

114 年國中教育會考數學科非選擇題
第二題

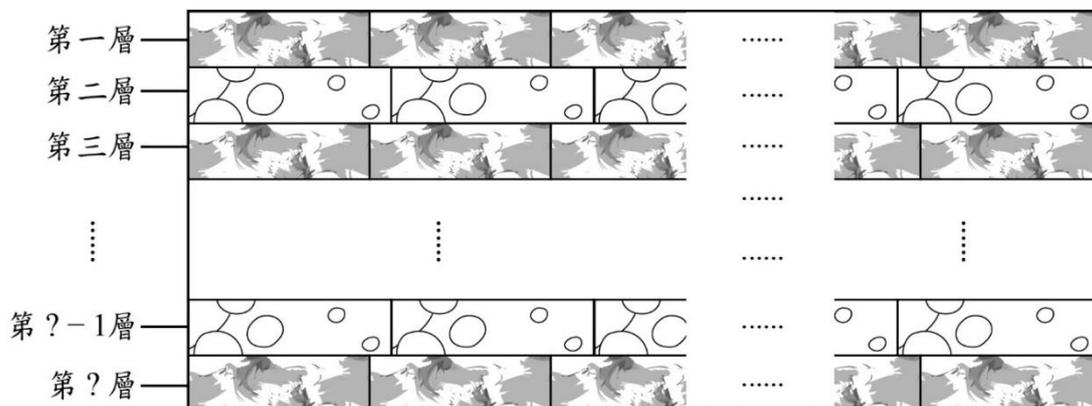
試題內容

商店中販賣一款包含 A、B 兩種圖案的藝術紙片組合包，形狀分別為 16 公分×5 公分、18 公分×5 公分的長方形，如圖(十七)所示。



圖(十七)

小燦打算在不裁切紙片的情況下，將這兩種藝術紙片以緊密相鄰的方式貼成圖(十八)的長方形，其中奇數層為 A 圖案，偶數層為 B 圖案，且最後一層為 A 圖案，而相同圖案的藝術紙片皆為相同的方向。



圖(十八)

請根據上述資訊回答下列問題，完整寫出你的解題過程並詳細解釋：

- (1) 以上述方式貼成的長方形，第一層最少有幾個 A 圖案？
- (2) 已知每個組合包中 A、B 兩種圖案的藝術紙片數量比為 4:3，若小燦想購買一些組合包，貼成圖(十八)的長方形，其中第一層的 A 圖案數量與(1)求出之值相同，判斷他是否可能恰好把購買的藝術紙片用完？請說明理由。

評分指引

依據評分規準，此題評分指引如下：

級分	評分指引
三級分	<ol style="list-style-type: none">1. 正確推導出第一層A圖案最少有9個，且正確利用層數與片數的關係列比例式或方程式求解，解題步驟呈現完整或大致完整的推導/推理或解釋，並根據求得的解答正確判斷紙片能否恰好用完。2. 正確推導出第一層A圖案最少有9個，且正確利用層數的關係列關係式，或利用片數的關係列關係式，根據層數與片數的關係以算式推論或舉數值實例檢驗，並正確推論紙片無法恰好用完，解題步驟呈現完整或大致完整的推導/推理或解釋。
二級分	<ol style="list-style-type: none">1. 正確利用第一層A、B圖案最少有9、8個及層數與片數的關係列出比例式或方程式，但未能正確判斷紙片能否恰好用完，解題過程中呈現完整、大致完整或部分重要的推導/推理或解釋。2. 利用第一層A、B圖案最少有9、8個及層數與片數的關係列出比例式或方程式，所列數學式出現數值誤植錯誤，但根據所列數學式正確求解，並正確判斷紙片能否恰好用完。3. 正確呈現第一層A圖案最少有9個，正確利用層數的關係列關係式，或利用片數的關係列關係式，根據層數與片數的關係以算式推論或舉數值實例檢驗，但推論或檢驗過程缺少關鍵步驟，然而解題過程呈現部分重要的推導/推理或解釋。
一級分	<p>未達二級分標準，但呈現下列其一：</p> <ol style="list-style-type: none">1. 正確得出第一層A圖案最少有9個。2. 呈現非題目已知的解題要素，例如：正確得出題目數據的關係式、正確列舉一組數值實例檢驗紙片無法恰好用完。
零級分	<ol style="list-style-type: none">1. 只有答案或與題目無關。2. 策略模糊不清或錯誤。

