

## 4-1 一元一次不等式的解及圖示

### 1 認識一元一次不等式

對應能力指標 A-7-7

在上學期曾經學過一元一次方程式，本章將學習一元一次不等式，並應用到實際生活上。

炳聰和天佑的身高分別為  $a$  公分及  $b$  公分，當比較兩人身高時，可能炳聰比天佑高 ( $a > b$ )，也可能兩人一樣高 ( $a = b$ )，或炳聰比天佑矮 ( $a < b$ )，這三種情形恰好有一種會成立。也就是說，比較  $a$ 、 $b$  兩數的大小關係時， $a > b$ 、 $a = b$ 、 $a < b$  這三種情形恰好有一種情況會成立。

在前面的漫畫中，雲霄飛車的乘坐限制為身高低於 140 公分不可以玩，威利的身高為  $x$  公分，安琪的身高為  $y$  公分。



我的身高不低於 140 公分，我可以去玩。

不低於 140 公分，表示  $x > 140$  或  $x = 140$  都可能成立。將「 $x > 140$  或  $x = 140$ 」合併記作「 $x \geq 140$ 」，讀作「 $x$  大於或等於 140」。



我的身高低於 140 公分，我不可以去玩...

低於 140 公分，表示  $y < 140$ ，讀作「 $y$  小於 140」。

數學符號  $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 、 $\leq$  與  $\neq$  都稱為**不等號**。含有不等號的式子，稱為**不等式**。例如： $x \geq 140$ 、 $y < 140$  皆為不等式。

什麼情況下 0 會贏 2，2 會贏 5？

**P142****例 1** 列不等式

自評 P152 第 1 題

將下列各敘述列成不等式：

(1)  $2x$  大於 18

(2)  $3y$  比 5 小

(3)  $2x-3$  不大於 6

(4)  $4y+1$  不小於 7

**解**

(1)  $2x > 18$ 。

(2)  $3y < 5$ 。

(3) 不大於 6，表示小於 6 或等於 6，  
所以  $2x-3 \leq 6$ 。(4) 不小於 7，表示大於 7 或等於 7，  
所以  $4y+1 \geq 7$ 。**隨堂練習**

將下列各敘述列成不等式：

(1)  $4x$  小於 3.2

$4x < 3.2$

(2)  $y$  比 20 大

$y > 20$

(3)  $5x+2$  不小於 0

$5x+2 \geq 0$

(4)  $y-1$  不大於 3

$y-1 \leq 3$

在**例 1**與**隨堂練習**中，像  $2x > 18$ ， $3y < 5$ ， $4y+1 \geq 7$ ……，這些只含有一種未知數（一元），且其最高次方為一次的不等式，稱為**一元一次不等式**。

**P143**

生活中常須比較某些事物的大小關係，所以經常會使用到不等式，然而在日常用語中，並不一定會直接以「大於」、「小於」、「大於或等於」、……來描述，有時會以它們的同義詞來表達。下表列出不等號的讀法及一些常見的同義詞：

符號	讀法	同義詞舉例
$>$	大於	超過，高於，逾
$<$	小於	不足，不滿，未滿，不到，低於
$\geq$	大於或等於	不小於，不低於，至少，以上（含）
$\leq$	小於或等於	不大於，不超過，不高於，至多，以下（含），不逾
$\neq$	不等於	不相等，相異，非

**例 2** 依情境列出不等式

搭配習作 P50 基礎題 1 自評 P152 第 1 題

宏仁與媽媽上市場買了 100 元的牛肉及每公斤 200 元的蝦子  $x$  公斤，且所用去的錢不超過 500 元。依據上述的情形列出一元一次不等式。

**解**

100 元的牛肉及每公斤 200 元的蝦子  $x$  公斤，  
 一共用去了  $(100 + 200x)$  元，  
 因為所用去的錢不超過 500 元，  
 因此可列出不等式  $100 + 200x \leq 500$ 。

