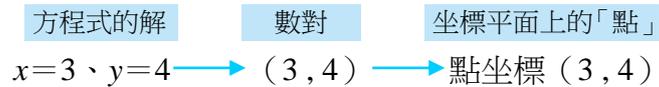


P70**2-2 二元一次方程式的圖形****1** $ax+by=c$ 的解轉換成圖形

對應能力指標 A-7-6

一個二元一次方程式的任意一組解，可以記錄成數對 (x, y) 的形式。例如： $x=3, y=4$ 是二元一次方程式 $x+3y=15$ 的一組解，習慣上會把 x 的值寫在前面， y 的值寫在後面，將這組解記成數對 $(3, 4)$ 。

$(3, 4)$ 在坐標平面上所對應的圖形就是一個點，這個點的 x 坐標是 3， y 坐標是 4。也就是說：

**例 1** 二元一次方程式的解與描點

自評 P90 第 1 題

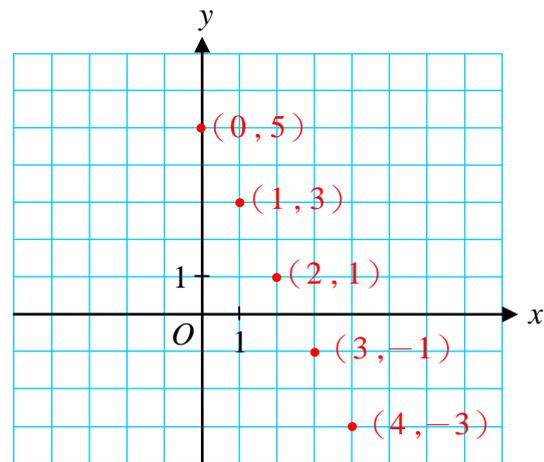
求出二元一次方程式 $2x+y=5$ 的任意五組解，並在坐標平面上標示出這五個點。

解

將 x 分別以 0、1、2、3、4 代入，求出對應的 y 值，如下表：

| | | | | | |
|-----|---|---|---|----|----|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 5 | 3 | 1 | -1 | -3 |

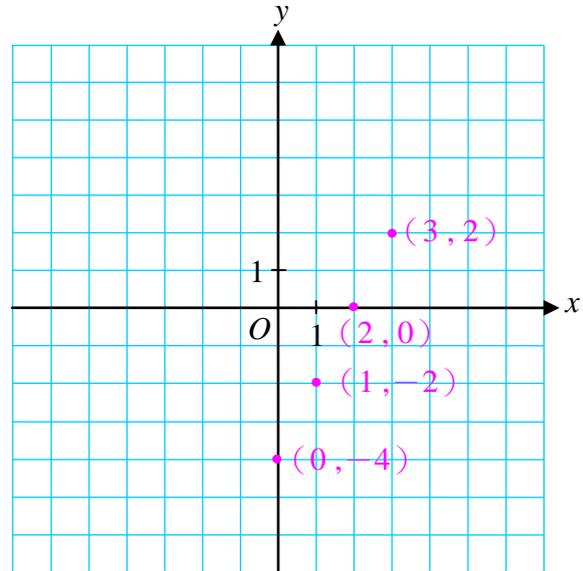
將上表的解 $(0, 5)$ 、 $(1, 3)$ 、 $(2, 1)$ 、 $(3, -1)$ 、 $(4, -3)$ 在坐標平面上標出，如圖所示。



P71**隨堂練習**

1. 下表中， x 與 y 的值都是二元一次方程式 $2x - y = 4$ 的解，完成下表，並將這些解寫成數對的型態，標示在坐標平面上。

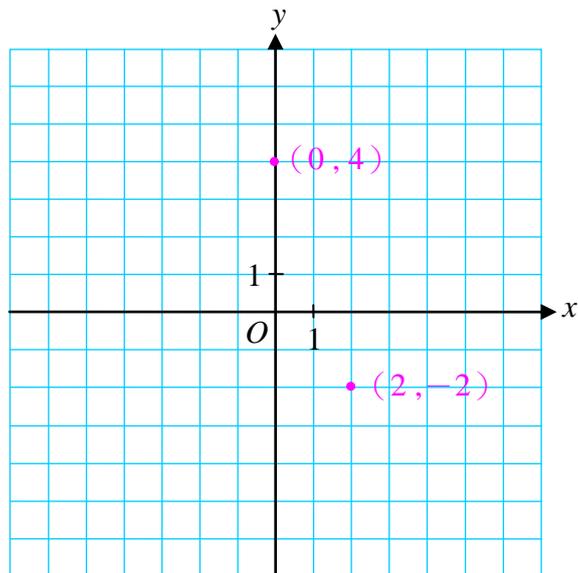
| | | | | |
|-----|----|---|----|---|
| x | 0 | 3 | 1 | 2 |
| y | -4 | 2 | -2 | 0 |