三級分樣卷說明

序號	樣卷一	
級分	三級分	
指引	1	
樣卷說明		
<p>正確推導出第一層A圖案最少有9個，且正確利用層數與片數的關係列比例式求解，解題步驟呈現完整的推導，並根據求得的解答正確判斷紙片不能恰好用完。</p>		<p>(1) A圖長為16、B圖長為18，全部須切齊 $\Rightarrow [16, 18] = 144$ $144 \div 16 = 9$ 且 $(144 \div 18 = 8)$，\Rightarrow 最少有9個A圖</p> <p>(2) 以兩橫排紙片為單位 (A、B各一排)， A、B數量比 = 9 = 8，且第一與最後一排皆為A圖 設共有x排，A共有 $\frac{x+1}{2}$ B共有 $\frac{x-1}{2}$</p> $\frac{x+1}{2} \times 9 = \frac{x-1}{2} \times 8 \Rightarrow 4 = 3$ $\Rightarrow \frac{9x+9}{2} = 4x-4 = 4 \Rightarrow 3, \Rightarrow \frac{27x+27}{2} = 16x-16$ $\Rightarrow 13.5x - 16x = -16 - 13.5 \Rightarrow -2.5x = -29.5$ $x = 11.8$ <p>但排數不可能為小數 因此不全。A不可能</p>

序號	樣卷二	
級分	三級分	
指引	1	
樣卷說明		
<p>正確推導出第一層A圖案最少有9個，且正確利用層數與片數的關係列聯立方程式求解，解題步驟呈現完整的推導，並根據求得的解答正確判斷紙片不能恰好用完。</p>		<p>(1) $[16, 18] = 144$ $144 \div 16 = 9$ (個)*</p> <p>(2) 設A種有4x個，B種有3x個，A種有(y+1)層。 $144 \div 18 = 8$ (個)</p> <p>若恰好用完： $\begin{cases} \frac{4x}{9} = y+1 \\ \frac{3x}{8} = y \end{cases}$ $\Rightarrow \frac{4x}{9} = \frac{3x}{8} + 1$ $\Rightarrow 32x = 27x + 72$ $\Rightarrow 5x = 72$ $\Rightarrow x = 14\frac{2}{5}$ </p> <p>又4x、3x必為整數 $\therefore x = 14\frac{2}{5}$ 不合理。 \Rightarrow 無法恰好用完*</p>

