\hat{i} + (y_2 - y_1)\,\hat{j} \\ &= (\Delta x)\,\hat{i} + (\Delta y)\,\hat{j} \qquad (2\text{-}11)\end{aligned}$$

因此質點在 P 點的速度可寫為：

$$\overrightarrow{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{r}}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\hat{i} + \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\hat{j} = v_x\,\hat{i} + v_y\,\hat{j} \qquad (2\text{-}12)$$

式中，$\overrightarrow{v_x}$ 為質點在 P 點瞬時速度的 x 方向分量，$\overrightarrow{v_y}$ 為在 P 點瞬時速度的 y 方向分量，速度的量值：

$$|\overrightarrow{v}| = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2}} \qquad (2\text{-}13)$$

速度的方向：和$+x$ 方向之間的夾角 θ，

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} \qquad (2\text{-}14)$$

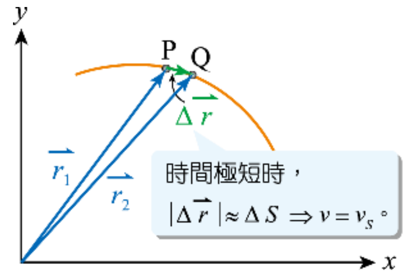
質點的路徑長對時間的變化率為速率。若質點於 Δt 時段內由 P 點運動至 Q 點，路徑長為 ΔS，則此時段內質點的平均速率定義為：

$$\overline{v_S} = \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (2\text{-}15)$$

若 Δt 甚短趨近於零，此時質點的速率稱為瞬時速率，

$$v_S = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} \qquad (2\text{-}16)$$

一般質點運動的路徑長大於位移向量的量值，由(2-9)式與(2-15)式可得，平均速率通常大於平均速度的量值。但在 Δt 甚短趨近於零的前提下，質點的路徑長與位移量值趨於相等，如圖 2-16 所示，由(2-10)式與(2-16)式可得，瞬時速度的量值恰等於瞬時速率。

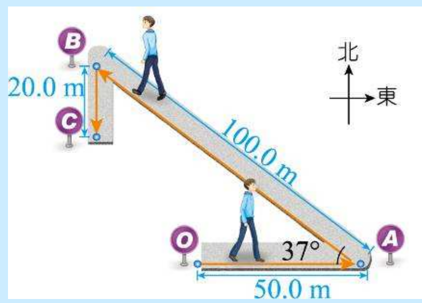


∴圖 2-16　時間間隔極短時，質點在軌跡上所經歷的弧長等於位移的長度，故瞬時速率等於瞬時速度的量值。

2

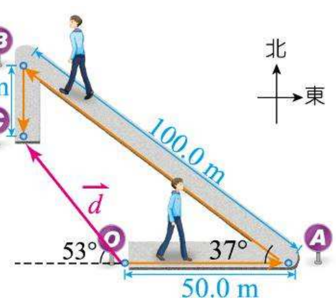
例題 2-8

如圖，<u>小康</u>先向東走 50.0 公尺，再折向西偏北 37°走 100.0 公尺後，折向南走 20.0 公尺，共費時 100.0 秒，則這段時間<u>小康</u>平均速度的量值為若干？平均速率為若干？（取 $\sin 37°=\frac{3}{5}$，$\cos 37°=\frac{4}{5}$）



思路：路徑長為物體所經歷的軌跡總長度；位移向量為由初位置指向末位置的向量。

解



$\overrightarrow{OA}=50.0\hat{i}$，

$\overrightarrow{AB}=-100.0\times\cos 37°\,\hat{i}+100.0\times\sin 37°\,\hat{j}$

$=-80.00\hat{i}+60.00\hat{j}$，

$\overrightarrow{BC}=-20.0\hat{j}$，

10 秒內位移 $\vec{d}=\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$

$=(50.0\hat{i})+(-80.0\hat{i}+60.0\hat{j})+(-20.0\hat{j})=-30.0\hat{i}+40.0\hat{j}$，

$|\vec{d}|=|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{30.0^2+40.0^2}=50.0$（m）。

(1)平均速度量值 $\frac{|\vec{d}|}{\Delta t}=\frac{50.0}{100.0}=0.500$（m/s）。

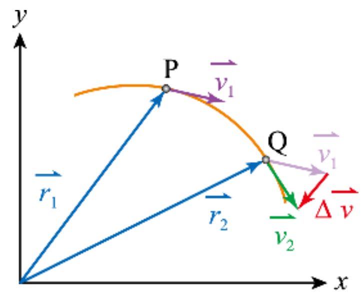
(2) 10 秒內路徑長 $\Delta S=|\overrightarrow{OA}|+|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BC}|$

$=50.0+100.0+20.0=170.0$（m），

平均速率 $v=\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{170.0}{100.0}=1.700$（m/s）。

三、平均加速度和瞬時加速度

質點運動速度對時間的變化率為加速度，定義為單位時間內的速度變化量。如圖 2-17 所示，質點於 Δt 時段內由 P 點運動至 Q 點，P 點的速度為 $\vec{v_1}$，Q 點的速度為 $\vec{v_2}$，則此時段內質點的平均加速度 $\vec{a}_{\text{ave}}$ 定義為：



∴圖 2-17　質點由 P 點移動到 Q 點的速度變化為 $\Delta \vec{v}$。

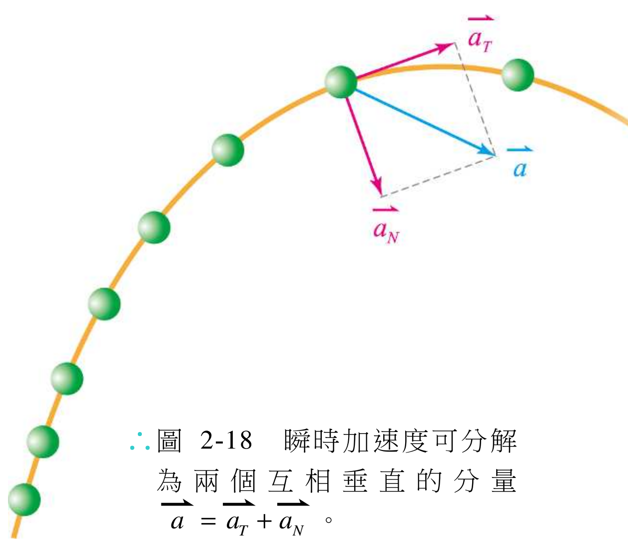
$$\vec{a}_{\text{ave}} = \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{2-17}$$

若 Δt 甚短而趨近於零，Q 點將趨近於 P 點，此時的加速度稱為瞬時加速度，為該質點在 P 點瞬間的加速度。

$$\vec{a} = \lim_{t_2 \to t_1} \frac{\vec{v_2} - \vec{v_1}}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \tag{2-18}$$

須注意的是平均加速度 $\vec{a}_{\text{ave}}$ 的方向，既不是初速度 $\vec{v_1}$ 的方向，也不是末速度 $\vec{v_2}$ 的方向，而是速度變化量 $\Delta \vec{v}$ 的方向；而瞬時加速度的方向，是當 Δt 趨近於 0 時的 $\Delta \vec{v}$ 方向。