2. 下列哪些數對是二元一次方程式 $3x + y = 4$ 的解？並將這些數對標示在坐標平面上。

$(0, 4)$ 、 $(2, -2)$ 、 $(-2, 2)$

$(0, 4)$ 、 $(2, -2)$



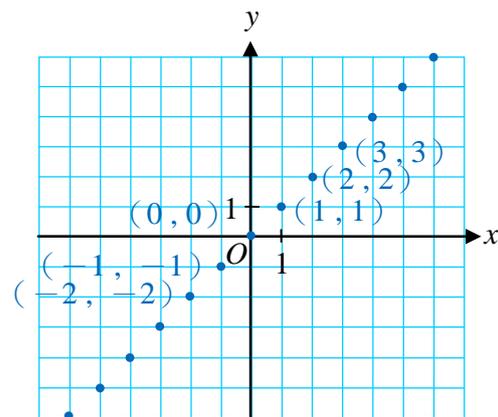
P72**2** $ax + by = c$ 的圖形

給定一個二元一次方程式，其全部的解皆可寫成數對 (x, y) 的形式，這些數對會對應到坐標平面上的點，這些點所形成的圖形，就稱為該方程式的圖形。

例如：下表中每一組 x 、 y 值都是二元一次方程式 $x - y = 0$ 的解。

| | | | | | | | | |
|-----|-------|----|----|---|---|---|---|-------|
| x | | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | |
| y | | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | |

把代表這些解的點標示在坐標平面上，如圖一。

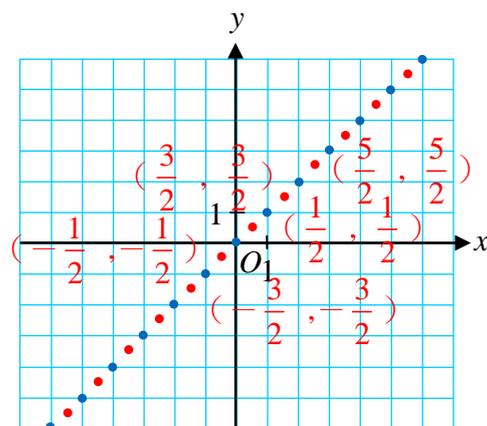


圖一

如果再找出二元一次方程式 $x - y = 0$ 的其他解，如下表：

| | | | | | | | |
|-----|-------|----------------|----------------|---------------|---------------|---------------|-------|
| x | | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | |
| y | | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $\frac{5}{2}$ | |