**隨堂練習**

阿超帶 200 元到水果行買了每顆 25 元的蘋果  $x$  顆，結帳時發現忘了帶環保購物袋，所以又花了 2 元購買一個塑膠袋，假如他買完後還剩下一些錢，依據上述的情形列出一元一次不等式。

$$25x + 2 < 200$$

解答：猜拳的時候（石頭贏剪刀，剪刀贏布）。

**P144**

日常生活中也會碰到有上下範圍的情境描述，例如：右圖是高速公路的速限交通標誌，從圖中可知小客車的時速必須在 60 公里以上（含），但不可以超過 100 公里。

已知博士在高速公路開車的時速為  $x$  公里，若符合速限要求，則「 $60 \leq x \leq 100$ 」，意思是說「 $60 \leq x$ 」和「 $x \leq 100$ 」同時成立。

**例 3** 依情境列出不等式

搭配習作 P50 基礎題 2 自評 P152 第 2 題

博士帶孫子去太平山坐蹦蹦車：

- (1) 若博士的年齡是  $x$  歲，購買全票乘坐，試以不等式表示  $x$  的範圍。
- (2) 若孫子的年齡是  $y$  歲，購買優待票乘坐，試以不等式表示  $y$  的範圍。

票種	票價	適用對象
全票	180 元	13 歲以上（含）～未滿 65 歲者。
優待票	120 元	① 3 歲以上（含）～未滿 13 歲者。 ② 65 歲以上者（含）。
免票	0 元	① 未滿 3 歲者，需由購票大人陪同。 ② 身心障礙易辨識或持有身障手冊者，及其必要陪伴者一人。

**解**

- (1) 依據題意，博士購買全票乘坐，所以  $13 \leq x < 65$ 。
- (2) 依據題意，孫子購買優待票乘坐，所以  $3 \leq y < 13$ 。



**P145****隨堂練習**

依據兒童及少年福利法規定：

本法所稱兒童及少年，指未滿十八歲之人；所稱兒童，指未滿十二歲之人；所謂少年，指十二歲以上未滿十八歲之人。

若妙麗今年的年齡是  $x$  歲，且符合上述少年的規定，試以不等式表示  $x$  的範圍。  
 $12 \leq x < 18$ 。

**健體 舉重級別**

郭婞淳是國際知名舉重選手，在 2020 東京奧運，以抓舉 103 公斤、挺舉 133 公斤，總和 236 公斤 3 項創奧運紀錄，為臺灣拿下 1 面女子 59 公斤級的金牌。

目前在國際比賽和奧運會比賽中女子舉重的體重級別畫分如下表：

級別	體重
49 公斤級	體重 $\leq 49$ 公斤
55 公斤級	$49 \text{ 公斤} < \text{體重} \leq 55 \text{ 公斤}$
59 公斤級	$55 \text{ 公斤} < \text{體重} \leq 59 \text{ 公斤}$
64 公斤級	$59 \text{ 公斤} < \text{體重} \leq 64 \text{ 公斤}$
76 公斤級	$64 \text{ 公斤} < \text{體重} \leq 76 \text{ 公斤}$
87 公斤級	$76 \text{ 公斤} < \text{體重} \leq 87 \text{ 公斤}$
+87 公斤級	體重 $> 87$ 公斤



Q 妙麗的體重是 60 公斤，若她參加比賽，則為哪一個級別？

$64$  公斤級。

Q 設艾美的體重是  $x$  公斤，參加 55 公斤級的比賽，試以不等式表示  $x$  的範圍。

$49 < x \leq 55$ 。

**P146****2** 一元一次不等式的解

對應能力指標 A-7-8

如果將一個數代入不等式中的未知數，可使得不等式成立，則這個數稱為此不等式的一個解。例如：

要判別 1、2、3 是否為不等式  $100 + 200x \leq 500$  的解，分別將此三個數代入，可以發現：

$100 + 200 \times 1 = 300 < 500$ ，所以  $x=1$  時， $100 + 200x \leq 500$  成立。

$100 + 200 \times 2 = 500$ ，所以  $x=2$  時， $100 + 200x \leq 500$  成立。

$100 + 200 \times 3 = 700 > 500$ ，所以  $x=3$  時， $100 + 200x \leq 500$  不成立。

因此，1 與 2 都是不等式  $100 + 200x \leq 500$  的解。

**例 4** 判別不等式的解

搭配習作 P51 基礎題 3 自評 P153 第 3 題

下列哪些是不等式  $3x - 4 \geq 5$  的解？

(1) 2

(2) 3

(3)  $3\frac{1}{2}$ **解**

(1) 將  $x=2$  代入  $3x-4$  可得  $3 \times 2 - 4 = 2 < 5$ ，  
所以 2 不是  $3x-4 \geq 5$  的解。