一般而言，瞬時加速度常以物體的運動方向（瞬時速度的方向）為基準，分解為平行於運動方向的切向加速度（tangential acceleration）$\vec{a_T}$ 及垂直於運動方向的法向加速度（normal acceleration）$\vec{a_N}$，如圖 2-18 所示。切向加速度會改變運動的快慢，而法向加速度則會改變運動的方向。



∴圖 2-18　瞬時加速度可分解為兩個互相垂直的分量 $\vec{a} = \vec{a_T} + \vec{a_N}$。

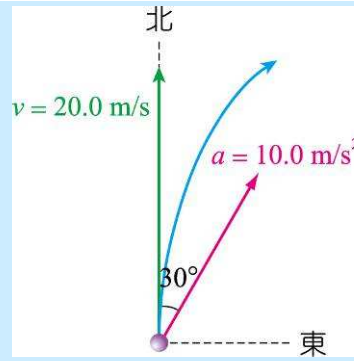
想一想

第一章曾提及非洲草原上的獵豹，加速度與最大速度在動物界中可稱霸地表，獵豹的主要獵物湯姆遜瞪羚在獵豹的追逐下似乎沒有任何活口機會。為什麼湯姆遜瞪羚大多數的情形下，仍能「豹口餘生」呢？

2

例題 2-9

一運動物體在某時刻以速度 20.0 公尺／秒向北運動，加速度量值為 10.0 公尺／秒 ^{2}，方向為北方偏東 30 度，如圖所示。該時刻物體之切向加速度為若干？法向加速度為若干？下一瞬間該物體之運動狀況如何改變？



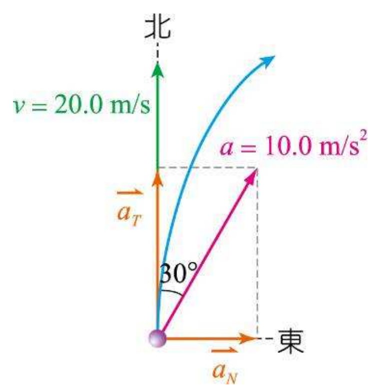
思路：物體的運動方向即瞬時速度方向。切向加速度與運動方向平行，法向加速度與運動方向垂直。

解 如圖，分解加速度為平行速度方向的切向加速度 $\vec{a_T}$ 與垂直速度方向的法向加速度 $\vec{a_N}$，

$$a_T = a\cos 30° = 10.0 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5.00 \times \sqrt{3}$$

$$= 8.66\ (\text{m/s}^2),$$

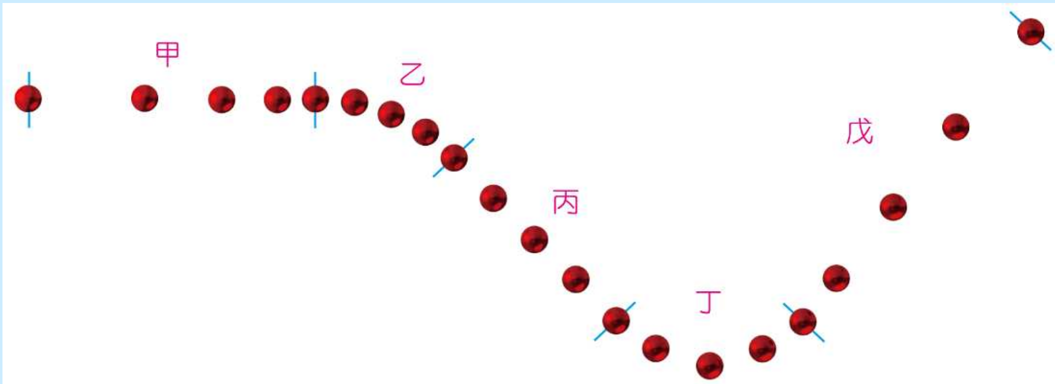
$$a_N = a\sin 30° = 10.0 \times \frac{1}{2} = 5.00\ (\text{m/s}^2),$$



下一瞬間切向加速度將使物體向北的速度量值增加，法向加速度將使該物體向東方偏向。

例題　2-10

一小球在水平面上移動，每隔 0.02 秒小球的位置如圖所示。每一段運動過程分別以甲、乙、丙、丁和戊標示。甲、丙、戊均為直線，乙、丁均為曲線。請判斷各階段小球所受的切向加速度與法向加速度是否為零？



解

	甲	乙	丙	丁	戊
切向加速度	不為零	零	零	零	不為零
法向加速度	零	不為零	零	不為零	零

切向加速度改變物體運動的快慢，甲階段各點間的間隔漸密，故速率漸小，切向加速度與速度反向；丙階段各點間的間隔均勻，故速率不變，切向加速度為零；戊階段各點間的間隔漸大，故速率漸大，切向加速度與速度同向。

乙、丁階段雖為曲線運動，但各點間隔均勻，速率不變，切向加速度為零。法向加速度改變運動的方向，甲、丙、戊三階段運動軌跡均為直線，運動方向不變，故法向加速度為零；而圖形中乙、丁二階段為曲線運動，方向發生改變，所以法向加速度不為零。

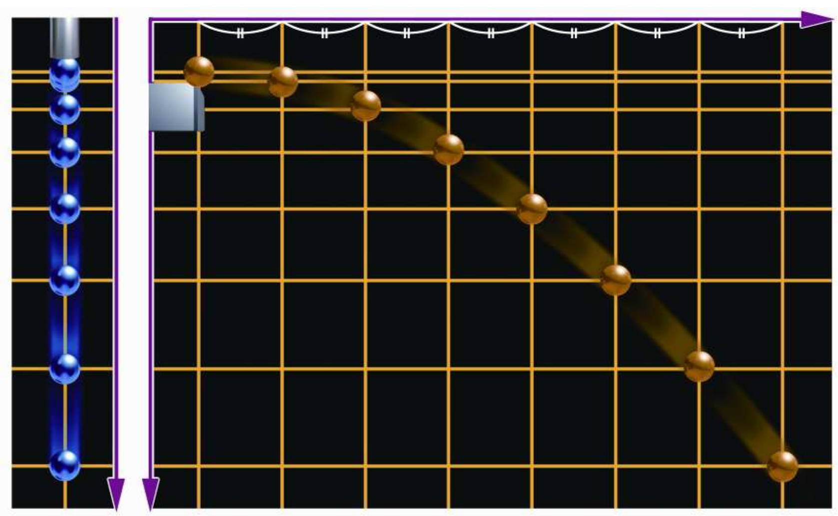
CHAPTER 2 2-3 二維的等加速運動—拋體運動

拋體運動（projectile motion），顧名思義就是將物體以一速度向空中拋出後，物體所作的運動。日常生活中拋體運動的實例相當多（圖 2-19），例如：由手中丟向籃框的籃球、由投手投出或打擊手擊出的棒球、公園中的噴水池噴出的水柱、高臺跳水的選手、電影戰爭場景中，投石機投出的石塊或由砲管射出的砲彈等。