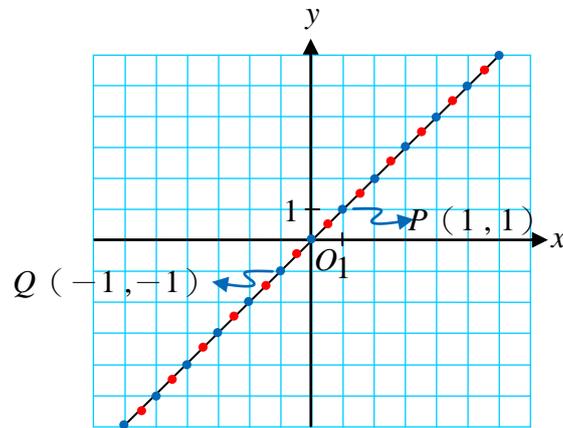
把代表這些解的點標示在坐標平面上，如圖二。



圖二

P73

畫出通過 $P(1, 1)$ 、 $Q(-1, -1)$ 兩點的直線，如圖三，此時可以發現所標示的點都落在 \overline{PQ} 上。



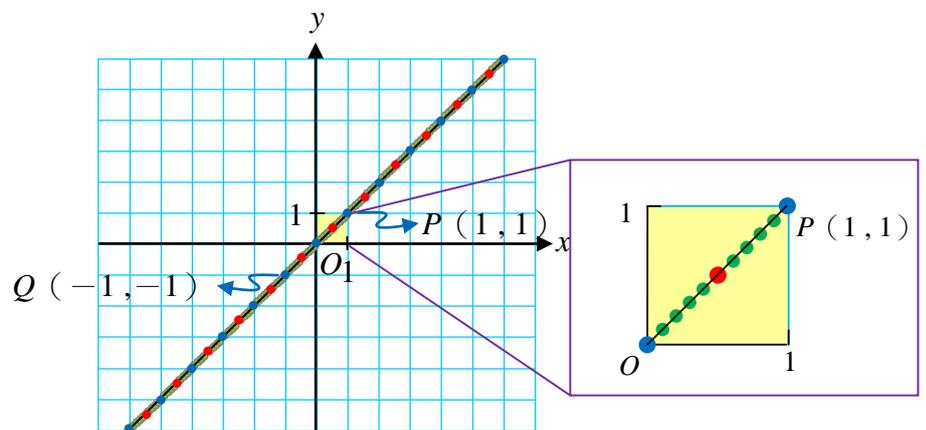
圖三

如果再找出二元一次方程式 $x-y=0$ 的其他解，如下表：

| | | | | | | |
|-----|-------|-----|-----|-----|-----|-------|
| x | | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | |
| y | | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | |

把代表這些解的點標示在坐標平面上，如圖四。

可觀察到這些點都位在同一條直線上。



圖四

圖四中， \overline{PQ} 為二元一次方程式 $x-y=0$ 的所有解在坐標平面上所成的圖形，就稱 \overline{PQ} 是二元一次方程式 $x-y=0$ 的圖形。

P74**例 2** 二元一次方程式的圖形

1. 找出二元一次方程式 $3x+2y=6$ 的任意五組解，並標示在坐標平面上。
2. 承 1.，通過任意兩點畫一條直線，觀察這些點是否都在這條直線上？

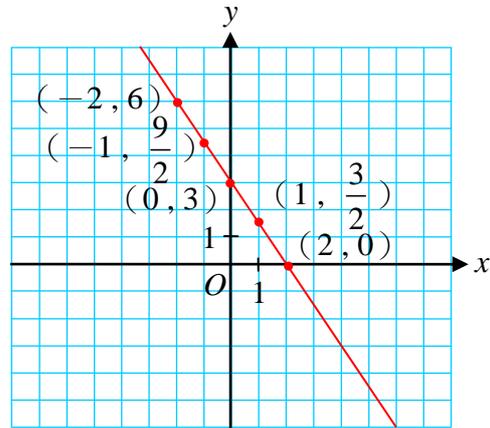
解

1. 將 x 分別以 -2 、 -1 、 0 、 1 、 2 代入，
求出對應的 y 值，如下表：

| | | | | | |
|-----|------|---------------|-----|---------------|-----|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | 6 | $\frac{9}{2}$ | 3 | $\frac{3}{2}$ | 0 |

將上述五個點標示在坐標平面上。

2. 連接 $(2, 0)$ 、 $(0, 3)$ 畫一條直線，
可以發現這些點都位在這條直線上。

**隨堂練習**

搭配習作 P26 基礎題 1、2

有四個數 a 、 b 、 c 、 d ，且 $(2, a)$ 、 $(-3, b)$ 、 $(c, 8)$ 、 $(d, -4)$ 這四點都在二元一次方程式 $2x - y = 4$ 的圖形上，求 a 、 b 、 c 、 d 這四個數的值。

$$4 - a = 4, a = 0$$

$$-6 - b = 4, b = -10$$

$$2c - 8 = 4, c = 6$$

$$2d + 4 = 4, d = 0$$

藉由坐標平面，我們將方程式轉換成了圖形，而由前面的說明可知：
 $x - y = 0$ 與 $3x + 2y = 6$ 的圖形都是一條直線。事實上，每個二元一次方程式 $ax + by = c$ 在坐標平面上的圖形都是一條直線，該直線上的任何一點都是原方程式的一組解。