(2) 將  $x=3$  代入  $3x-4$  可得  $3 \times 3 - 4 = 5$ ，  
所以 3 是  $3x-4 \geq 5$  的一個解。

(3) 將  $x=3\frac{1}{2}$  代入  $3x-4$  可得  $3 \times 3\frac{1}{2} - 4 = 6\frac{1}{2} > 5$ ，

所以  $3\frac{1}{2}$  是  $3x-4 \geq 5$  的一個解。

因此 3 和  $3\frac{1}{2}$  都是不等式  $3x-4 \geq 5$  的解。

**隨堂練習**

下列哪些是不等式  $2x + 3 \leq 7$  的解？

(1) -1

(2) 2

(3) 3.5

$$2 \times (-1) + 3 = 1 (< 7)$$

$$2 \times 2 + 3 = 7$$

$$2 \times 3.5 + 3 = 10 (> 7)$$

答：(1)、(2)。

**P147****3**一元一次不等式解的圖示法

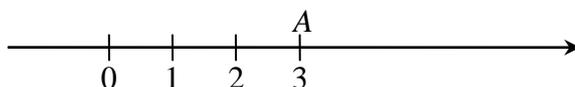
對應能力指標 A-7-8

由例 4 可知，3 和  $3\frac{1}{2}$  都是不等式  $3x-4 \geq 5$  的解，若將 4、5、6、……等數分別代入不等式  $3x-4 \geq 5$  中，會發現這些數也都是不等式  $3x-4 \geq 5$  的解。

事實上，通常一元一次不等式的解可能不是只有一個，而是一個範圍，因此只要是大於或等於 3 的任何數，都會是不等式  $3x-4 \geq 5$  的解，因此我們用「 $x \geq 3$ 」來表示不等式  $3x-4 \geq 5$  的解。

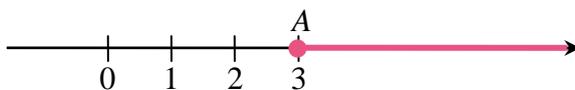
為了方便表示一元一次不等式的解，也可以在數線上將解圖示出來。例如圖示  $x \geq 3$  的步驟如下：

**步驟 1：**先在數線上找出代表 3 的點，令其為 A 點，如圖一。



圖一

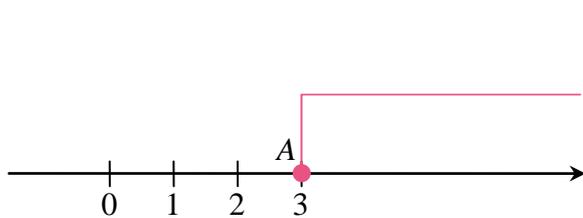
**步驟 2：** $x \geq 3$  的圖形為「A 點及 A 點右邊所有點」所形成的圖形，因此將 A 點右側的數線加粗，如圖二。



圖二

因為  $x \geq 3$  包含  $x=3$ ，因此 A 點以實心的圓點「●」表示。

為了方便繪製，不等式解的圖示也經常以圖三的方法表示：



圖三

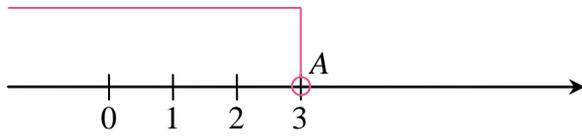
當解的範圍包含端點，用實心「●」標示端點。



「將、士、象三人相約郊遊，士睡過頭，將、象就自己去玩了」，猜一個數學名詞。

**P148**

如果要畫出  $x < 3$  的圖形，因為數線上在 3 左邊的所有點都是小於 3 的數，而在 3 右邊的點皆為大於 3 的數，所以  $x < 3$  的圖形為「A 點左邊所有點」所形成的圖形，如下圖。