序號	樣卷三													
級分	三級分													
指引	1													
樣卷說明														
<p>正確推導出第一層A圖案最少有9個，且正確利用層數與片數的關係列比例式求解，解題步驟呈現大致完整的推導，雖出現不影響解題過程的瑕疵，但根據求得的解答正確判斷紙片不能恰好用完。</p>		<p>(1)</p> $\begin{array}{l} [16, 18] : 144 \\ 2 \begin{array}{l} 16 \quad 18 \\ \hline 8 \quad 9 \end{array} \times 8 \times 9 = 72 \times 2 \\ \qquad \qquad \qquad = 144 \\ 144 \div 16 = 9 \qquad A: 9 \text{個} \end{array}$ <p>(2)</p> <table style="border: none;"> <tr> <td style="vertical-align: top;"> $144 \div 18 = 8$ \therefore 第一層有8個B $8+9=17$ 設A有x層 $9x : (x-1)8 = 4:3$ $9x : 8x-8 = 4:3 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$ </td> <td style="vertical-align: top; padding-left: 20px;"> <table style="border: none;"> <tr> <td style="text-align: center;">層</td> <td style="text-align: center;">數量</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">21</td> <td style="text-align: center;">16 = 21:16</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">36</td> <td style="text-align: center;">24 = 3:2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">45</td> <td style="text-align: center;">32</td> </tr> </table> <p>\therefore 不可能是分數 \therefore 無法剛好用完 A: 否</p> </td> </tr> </table>	$144 \div 18 = 8$ \therefore 第一層有8個B $8+9=17$ 設A有x層 $9x : (x-1)8 = 4:3$ $9x : 8x-8 = 4:3 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$	<table style="border: none;"> <tr> <td style="text-align: center;">層</td> <td style="text-align: center;">數量</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">21</td> <td style="text-align: center;">16 = 21:16</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">36</td> <td style="text-align: center;">24 = 3:2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">45</td> <td style="text-align: center;">32</td> </tr> </table> <p>\therefore 不可能是分數 \therefore 無法剛好用完 A: 否</p>	層	數量	A	B	21	16 = 21:16	36	24 = 3:2	45	32
$144 \div 18 = 8$ \therefore 第一層有8個B $8+9=17$ 設A有x層 $9x : (x-1)8 = 4:3$ $9x : 8x-8 = 4:3 \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$	<table style="border: none;"> <tr> <td style="text-align: center;">層</td> <td style="text-align: center;">數量</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">A</td> <td style="text-align: center;">B</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">21</td> <td style="text-align: center;">16 = 21:16</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">36</td> <td style="text-align: center;">24 = 3:2</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">45</td> <td style="text-align: center;">32</td> </tr> </table> <p>\therefore 不可能是分數 \therefore 無法剛好用完 A: 否</p>	層	數量	A	B	21	16 = 21:16	36	24 = 3:2	45	32			
層	數量													
A	B													
21	16 = 21:16													
36	24 = 3:2													
45	32													

序號	樣卷四	
級分	三級分	
指引	2	
樣卷說明		
<p>正確推導出第一層A圖案最少有9個，且正確利用片數的關係列關係式，根據層數與片數的關係以算式推論，並正確推論紙片無法恰好用完，$x:y=32:27$為最簡整數比為完整推導中之關鍵步驟。</p>		<p>(1) 16與18之最小公倍數為144 故A圖最少有 $144 \div 16 = 9$ 個 A: 9個</p> <p>(2) 一排B圖最少需要 $144 \div 18 = 8$ 個 故一排B圖有8個 總A圖:B圖需為4:3才用得完 設A有x排, B有y排 $9x : 8y = 4:3$ $32y = 27x \Rightarrow x:y = 32:27$ (為最簡整數比) $32-27=5$, 而照題目所述, A比B多一排 $5>1$, 所以不可能 A: 不可能</p>

二級分樣卷說明

序號	樣卷一	<p>(1) $[16, 18] = 2 \times 8 \times 9 = 144$</p> $\begin{array}{r} 2 \overline{) 16 \quad 18} \\ \underline{8 \quad 9} \end{array}$ $144 \div 16 = 9$ $\begin{array}{r} 16 \overline{) 144} \\ \underline{144} \\ 0 \end{array}$ <p>(2) $144 \div 18 = 8$ $\frac{72}{5} \times 4 = 5$</p> $4r = 4r + 3r$ $\frac{4r}{9} = \frac{3r}{8} + 1$ $\frac{32r}{72} = \frac{27r}{72} + 1$ $5r = 72$ $r = \frac{72}{5}$ <p>A: (1) 9個, (2)</p>
級分	二級分	
指引	1	
樣卷說明		
<p>正確利用第一層A、B圖案最少有9、8個及層數與片數的關係列出方程式，但未能正確判斷紙片能否恰好用完，解題過程中呈現大致完整的推導。</p>		