【 $ax + by = c$ 的圖形】

設 a 、 b 、 c 為已知數， x 、 y 的二元一次方程式 $ax + by = c$ 的所有解，在坐標平面上的圖形是一條直線，此直線就是二元一次方程式 $ax + by = c$ 的圖形。

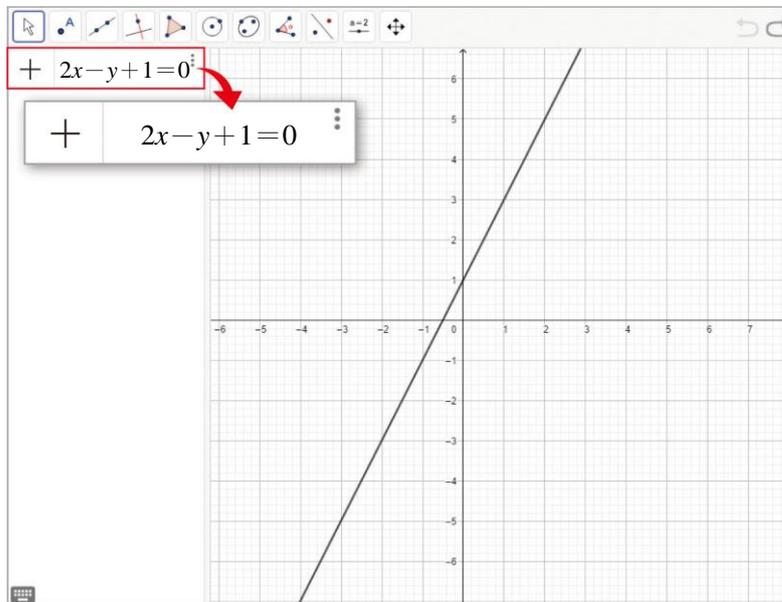
補給站 補給站利用 Geogebra 繪製二元一次方程式的圖形

GeoGebra 是一套結合平面幾何、立體幾何、代數、表格及計算機的動態數學軟體，由 Markus Hohenwarter 及一個國際程式設計團隊所共同開發，可以免費下載，目的在教導與學習數學課程。這套軟體可以畫出點、直線、圓與多邊形等圖形，也可以直接在直角坐標中輸入點坐標以及方程式而得到圖形。

利用 Geogebra6.0 可以繪製二元一次方程式的圖形，我們以 $2x - y + 1 = 0$ 為例，方法如下：

步驟 1： 開啟電腦 Geogebra 軟體，於左方代數區 $+$ 的欄位中，輸入 $2x - y + 1 = 0$ （或 $2 * x - y + 1 = 0$ 、 $y = 2x + 1$ 皆可）。

步驟 2： 按 ENTER，得到 $2x - y + 1 = 0$ 的圖形。



也可以試著輸入其他方程式，例如：
 $3x - 2y = 5$ 、
 $y = 5$ 、
 $x = 5 \dots$



藉由 Geogebra 可以發現，二元一次方程式 $ax + by = c$ 的圖形是一條直線。

因為相異兩點可以畫出唯一的一條直線，所以我們只需找出二元一次方程式的兩組解，將它們標示在坐標平面上，則通過此兩點所畫的直線即為原方程式的圖形。

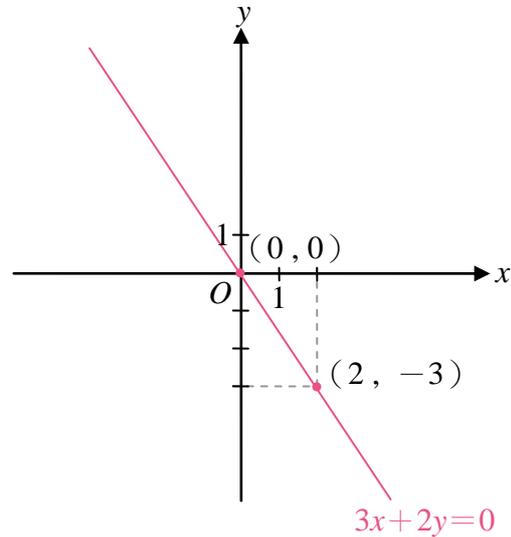
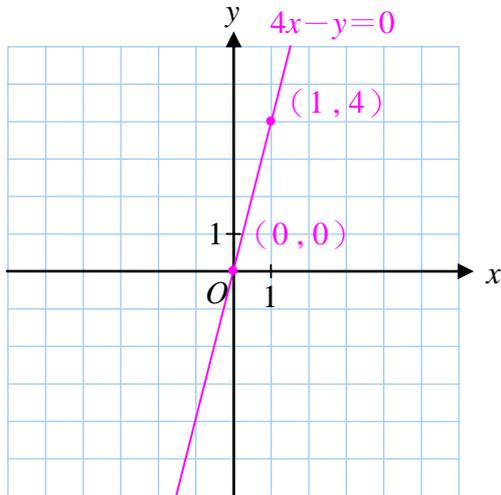
例如：選出二元一次方程式 $2x - y + 1 = 0$ 的兩組解所對應的點 $(1, 3)$ 與 $(2, 5)$ ，通過這兩點畫一直線，此直線即為方程式的圖形。