為簡化起見，研究拋體運動通常先忽略空氣阻力等的影響，僅考慮重力的作用。我們可以將拋體運動分成鉛直方向與水平方向來討論：鉛直方向運動受到固定的重力作用，物體作等加速運動；水平方向的運動則不受任何作用力，物體作等速運動。

圖 2-20 所示，藍色球由靜止下落，橘色球則沿水平方向拋出，兩球同時出發，每隔固定的時段記錄兩球

∴圖 2-19　日常生活中的拋體運動。

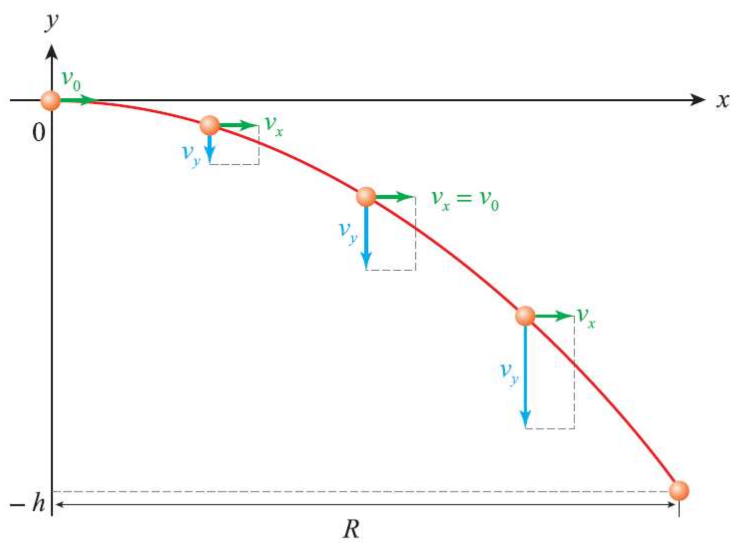


∴圖 2-20　一沿水平方向拋出的球體（右球），和另一自靜止自由落下的球體（左球），兩球同時開始運動，結果在相同的時間間隔內落下相同的高度，即在鉛直方向上，右球和左球作加速度相等的等加速運動。

的位置，可以發現藍色球在水平方向沒有位移，而橘色球在水平方向等速前進，兩球在水平方向的運動型態雖不同，但在鉛直方向的運動完全一致，均作相同的等加速運動。故一物體水平方向的運動型態並不影響其在鉛直方向的運動型態。兩垂直方向的運動各自獨立，互不影響，具有水平與垂直方向運動的獨立性。

一、水平拋射

水平拋射是由高於地面 h 處，以初速 v_0 向水平方向拋出物體，如圖 2-20 中的橘色小球，其軌跡不是一條直線，再由圖 2-21 的圖解分析可見小球剛投出時，只有水平的速度 $\overrightarrow{v_0}$，但因受重力的作用，隨即開始加速下落，其速度 $\overrightarrow{v}$ 的量值及方向均隨時更改，似乎十分繁瑣，但利用運動的獨立性，可由解析法分析小球在鉛直與水平方向的運動狀況。為簡化運算，選取拋出時刻為 $t=0$，拋射位置為坐標原點，並取向右為 x 軸正方向，向上為 y 軸之正方向，設時刻 t 時，物體位置(x, y)，水平速度 v_x，鉛直速度 v_y，速度 $\overrightarrow{v}$ 與水平方向夾角 θ。



∴圖 2-21　水平拋射運動，垂直方向球速 v_y 因加速度 g 值而增加，水平方向球速則保持固定。

先分析水平方向（x 方向）的運動，物體在此方向未受任何外力（$F_x = 0$），由高一基礎物理的牛頓第二運動定律可以知道，物體之水平加速度 $a_x = 0$。故物體將在 x 軸方向作等速運動，速度量值（v_0）與方向（向右）均不會隨時間變動。而由於初位置即原點，故時刻 t 時物體的位置恰等於位移，將隨時間而線性的增加，即

$$x = d_x = v_{0x}t = v_0 t \tag{2-19}$$

2

再分析鉛直方向（y 方向）的運動。物體在此方向受向下的重力 mg 作用，由牛頓第二運動定律可以知道，物體之鉛直加速度量值 $a_y = \frac{F_y}{m} = \frac{mg}{m} = g$，方向與重力同方向，即負 y 方向，故 $a_y = -g$，而鉛直初速度 $v_{0y} = 0$，故物體在 y 軸方向作第一章所提及的靜止出發的自由落體運動。位置與時間的關係為：

$$y = d_y = \frac{1}{2}a_y t^2 = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{2-20}$$

而速度與時間的關係為 $v_y = v_{0y} + a_y t = -gt$。

便利貼

水平拋射運動的運動獨立性

	水平（x）方向	鉛直（y）方向
受力 F	$F_x = 0$	$F_y = -mg$
加速度 $a = \frac{F}{m}$	$a_x = 0$	$a_y = -g$
初速度	$v_{0x} = v_0$	$v_{0y} = 0$
運動型態	等速運動	自由落體
時刻 t 時物體的速度	$v_x = v_0$	$v_y = -gt$
時刻 t 時物體的位移	$d_x = v_0 t$	$d_y = -\frac{1}{2}gt^2$

綜合上述，可以知道水平拋射運動，就是在 x 方向等速度前進，同時在 y 方向作自由落體的合成運動。時刻 t 時物體的速度量值為 $v=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2}=\sqrt{v_0{}^2+(gt)^2}$，而時刻 t 時其位移量值為 $d=\sqrt{d_x{}^2+d_y{}^2}=\sqrt{(v_0t)^2+(\frac{1}{2}gt^2)^2}$。

物體作水平拋射運動時，水平位置 x 與鉛直位置 y 均為時間的函數，將(2-19)與(2-20)兩式聯立消去 t，可得 y 隨 x 而變化的方程式，即軌跡方程式 $y=-\frac{g}{2v_0{}^2}x^2$。

如圖 2-21 所示，當物體的 y 方向位移到達 $-h$ 時（即 $d_y=-h$），物體落回地面。由 $\frac{1}{2}gt^2=h$ 可得物體飛行時間

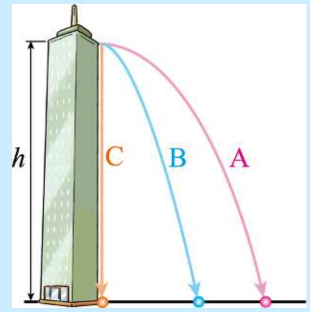
$$t=\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (2\text{-}21)$$