序號	樣卷二	<p>(1) 所求為 $\frac{16 \text{ 和 } 18 \text{ 之 最小公倍數}}{16}$</p> $\Rightarrow \frac{[16, 18]}{16} = \frac{144}{16} = 9$ <p>(2) B-層有 $\frac{144}{18} = 8$ 片</p> $\left(\frac{z+1}{2} \times 9\right) \rightarrow \text{A 紙片用量}$ $\left(\frac{z-1}{2} \times 8\right) \rightarrow \text{B 紙片用量}$ <p>若要剛好用完，即 A 用量 = B 用量 = $z = 4$</p> $\Rightarrow \frac{9z+9}{2} = \frac{8z-8}{2} = z = 4 \quad (1) \text{ 9個}$ <p>A: (2) 如上所述</p> $24z - 24 = 36z + 36$ $12z = -60 \Rightarrow z = -5 \text{ (不合)} \Rightarrow \text{故不可能剛好用完}$
級分	二級分	
指引	2	
樣卷說明		
<p>利用第一層A、B圖案最少有9、8個及層數與片數的關係列出符合「紙片剛好用完」時之比例式，所列數學式出現數值誤植錯誤；但根據所列數學式正確求解，得出層數為-5，故原比例式之解不合題意，根據此結果正確判斷紙片不能恰好用完。</p>		

序號	樣卷三
級分	二級分
指引	3
樣卷說明	
<p>正確呈現第一層A圖案最少有9個，正確利用層數的關係列關係式，根據層數與片數的關係以舉數值實例檢驗，但檢驗過程缺少關鍵步驟(呈現比值變化的趨勢)，然而解題過程呈現部分重要的解釋。</p>	

(1) 16和18的最小公倍數 = $[16, 18] = 144$
 $144 \div 16 = 9$ A: 9個

(2) $A \times 9 = B \times 8$ $144 \div 18 = 8$
 第一層9個A 第二層8個B
 設A有 x 層, 則B有 $x-1$ 層

A和B的層數比	2:1	3:2	4:3	5:4	6:5	7:6	8:7	9:8	10:9
A和B的片數比	18:8	27:16	36:24	45:32	54:40	63:48	72:56	81:64	90:72

$63:48 = 21:16 \Rightarrow \frac{21}{16} < \frac{4}{3}$ $81:64 \Rightarrow \frac{81}{64} > \frac{4}{3}$
 $72:56 = 9:7 \Rightarrow \frac{9}{7} < \frac{4}{3}$ A: 不可能

一級分樣卷說明

序號	樣卷一	
級分	一級分	
指引	1	
樣卷說明		
<p>正確得出第一層A圖案最少有9個，但未達二級分標準。</p>		<p>(1) 16和18最小公倍數為144</p> $\frac{144}{16} = 9$ <p>A: 9個</p> <p>(2) 設總層數為n</p> $A \rightarrow \frac{(n+1)}{2} \times 9 \rightarrow 9n+9$ $B \rightarrow \frac{(n-1)}{2} \times 8 \rightarrow 8n-8$ $9n+9-8n+8 = n+17$

序號	樣卷二	
級分	一級分	
指引	2	
樣卷說明		
<p>呈現非題目已知的解題要素，正確得出題目數據的關係式 $x:y=9:8$，但未達二級分標準。</p>		<p>(1) A的長為16, B的長為18, 設有x個A圖, y個B圖</p> $16x = 18y$ $x:y = 18:16$ $= 9:8$ <p>(2) ∵ A、B兩種圖案的紙片數量比為4:3 組合包中 而A、B的個數比為9:8 ∴ 不能用完</p> <p>(1) 9個 A = (2) 否</p>

零級分樣卷說明

序號	樣卷一	<p>(1) $16 \times 18 = 288$ $288 \div 16 = 18$ #</p> <p>(2) $4:3 = 18:24$</p> <p style="text-align: right;">A[⊙]18張 ⊙</p>
級分	零級分	
指引	2	
樣卷說明		
策略模糊不清。		