P76**例 3** 畫二元一次方程式的圖形（通過原點）

搭配習作 P26 基礎題 3(1)

在坐標平面上畫出二元一次方程式 $3x+2y=0$ 的圖形。**解****步驟 1：**先求出二元一次方程式 $3x+2y=0$ 的兩組解。

| | | |
|-----|---|----|
| x | 0 | 2 |
| y | 0 | -3 |

步驟 2：將這兩組解的點 $(0, 0)$ 與 $(2, -3)$ 標示在坐標平面上。**步驟 3：**畫出通過此兩點的直線。此直線即為二元一次方程式 $3x+2y=0$ 的圖形。**隨堂練習**在坐標平面上畫出二元一次方程式 $4x-y=0$ 的圖形。

| | | |
|-----|---|---|
| x | 0 | 1 |
| y | 0 | 4 |

【通過原點的直線】二元一次方程式 $ax+by=c$ 中，若 $c=0$ ，則圖形為通過原點的直線。

P77

例 4 畫二元一次方程式的圖形 **搭配習作 P26 基礎題 3(2)** 自評 P90 第 2 題 (1)、(2)

在坐標平面上畫出二元一次方程式 $3x - y = 6$ 的圖形。

解

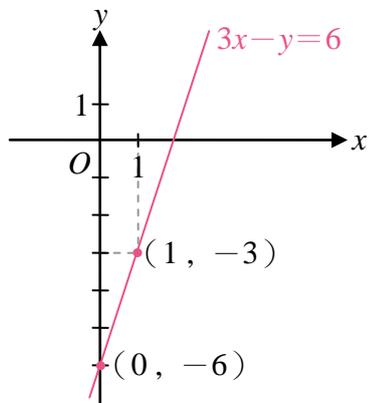
步驟 1: 先求出二元一次方程式 $3x - y = 6$ 的兩組解。

| | | |
|-----|----|----|
| x | 0 | 1 |
| y | -6 | -3 |

步驟 2: 將這兩組解的點 $(0, -6)$ 與 $(1, -3)$ 標示在坐標平面上。

步驟 3: 畫出通過此兩點的直線。

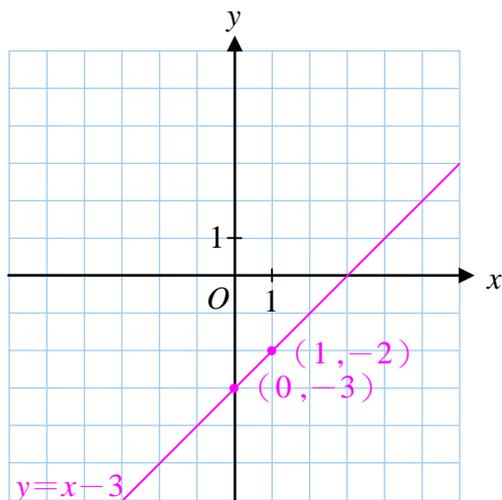
此直線即為二元一次方程式 $3x - y = 6$ 的圖形。



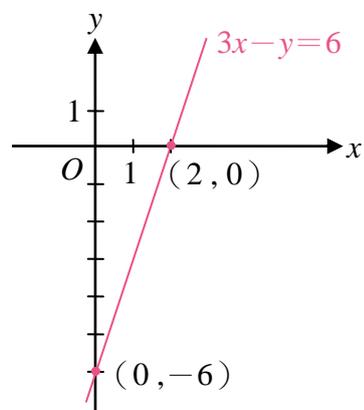
隨堂練習

在坐標平面上畫出二元一次方程式 $y = x - 3$ 的圖形。

| | | |
|-----|----|----|
| x | 0 | 1 |
| y | -3 | -2 |



右圖是**例 4**中 $3x - y = 6$ 的圖形與兩軸的交點，因為 **y 軸上任一點的 x 坐標為 0**，將 $x = 0$ 代入 $3x - y = 6$ ，可得 $y = -6$ ，所以此直線與 y 軸的交點坐標為 **$(0, -6)$** ；而 **x 軸上任一點的 y 坐標為 0**，將 $y = 0$ 代入 $3x - y = 6$ ，可得 $x = 2$ ，所以此直線與 x 軸的交點坐標為 **$(2, 0)$** 。



P78

由於找到任意兩組解即可畫出二元一次方程式的圖形，在畫二元一次方程式的圖形時，為了方便起見，一般都會先描出直線與兩軸的交點。

例 5 圖形與兩軸的交點

搭配習作 P26 基礎題 3(2) 自評 P91 第 3 題

寫出二元一次方程式 $3x - 4y = 12$ 與 x 軸、 y 軸的交點坐標，並在坐標平面上畫出此方程式的圖形。

解

因為 y 軸上任一點的 x 坐標為 0，將 $x=0$ 代入 $3x - 4y = 12$ ，可得 $y = -3$ ；

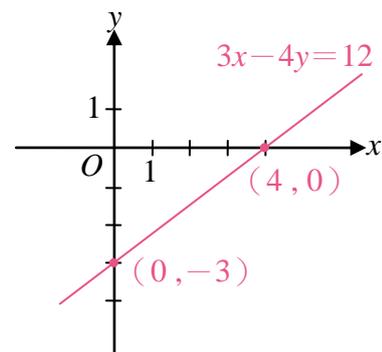
因為 x 軸上任一點的 y 坐標為 0，將 $y=0$ 代入 $3x - 4y = 12$ ，可得 $x = 4$ 。