恰與靜止自由下落物體落地時間相同。而落地時水平方向之位移即為水平射程 R，R = v_0（水平速度）× t（飛行時間）

$$R=v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (2\text{-}22)$$

例題 2-11

三個學生於甚高的高樓陽台上同一地點做實驗，高中生與小學生將球水平丟出，另一幼稚園生使球由靜止自由落下，軌跡分別為 A、B、C，如右圖所示。



(1) 三球由離手至落地所需的時間大小順序為何？

(2) 三球落地前瞬間之速率大小順序為何？

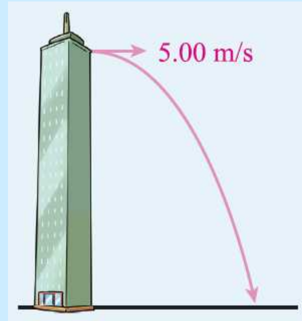
思路：A、B、C 三條軌跡在鉛直方向運動均為自由落體。

解 (1)三球同時落地。若樓高甚高，則身高的差異可忽略不計，而三球在鉛直方向均為靜止出發之自由落體，地面為鉛直方向運動的限制。鉛直方向因運動型態相同，又受相同的限制，故有相等的落地時間，即 $t_A = t_B = t_C = \sqrt{\frac{2h}{g}}$，而水平方向並無任何限制。一般人以為拋體運動物體飛行的路徑較長就飛得較久是錯誤的概念。

(2)三球落地前之 y 方向速度相等，但水平方向 $v_{Ax} > v_{Bx} > v_{Cx}$，又 $v^2 = v_x^2 + v_y^2$，故可知 $v_A > v_B > v_C$。

例題 2-12

以 5.00 公尺／秒的初速度於樓高甚高之高樓樓頂水平拋出一物體，不計空氣阻力，設重力加速度為 10.0 公尺／秒 ^{2}。



(1) 何時物體的水平速度與鉛直速度量值相等？此時之位移量值為何？

(2) 何時物體在水平方向與鉛直方向的位移量值相等？此時之速度量值為何？

思路：水平拋射的物體在水平方向為等速運動，在鉛直方向則為靜止出發的自由落體運動。

解 (1)由題意，設時刻 t 時物體的水平速度量值 v_x 與鉛直速度量值 v_y 相等，

即 $v_x = v_y$，水平方向速度不變皆為 v_0，鉛直方向為自靜止出發之自由落體，

$v_0 = gt$ ， $5.00 = 10.0 \times t$ ，解得 $t = 0.500$（s），

水平位移 $x = v_0 t = 5.00 \times 0.500 = 2.50$（m），

鉛直位移 $y = \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} \times 10.0 \times 0.500^2 = 1.25$（m），

$\therefore$合成位移 $d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2.50^2 + 1.25^2} = 2.80$（m）。

(2)由題意，設時刻 t 時物體的水平位移量值 x 與鉛直位移量值 y 相等，

即 $x = y$ ， $v_0 t = \frac{1}{2} g t^2$ ， $5.00 \times t = \frac{1}{2} \times 10.0 \times t^2$ ，解得 $t = 1.00$（s），

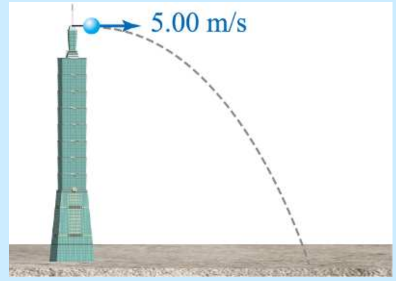
水平速度不變 $v_x = v_0 = 5.00$（m/s），

鉛直速度 $v_y = gt = 10.0 \times 1.00 = 10.0$（m/s），

$\therefore$速度 $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{5.00^2 + 10.0^2} = 11.2$（m/s）。

例題 2-13

如右圖，台北 101 大樓高約 500.0 公尺， 於樓頂以 5.00 公尺／秒的初速度水平拋出一物體後，若不計空氣阻力，且取重力加速度為 10.0 公尺／秒 ^{2}，求：



(1) 落地時間。

(2) 水平射程。

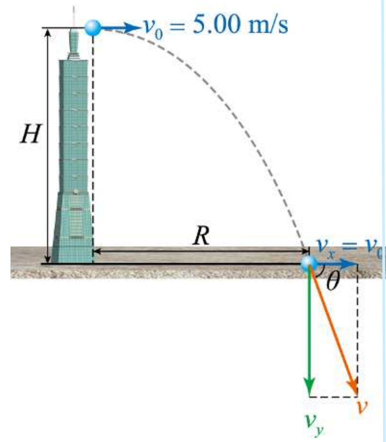
(3) 落地前瞬間物體水平速度的量值、鉛直速度的量值。

思路：地面為對鉛直方向運動的終點，當鉛直位移 $d_y = 500$（m）時，物體即落地。

解 (1)落地表 y 方向位移達樓高 H， $y = H$，

$\frac{1}{2}gt^2 = 500.0$ ， $\frac{1}{2} \times 10.0 \times t^2 = 500.0$ ，

解得 $t = 10.0$（s）。



(2)水平射程 R 即落地時之水平位移，

而水平方向為等速運動，故

水平射程 ＝ 水平速度 × 落地時間，

$R = v_0 t = 5.00 \times 10.0 = 50.0$（m）。

(3)落地（ $t = 10.0$ ）時，水平速度 v_x 仍為 $v_0 = 5.00$（m/s），

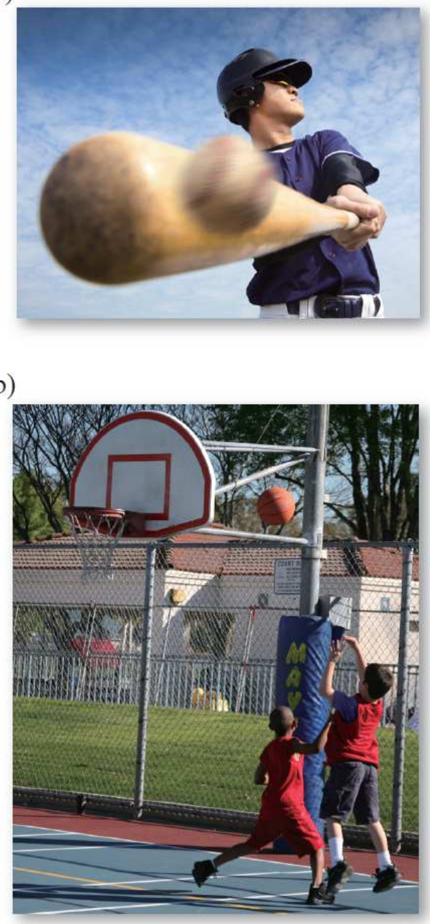
鉛直速度 $v_y = gt = 10.0 \times 10.0 = 1.00 \times 10^2$（m/s）。

二、斜向拋射

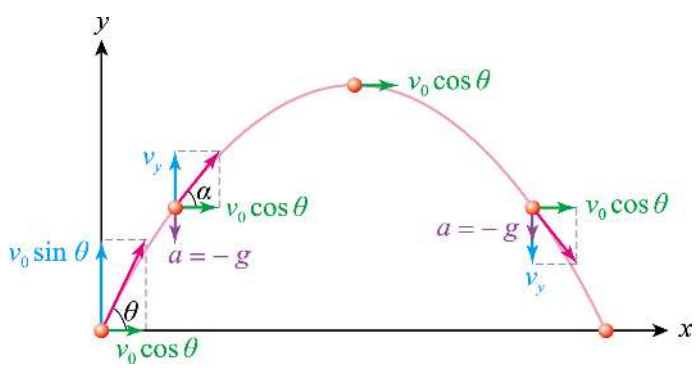
將一物體以初速 v_0 與水平地面夾 θ 角向斜上方拋出，稱為斜向拋射，如圖 2-22 所示即為日常生活中常見的拋體運動。如同水平拋射運動，選取拋出時刻為 $t=0$，拋射地點為坐標原點，並令初速度水平分量之方向為 x 軸正方向，向上為 y 軸之正方向，物體的運動軌跡如圖 2-23 所示。設時刻 t 時，物體的水平位置為 x、鉛直位置為 y，水平速度 v_x、鉛直速度 v_y，速度 $\vec{v}$ 與水平方向夾角為 α。