當解的範圍不包含端點，用空心「○」標示端點。



因為  $x < 3$  不包含  $x = 3$ ，所以 A 點用空心的圓點「○」表示

**例 5** 一元一次不等式的圖示法

搭配習作 P51 基礎題 4(1) 自評 P153 第 4 題

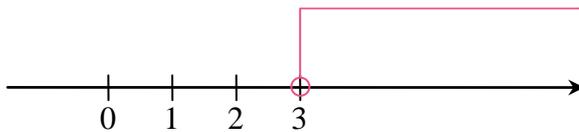
在數線上圖示下列各不等式：

(1)  $x > 3$

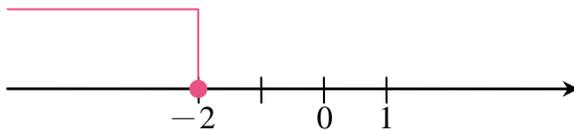
(2)  $x \leq -2$

**解**

(1) 不等式  $x > 3$  在數線上所形成的圖形，如下圖：



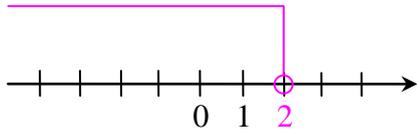
(2) 不等式  $x \leq -2$  在數線上所形成的圖形，如下圖：



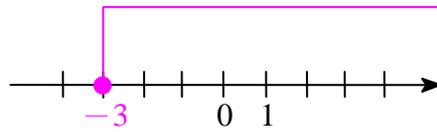
**P149****隨堂練習**

1. 在數線上圖示下列各不等式：

(1)  $x < 2$

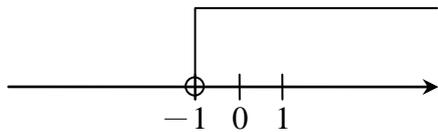


(2)  $x \geq -3$



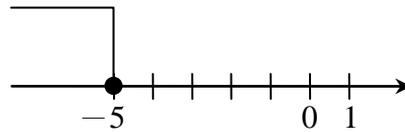
2. 寫出下列各圖示所表示的不等式：(以  $x$  的不等式表示) 搭配習作 P51 基礎題 5

(1)



$x > -1$

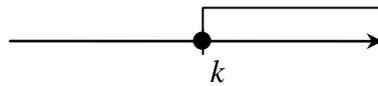
(2)



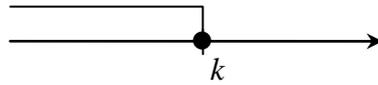
$x \leq -5$

**【一元一次不等式的形式與圖示】**

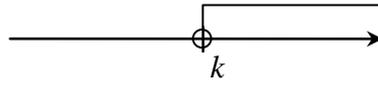
(1)  $x \geq k$  表示包含  $k$  和比  $k$  大的數都滿足不等式。



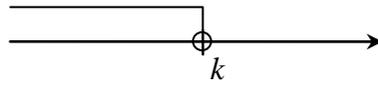
(2)  $x \leq k$  表示包含  $k$  和比  $k$  小的數都是不等式的解。



(3)  $x > k$  表示所有比  $k$  大的數都是不等式的解。



(4)  $x < k$  表示所有比  $k$  小的數都是不等式的解。



**P150**

在 144 頁曾提到有上下範圍的不等式，例如：小客車在高速公路的時速設為  $x$  公里，則「 $60 \leq x \leq 100$ 」，接下來將介紹有上下範圍不等式的圖示法。

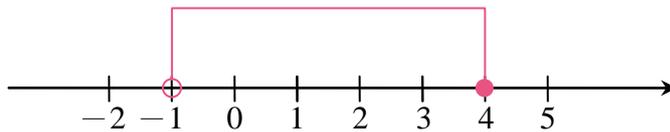
**例 6** 一元一次不等式的圖示法

搭配習作 P51 基礎題 4(2) 自評 P153 第 5 題

在數線上圖示不等式  $-1 < x \leq 4$ 。

**解**

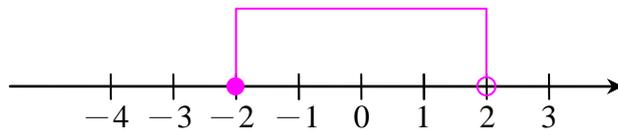
不等式  $-1 < x \leq 4$  表示「 $x$  大於  $-1$ 」且「 $x$  小於或等於  $4$ 」。圖示如下：



也可以圖示如下：

**隨堂練習**

在數線上圖示不等式  $-2 \leq x < 2$ 。



**P151****4-1 重點回顧****1 一元一次不等式**

- (1) 在數學的符號中， $>$ 、 $<$ 、 $\leq$ 、 $\geq$ 與 $\neq$ 皆稱為不等號，而包含不等號的數學式子，稱為不等式。
- (2) 只含有一種未知數（一元），且最高次方為一次的不等式，稱為一元一次不等式。