| | | |
|-----|----|---|
| x | 0 | 4 |
| y | -3 | 0 |

所以此直線與 y 軸的交點坐標為 $(0, -3)$ ；

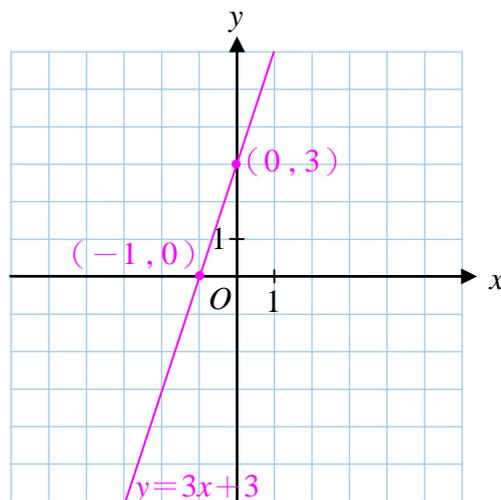
與 x 軸的交點坐標為 $(4, 0)$ 。

在坐標平面上標示這兩組解所代表的點，並畫出通過此兩點的直線，此直線即為二元一次方程式 $3x - 4y = 12$ 的圖形。

**隨堂練習**

在坐標平面上畫出二元一次方程式 $y = 3x + 3$ 的圖形，並在圖形上標示與 x 軸、 y 軸的交點坐標。

| | | |
|-----|---|----|
| x | 0 | -1 |
| y | 3 | 0 |



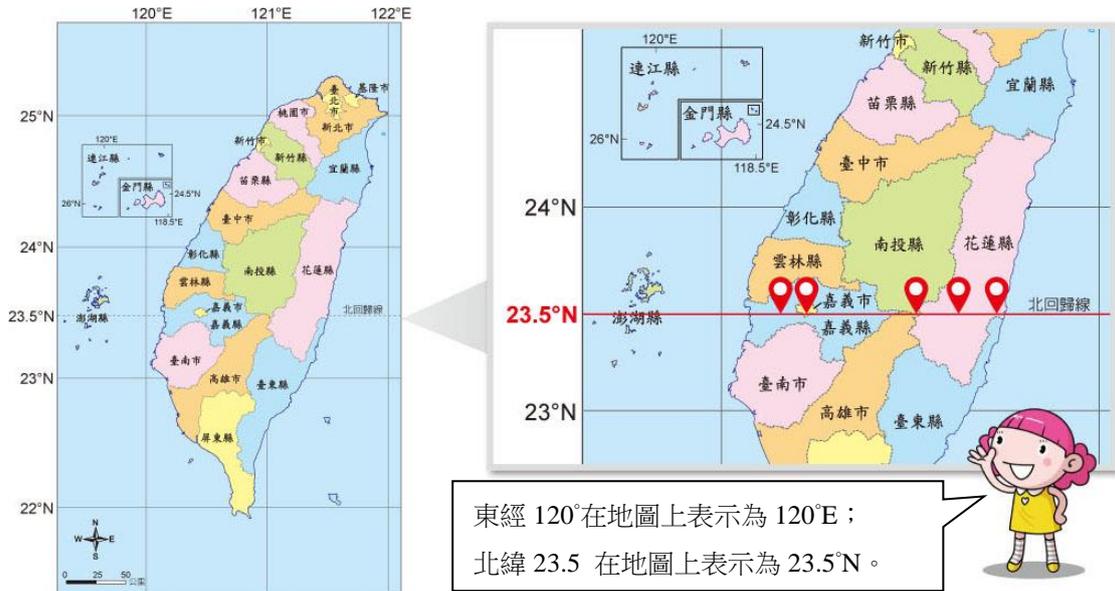
3 $y=k$ 的圖形

對應能力指標 A-7-6



在內政部地籍圖資便民服務系統中，輸入（經度，緯度）就可以出現臺灣每一個地區的位置，經度以東經為正，緯度以北緯為正。例如：輸入 121.5641（東經）、25.0343（北緯）就會出現臺北 101 大樓的地理位置。

下圖是標示臺灣經緯度的地圖，從地圖可知北回歸線（北緯 23.5°）通過嘉義縣、嘉義市、南投縣、花蓮縣。



而通過這些地點的經度與緯度如下表：

| | | | | | | | |