先分析水平方向（x 方向）的運動，物體在此方向的初速度為 $v_{0x}=v_0\cos\theta$，且因未受外力，由高一基礎物理的牛頓第二運動定律可以知道，物體之加速度 $a_x=0$，將在 x 軸方向作等速運動，速度量值（$v_0\cos\theta$）與方向（向右）均不會變動，而時刻 t 時物體的水平位置即等於水平位移，將隨時間而線性增加

$$x=d_x=v_{0x}t=(v_0\cos\theta)t \tag{2-23}$$

(a)
(b)


∴圖2-22　擊出後的棒球及投起後的籃球皆是作拋體運動。



∴圖 2-23　以初速 v_0，仰角 θ 拋出的斜向拋射運動軌跡。

再分析鉛直方向（y 方向）的運動，物體在此方向的初速度為 $v_{0y} = v_0 \sin\theta$，方向向上。因受重力 $F_y = -mg$ 作用，由牛頓第二運動定律可以知道，物體在鉛直方向的加速度 $a_y = \dfrac{F_y}{m} = -\dfrac{mg}{m} = -g$ 為定值，方向與重力同方向，即負 y 方向。故物體在 y 軸方向作初速度向上，加速度向下的等加速運動，即第一章所討論的鉛直上拋運動。故物體速度與時間的關係為：

$$v_y = v_{0y} + a_y t = v_0 \sin\theta + (-g)t \qquad (2\text{-}24)$$

而時刻 t 時物體的位置與時間的關係為：

$$y = d_y = v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = (v_0 \sin\theta)t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \qquad (2\text{-}25)$$

綜合上述可知，斜向拋射運動就是在 x 方向等速度前進，同時在 y 方向作鉛直上拋的合成運動。時刻 t 時物體的速度量值為 $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(v_0\cos\theta)^2 + (v_0\sin\theta - gt)^2}$，若時刻 t 時物體的速度方向與水平方向夾 α 角，則 $\tan\alpha = \dfrac{v_y}{v_x} = \dfrac{v_0\sin\theta - gt}{v_0\cos\theta}$。

便利貼

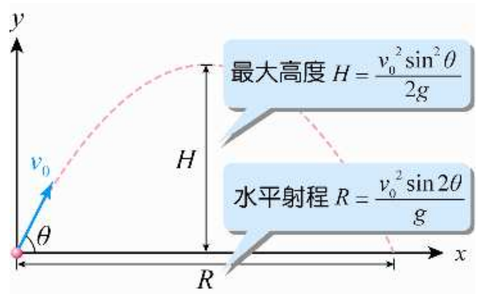
斜向拋射的運動獨立性

	水平（x）方向	鉛直（y）方向
受力 F	$F_x = 0$	$F_y = -mg$
加速度 $a = \dfrac{F}{m}$	$a_x = 0$	$a_y = -g$
初速度	$v_{0x} = v_0\cos\theta$	$v_{0y} = v_0\sin\theta$
運動型態	等速運動	鉛直上拋
時刻 t 時物體的速度	$v_x = v_0\cos\theta$	$v_y = v_0\sin\theta - gt$
時刻 t 時物體的位移	$d_x = v_0\cos\theta\cdot t$	$d_y = v_0\sin\theta\cdot t - \dfrac{1}{2}gt^2$

物體作斜向拋射運動時，水平位置 x 與鉛直位置 y 均為時間的函數，將(2-23)式與(2-25)式兩式聯立消去 t，可得 y 隨 x 而變化的方程式，稱為軌跡方程式：

$$y=(\tan\theta)x-\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}x^2 \qquad (2\text{-}26)$$

此式為一元二次方程式，與 $y=Ax^2+Bx+C$ 比較，係數 $A=-\frac{g}{2(v_0\cos\theta)^2}<0$，係數 $B=\tan\theta$，係數 $C=0$，故物體作斜向拋射運動的軌跡為一拋物線，此拋物線開口向下，並通過坐標原點，如圖 2-24 所示。當物體 y 方向之速度 v_y 為零時，物體達最大高度 H，由鉛直上拋公式(1-20)式，$0=(v_0\sin\theta)^2-2gH$，可得



∴圖 2-24　斜向拋射物體軌跡為一拋物線，最大高度為 H 及水平射程為 R。

$$H=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g} \qquad (2\text{-}27)$$

當物體返回到地面時 y 為零，代入(2-25)式 $(v_0\sin\theta)t+\frac{1}{2}(-g)t^2=0$，可得飛行時間

$$t=\frac{2v_0\sin\theta}{g} \qquad (2\text{-}28)$$

物體落地時之水平位移，稱為水平射程 R，R = v(水平速度) × t(飛行時間)

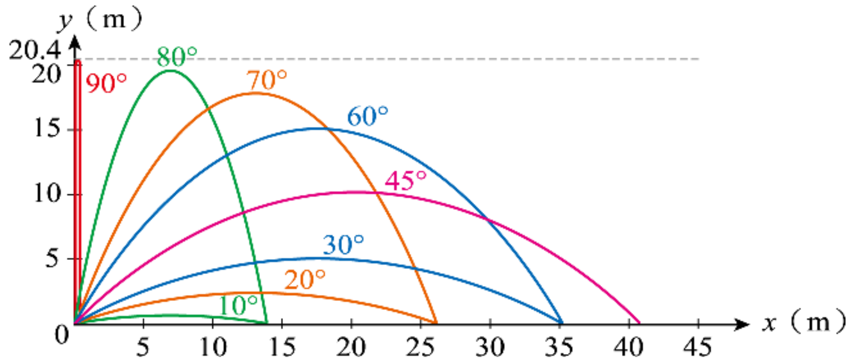
$$R=v_0\cos\theta\times\frac{2v_0\sin\theta}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\theta}{g} \qquad (2\text{-}29)$$

斜拋運動時，由於物體初速度的仰角 θ 在零度與 90 度之間（$0<\theta<90°$），(2-29)式中的 2θ 在 0 度與 180 度之間（$0<2\theta<180°$），此範圍內角度之正弦值

在零與 1 之間（$0<\sin 2\theta \le 1$）。而 $\sin 2\theta$ 之最大值 1 發生於 $2\theta = 90°$ 時，即初速度仰角 $\theta = 45°$ 時，斜向拋射運動之水平射程有最大值 $R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$。又由於 θ 與 $(90° - \theta)$ 具有相同的二倍角正弦值，即 $\sin 2\theta = \sin 2(90° - \theta)$，故兩次斜向拋射運動之初速度量值若相同，且兩次斜拋的仰角互餘，則其水平射程 R 將相等。