**例**  $5x < -4$ 、 $\frac{3}{4}x - 6 \geq 2$  皆為一元一次不等式。

**2 一元一次不等式的解**

- (1) 如果將一個數代入不等式中的未知數，可使得不等式成立，則這個數稱為此不等式的一個解。

**例**  $x=1$  是一元一次不等式  $2x+5>1$  的一個解。

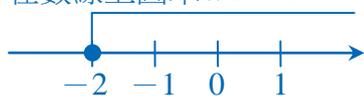
- (2) 不等式的解可能不是只有一個，而是一個範圍，因此須呈現所有的解。

**例** 一元一次不等式  $2x+5>1$  的解為  $x > -2$ 。

**3 一元一次不等式的形式與圖示**

(1) $x \geq k$	表示包含 $k$ 和比 $k$ 大的數都是不等式的解。	
(2) $x \leq k$	表示包含 $k$ 和比 $k$ 小的數都是不等式的解。	
(3) $x > k$	表示所有比 $k$ 大的數都是不等式的解。	
(4) $x < k$	表示所有比 $k$ 小的數都是不等式的解。	

**例** 在數線上圖示  $x \geq -2$ 。



**P152****4-1 自我評量**

① 依題意列出各不等式：

課 P142、143 例 1、2

(1) 惠雯帶 300 元去買文具，共花了  $x$  元，而剩下的錢不超過 50 元。

則可列出不等式  $300-x \leq 50$ 。

(2) 超仁的身高是 160 公分，如果長高  $x$  公分後，就超過 180 公分。

則可列出不等式  $160+x > 180$ 。

② 臺北捷運自 2020 年 2 月 1 日起，實施常客優惠方案，針對每個月乘坐次數給予不同的回饋比例，方案如下：

課 P144 例 3

當月回饋金 = 前月累計搭乘金額 × 現金回饋比例

現金回饋比例如下表：

前月累計搭乘次數	現金回饋比例	前月累計搭乘次數	現金回饋比例
10 次以下 (含)	不回饋	31~40 次	20%
11~20 次	10%	41~50 次	25%
21~30 次	15%	51 次以上 (含)	30%

(1) 若安琪於 2020 年 12 月的乘坐次數為  $x$  次，且其現金回饋比例為 20%，則  $x$  在下列哪一個範圍？ (C)

(A)  $11 \leq x \leq 20$  (B)  $21 \leq x \leq 30$  (C)  $31 \leq x \leq 40$  (D)  $41 \leq x \leq 50$

(2) 若妙麗於 2020 年 11 月的乘坐次數為 16 次，累計金額為 500 元，則回饋金為多少？ (B)

(A) 40 元 (B) 50 元 (C) 60 元 (D) 100 元

乘坐次數為 16 次，則現金回饋比例為 10%，  
 $500 \times 10\% = 50$  (元)。

**P153**

3 下列哪一個是不等式  $5x-2 < 6$  的解？ (A)

課 P146 例 4

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

$x=1$  代入  $5x-2$ ，可得  $5 \times 1 - 2 = 3 < 6$

$x=2$  代入  $5x-2$ ，可得  $5 \times 2 - 2 = 8 > 6$  (不合)

$x=3$  代入  $5x-2$ ，可得  $5 \times 3 - 2 = 13 > 6$  (不合)

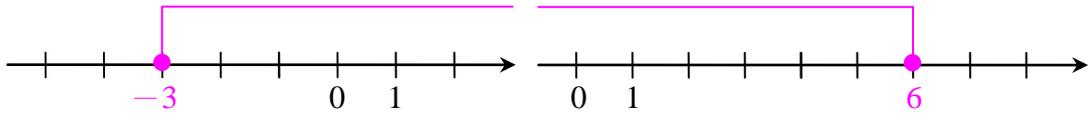
$x=4$  代入  $5x-2$ ，可得  $5 \times 4 - 2 = 18 > 6$  (不合)

4 在數線上圖示下列各不等式：

課 P148 例 5

(1)  $x > -3$

(2)  $x \leq 6$



5 在數線上圖示不等式  $-4 \leq x < 1$ 。

課 P150 例 6