|----------|-------|------------|-----------|------------|------------|------------|-------|
| x (經度) | | 120.3 | 120.45 | 120.8 | 121.35 | 121.5 | |
| y (緯度) | | 23.5 | 23.5 | 23.5 | 23.5 | 23.5 | |
| 地點 | | 嘉義縣 六腳鄉 | 嘉義市 東區 | 南投縣 信義鄉 | 花蓮縣 瑞穗鄉 | 花蓮縣 豐濱鄉 | |

從表中可以發現，北回歸線通過的這些點，不論 x 坐標是什麼， y 坐標都是 23.5。

那麼在坐標平面上，要怎麼用方程式來描述這條北回歸線呢？我們先來介紹某些特殊方程式的圖形。

在坐標平面上畫 $y=k$ 的圖形時， $y=k$ 是二元一次方程式 $0x+y=k$ 的簡化，所以不論 x 為何數， y 都是 k 。我們來看看如何畫 $y=k$ 的圖形。

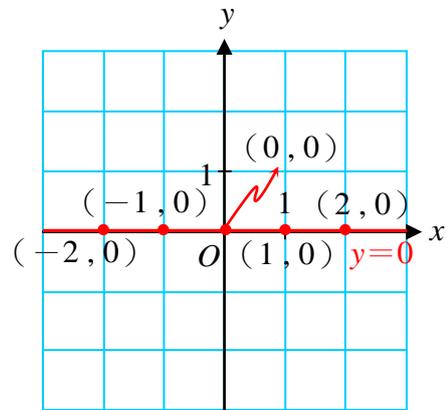
► $y=0$ 的圖形

將 $y=0$ 看成 $0x+y=0$ 時，列出方程式 $0x+y=0$ 的一些解，如下表：

| | | | | | |
|-----|----|----|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