2

圖 2-25 所示為初速相同，仰角不同之七次斜拋軌跡，以仰角為 45°時之水平射程最大，仰角 10°和 80°、20°和 70°、30°和 60°之水平射程相等。



∴圖 2-25　以相等量值的初速 20 m/s，但不等的仰角射出所得的拋物線軌跡。

動動手

拋體運動小實驗

實驗器材：水龍頭及水管

取一長水管，一端接在戶外的水龍頭上，一端以手握住擺放在地面上。打開水龍頭，調整適當的水量，使水進入水管，並由一端管口噴出後，作斜向拋射運動。由於水管的粗細不變，流出水管管口的水流速率是恆定的，並不隨水管的彎曲或管口的擺放方式而變。以手調整水管的管口朝向，驗證是否水流流速與地面夾45 度角時，噴出的水可達最遠的水平射程。

例題 2-14

跳蚤鉛直跳躍可達 180.0 公分的高度，若重力加速度為 10.0 公尺／秒 ^{2}，則：

(1) 跳蚤起跳速度為若干？

(2) 若跳蚤以同樣初速與水平地面夾 30 度的仰角跳出，再落回地面，則：

①在空中的時間為若干？ ②離地面的最大高度為若干？

③落地點與起跳點的距離為若干？

解 (1)鉛直上拋之最大高度 $h = 180.0\ \text{cm} = 1.800\ \text{m}$，由 $v^2 = v_0^2 + 2ad$，

$0 = v_0^2 - 2gh$，$v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2\times10.0\times1.800} = 6.00$（m/s）。

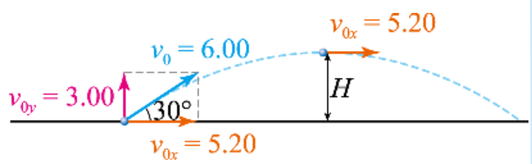
(2)①如圖，起跳時的水平初速度

$$v_{0x} = v_0 \cos 30° = 6.00\times\frac{\sqrt{3}}{2} = 3.00\times\sqrt{3} = 5.20\ (\text{m/s})，$$

起跳時的鉛直初速度 $v_{0y} = v_0 \sin 30° = 6.00\times\frac{1}{2} = 3.00$（m/s），

落地時跳蚤回到地面，也就是 y 方向的位置為零（$y = 0$），

由 $y = v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$，



$0 = 3.00\times t - \frac{1}{2}\times10.0\times t^2$，

解得 $t = 0.600$（s）。

②當跳蚤到達最大高度時，鉛直速度為零，

由 $v_y^2 = v_{0y}^2 - 2gH$，$0 = 3.00^2 - 2\times10.0\times H$，解得 $H = 0.450$（m）。

③所求即為水平射程 $R = v_{0x}(\text{水平速度})\times t(\text{飛行時間})$，

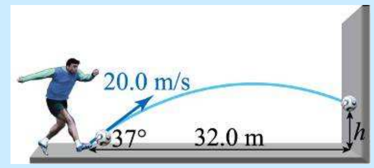
$R = vt = 5.20\times0.600 = 3.12$（m）。

自我練習

若跳蚤以同樣初速與水平地面夾 30 度的仰角跳出，再落回地面，則在空中的軌跡方程式為何？

例題 2-15

如圖所示，足球選手在練習牆前水平距離 32.0 公尺處將球踢出，球的初速度為 20.0 公尺／秒，仰角 37 度，設重力加速度 $g=10.0$ 公尺／秒 ^{2}，則：



(1)拋出後若干時間球擊中練習牆壁面？

(2)球擊中壁面處離地的高度？

(3)球擊中壁面時速率為若干？

思路：壁面限制球在水平方向的位移，當水平位移到達 32.0 公尺時，球即擊中壁面。

解 (1)如圖，分解初速度 v_0 為水平初速度 $v_{0x}=v_0\cos 37°=20.0\times\frac{4}{5}=16.0$（m/s）

與鉛直初速度 $v_{0y}=v_0\sin 37°=20.0\times\frac{3}{5}=12.0$（m/s），

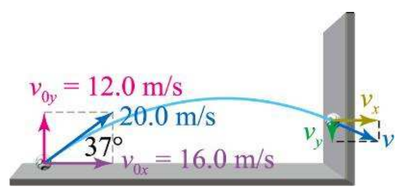
設在時刻 t 時球擊中壁面，此時球之水平位移 $x=32.0$（m），

$x=v_{0x}t=(v_0\cos 37°)\times t=16.0t=32.0$，解得 $t=2.00$（s）。

(2)離地高度 h，即 $t=2$ s 時之鉛直位移 y，

由 $h=y=v_{0y}\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$

$=12.0\times 2.00-\frac{1}{2}\times 10.0\times 2.00^2=4.0$（m）。



(3)水平速度不變 $v_x=16.0$（m/s），

鉛直速度 $v_y=v_{0y}-gt=12.0-10.0\times 2.00=-8.0$（m/s），

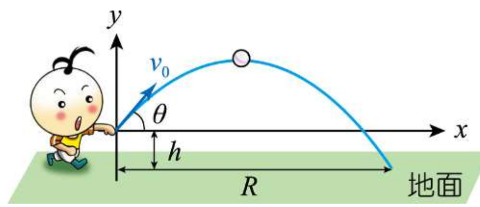
速率 $v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{16.0^2+(-8.0)^2}=17.9$（m/s）。

延伸閱讀與觀念分析

延伸閱讀

如何在壘球擲遠比賽中將壘球拋得最遠？在斜向拋射最大射程的問題中，經常將人的高度忽略不計，而得到仰角 $\theta = 45°$ 時有最大射程。如果考慮人的高度，則問題似乎變得很複雜。到底出手高度對最大射程的仰角有什麼影響呢？

若考慮壘球選手出手高度為 h，如圖 2-26 所示，則水平初速仍為 $v_0 \cos\theta$，而壘球的飛行時間改變了。



∴圖 2-26　考慮人的身高，出手高度對最大射程角有什麼影響呢？

$$-h = (v_0 \sin\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{1}{2}gt^2 - (v_0 \sin\theta)t - h = 0$$

$$\therefore t = \frac{v_0 \sin\theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}}{g}$$（負值不合）

故壘球的飛行距離 $R = v_0 \cos\theta \cdot t$

$$= v_0 \cos\theta \cdot \frac{v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}}{g}$$

$$\therefore gR = v_0\cos\theta \cdot v_0\sin\theta + v_0\cos\theta \cdot \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh}$$

$$gR = \frac{1}{2}v_0^2 \sin 2\theta + v_0\cos\theta\sqrt{v_0^2 \cdot \frac{1-\cos 2\theta}{2} + 2gh}$$

$$= \frac{1}{2}v_0^2 \sin 2\theta + v_0\cos\theta\sqrt{\frac{v_0^2}{2} + 2gh - \frac{v_0^2 \cos 2\theta}{2}}$$

將上式對 θ 作進一步的數學分析可得：當 $\cos 2\theta = -1$（即 $\theta = 90°$）時，水平射程為最近（因仰角 $\theta = 90°$即為鉛直拋射，可知水平射程為 0）。而當 $\cos 2\theta = \dfrac{gh}{v_0^2 + gh}$時，水平射程最遠（若 $h = 0$，則 $\cos 2\theta = 0$，即 $\theta = 45°$時，即為一般斜向拋射最遠）。由於斜向拋射的射程和拋擲的仰角與初速 v_0 及高度 h 相關，因

此當高度 h 計算在內時，如果要將物體拋擲最遠時，仰角角度應該是較 45°為小，因為 $\cos 2\theta = \dfrac{gh}{{v_0}^2 + gh} \geq 0$，即 $0 \leq \cos 2\theta < 1 \Rightarrow 0° < \theta \leq 45°$。同一個運動選手身高 h 固定，在許多不同的擲遠比賽（諸如標槍、鉛球等），丟擲物體的初速量值，亦會影響仰角角度的計算，如此一來便需依個人出手速度及身高來計算 θ 值，以使自己的成績有最好的表現。一般說來，對同一個選手而言，當投擲的物體愈輕，則投擲初速 v_0 便會愈大，這樣身高 h 的影響，便會相對減小，尤其當初速 v_0 相當大時，身高 h 的變因甚至可以忽略不計，此時當投擲的角度愈接近 45°時，射程愈遠；而當投擲的物體愈重，則投擲初速 v_0 愈小，此時 h 的變因就會變得重要，射程最遠的角度就要下修了。

觀念分析

第一、二章討論了一維和二維的運動卻沒有討論三維的運動，是不是有點不切實際呢？人們居住活動在三維的空間中，三維的運動應該是最常見的。從家裡出來搭公車到學校上學，因為到學校不是剛好一直線，又牽涉到上下樓梯，當然是三維的運動。然而在本章中我們學到如何簡化問題做進一步分析：當細部動作不重要，人可視為質點，如果問題重點在家到學校的路程及速度，上、下公車這種次要的小位移就可以忽略；就算所有的位移都很重要，仍然可以將三維的運動分解為數個二維的運動來處理，正如本章所述的拋體等二維的運動可以分解為兩個直線運動來討論一樣。在物理中，適當的簡化問題，非但不是不切實際，反而是解決問題的重要途徑。

本章重點

2-1 向量的運算

1. 向量合成可以利用平行四邊形法、三角形法與解析法來完成。
2. 一向量有多種分解方式，其中以分解成互相垂直的兩分量最為有用。

2-2 二維空間的位移、速度及加速度

3. 二維平面運動，可以分解成兩個獨立的、彼此互相垂直的直線運動來分析：
   $\overrightarrow{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$；$\overrightarrow{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j}$。
4. 切向加速度改變物體運動的快慢，法向加速度改變物體運動的方向。

2-3 二維的等加速運動─拋體運動

5. 拋體運動是由水平方向的等速運動，和鉛直方向的等加速運動組合而成；兩者的運動彼此互不影響，可以分開來單獨處理，稱為運動的獨立性。
6. 由高處 h 以固定的初速 v_0 向水平方向拋出物體，任意時刻 t 時，物體的水平位置 $x = v_0 t$，鉛直位置 $y = -\frac{1}{2}gt^2$，其軌跡方程式為 $y = -\frac{g}{2{v_0}^2}x^2$。當小球落至地面時，飛行時間 $T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$，水平射程 $R = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}}$。
7. 斜向拋射運動的軌跡為一通過原點，開口向下的拋物線，其最大的高度 $H = \frac{(v_0 \sin\theta)^2}{2g}$，水平射程 $R = \frac{{v_0}^2 \sin 2\theta}{g}$，飛行時間 $T = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$，為拋射角。
8. 若二次斜向拋射運動之初速相同，但拋射角互為餘角（相加等於 90°）時，兩者的水平射程相同，但鉛直高度與落地時間則以仰角大者較大。
9. 初速度相同，各種不同的拋射角中，以 45°時水平射程最大，$R_{max} = \frac{{v_0}^2}{g}$。

習題

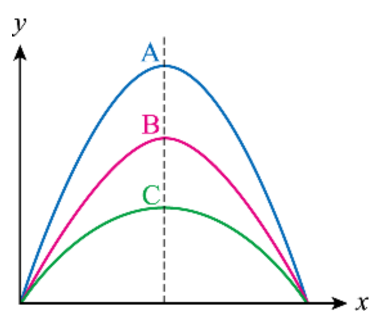
觀念題

1. 兩個長度相等的向量，其夾角由 0°增至 180°時，則其合向量的長度如何變化？
2. 兩個長度相等的向量，當其合向量的長度恰與原向量相等時，則兩向量夾角為若干？
3. 試判斷以下敘述是否正確：加速度不為零，則速度一定會變化。
4. 試判斷以下敘述是否正確：加速度不為零，則速率一定會變化。
5. 在不計身高、不可助跑的狀況下，若想在球場上把球投擲得最遠，應以多大的仰角拋出？
6. 在地面上以相同的初速斜拋一物體後，待物體落至地面。有人說飛得愈高就飛得愈遠，你同意嗎？
7. 在地面上以相同的初速斜拋一物體後，待物體落至地面。有人說飛得愈高就飛得愈久，你同意嗎？
8. 在地面上以相同的初速斜拋一物體後，待物體落至地面，有人說飛得愈久就飛得愈遠，你同意嗎？
9. 在高樓上將數個物體以不同的初速水平拋射，有人說飛得愈遠就飛得愈久，你同意嗎？
10. 分別於同一建築物的 3 樓、5 樓、7 樓將三個物體以相同的初速水平拋射，何者先落地？何者飛得較遠？
11. 右圖為 A、B、C 三球的斜拋軌跡，三球的水平射程相同，但最大高度不同。

    (1) 將三球的飛行時間由長至短排列。

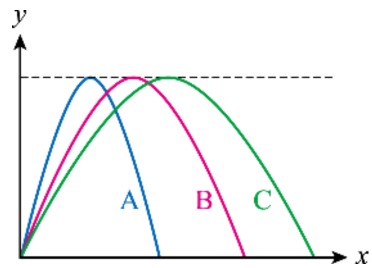
    (2) 將三球的鉛直初速度由大至小排列。

    (3) 將三球的水平初速度由大至小排列。



習題

12. 右圖為 A、B、C 三球的斜向拋射軌跡，三球的最大高度相同，但水平射程不同。
   (1) 將三球的水平初速度由大至小排列。
   (2) 將三球的鉛直初速度由大至小排列。
   (3) 將三球的初速度由大至小排列。
   (4) 將三球的飛行時間由大至小排列。



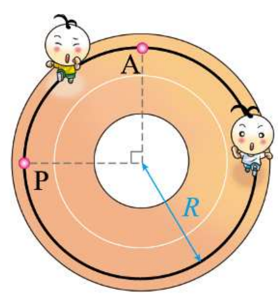
基礎題

2-1 向量的運算

1. $\overrightarrow{A}$ 與 $\overrightarrow{B}$ 之量值固定，方向可以改變。若 $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$ 之最大長度為 14，最小長度為 2。若 $\overrightarrow{A}$ 與 $\overrightarrow{B}$ 互相垂直，則 $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$ 之長度為若干？$\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}$ 之長度為若干？

2-2 二維空間的位移、速度及加速度

2. 小康、小熹兩人在半徑 R 之圓形跑道上運動，今兩人由同一點 A 出發，其中小康沿逆時針方向運動，小熹沿順時針方向運動。已知兩人在圖中的 P 點相遇，求兩人的位移量值為若干？兩人的路徑長為若干？



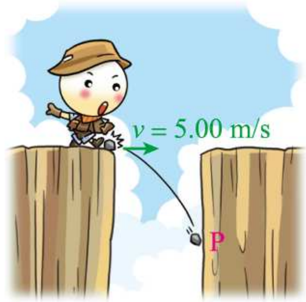
3. 一飛機向東北方飛行，並以仰角 37°爬升，速率 100.0 公尺／秒，則飛機向北之水平速度分量為若干？

4. 一運動物體在某時刻之加速度為 6.0 公尺／秒 ^{2}，已知此物體之切向加速度為 3.0 公尺／秒 ^{2}，則其法向加速度量值應為若干公尺／秒 ^{2}？

5. 作二維等加速運動之物體，下列哪些物理量必會改變？
(A)速度量值　(B)速度方向　(C)法向加速度　(D)切向加速度　(E)物體受力。

2-3 二維的等加速運動─拋體運動

6. 探險家發現某地的地面上有一寬 25.0 公尺之裂谷，深不見底。探險家於裂縫一側以速度 5.00 公尺／秒向裂谷中踢出一石塊，石頭擊中圖中另一側裂縫壁的位置以 P 點表示，求 P 點距地面之鉛直距離？（設重力加速度 $g=10.0$ 公尺／秒 ^{2}）



7. 一砲彈在斜角 30°之斜坡頂端以 60.0 公尺／秒水平拋射，設重力加速度 $g=10.0$ 公尺／秒 ^{2}，此砲彈最終仍落在斜坡上，則砲彈沿斜面之射程為若干？

8. 以 v_0 的初速度水平拋出一石子，不計空氣阻力，則其速度與水平面的夾角由 37°增至 53°所經時間為若干秒？

習題

9. 一物體自地面以初速 20.0 公尺／秒、仰角 30°拋出，設重力加速度 $g=10.0$ 公尺／秒 ^{2}，則：

(1) 此物體所達之最大高度為若干？　　(2) 此物體之水平射程為若干？

(3) 此物體之軌跡方程式為何？

10. 一物體自離地面 40.0 公尺處以初速 20.0 公尺／秒、仰角 30°拋出，則物體落地時水平方向之射程為若干公尺？（設重力加速度 $g=10.0$ 公尺／秒 ^{2}）

11. 以 10.0 公尺／秒的初速於地面斜向拋出一球，在運動過程中設重力加速度為 10.0 公尺／秒 ^{2}，其速度的最小值為 5.00 公尺／秒，則此球所能到達的最大高度為若干公尺？

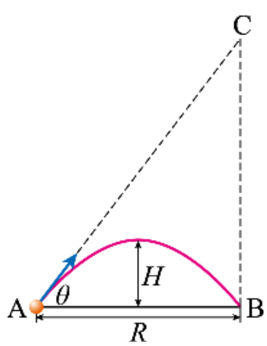
綜合題

1. 如圖，一直升機之螺旋槳的轉速為每秒 1.0×10^2 轉，槳上一質點距離轉軸 2.0 公尺，直升機正以 400.0 公尺／秒之速度鉛直上升，當螺旋槳旋轉 $\frac{1}{4}$ 周時，該質點在空間中之位移量值為若干公尺？

2. 水平抛出一石塊，當石塊的切向加速度大小為法向加速度大小的 2 倍時，其前進的水平距離與落下的鉛直距離之比值為何？

*3. 一物體自平地上斜向拋出，不計空氣阻力，其水平射程為 R，最大高度為 H，則在軌跡上高度為 $\frac{H}{2}$ 的兩點間的距離與水平射程 R 的比值為若干？

*4. 如圖，一物體由地面 A 點斜向拋出再落回地面之 B 點，其運動軌跡之最大高度為 H，水平射程為 R。若由 A 點沿初速度方向作延伸直線，並由 B 點鉛直向上作延伸直線，設兩直線交於 C 點。試證明：不論初速與仰角為何，$\overline{BC}$ 恆等於 $4H$。

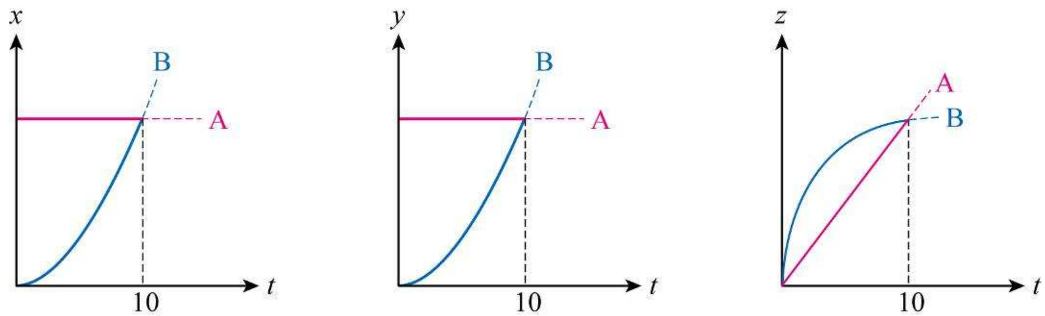


*5. 承上題可知，斜向拋射之水平射程 R、最大高度 H 與初仰角 θ 三物理量間符合三角函數關係 $\tan\theta = \frac{4H}{R}$。試以此式證明：相同初速斜向拋出兩物體，其仰角不同，且其運動軌跡之最大高度各為 h_1 與 h_2，而兩物體之水平射程相同，則兩物體的水平射程為 $R = 4\sqrt{h_1 h_2}$。

習題

題組

某東亞軍事強權政府正發展新式地對空飛彈，英國著名情報員007 冒九死一生的危險竊取出飛彈的實驗數據圖如下。經判讀A 為靶機，B 為飛彈，x、y、z 分別為東方、北方與上方，三個圖形中之B 曲線均為拋物線。



1. 靶機的運動狀況為何？　(A)等速水平向東北飛行　(B)向東北方飛行，高度漸增　(C)等速鉛直向上飛行　(D)鉛直向上飛行，速率漸減。
2. 飛彈的運動狀況為何？　(A)向東北方加速前進並加速向上爬升　(B)向東北方加速前進，向上　爬升但向上速度漸減　(C)向東北方等速前進，向上爬升但向上速度漸減　(D)向東北方加速前進，向上爬升且向上速度漸增。
3. 此次實彈發射的結果如何？　(A)飛彈成功的擊中靶機　(B)失敗！飛彈上升後不久即爆炸　(C)失敗！飛彈上升後不久即墜毀　(D)失敗！飛彈於靶機上方掠過。