在坐標平面上標示這些解所代表的點。

事實上， y 坐標為 0 的點都在 x 軸上，所以 $y=0$ 的圖形就是 x 軸，如圖一。



圖一

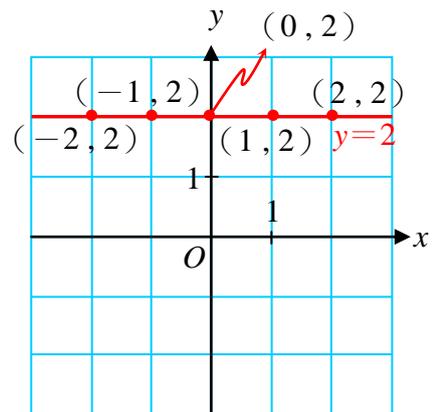
► $y=k$ ($k \neq 0$) 的圖形

將 $y=2$ 看成 $0x+y=2$ 時，列出方程式 $0x+y=2$ 的一些解，如下表：

| | | | | | |
|-----|----|----|---|---|---|
| x | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
| y | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 |

在坐標平面上標示這些解所代表的點。

事實上， y 坐標為 2 的點所形成的直線就是 $y=2$ 的圖形，它是一條與 x 軸平行的水平線，也就是通過 $(0, 2)$ 與 y 軸垂直的直線，如圖二。



圖二

【垂直 y 軸的水平線 ($y=k$ 的圖形)】

1. 當 $k=0$ 時， $y=0$ 的圖形就是 x 軸。
2. 當 $k \neq 0$ 時， $y=k$ 的圖形都是與 x 軸平行的水平線，也就是通過 $(0, k)$ 且垂直 y 軸的水平線。

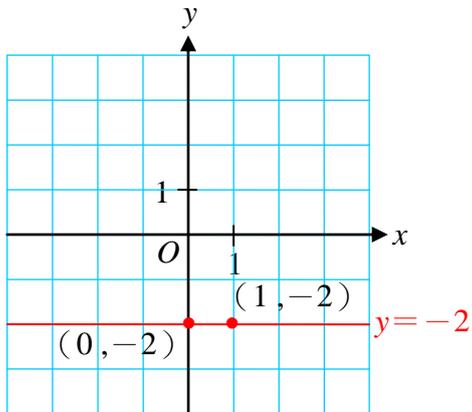
P81**例 6** 垂直 y 軸的直線

搭配習作 P27 基礎題 4 自評 P90 第 2 題 (3)

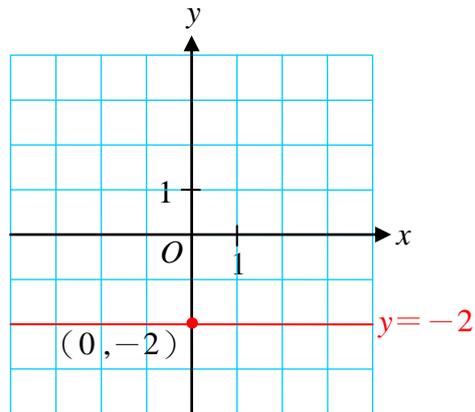
在坐標平面上畫出方程式 $y = -2$ 的圖形。**解一**將 $y = -2$ 視為 $0x + y = -2$ ，

任取兩組解。

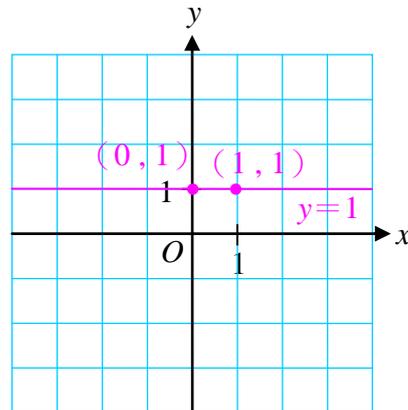
| | | |
|-----|----|----|
| x | 0 | 1 |
| y | -2 | -2 |

過 $(0, -2)$ 與 $(1, -2)$ 畫一直線，
則直線為 $y = -2$ 的圖形。**解二**在 y 軸上坐標是 -2 的位置，畫一條與 y 軸垂直的直線，

如下圖所示。

**隨堂練習**在坐標平面上畫出方程式 $y = 1$ 的圖形。

| | | |
|-----|---|---|
| x | 0 | 1 |
| y | 1 | 1 |



P82**4 $x=h$ 的圖形**

對應能力指標 A-7-6

在坐標平面上畫 $x=h$ 的圖形時， $x=h$ 是二元一次方程式 $x+0y=h$ 的簡化，所以不論 y 為何數， x 都是 h 。我們來看看如何畫 $x=h$ 的圖形。

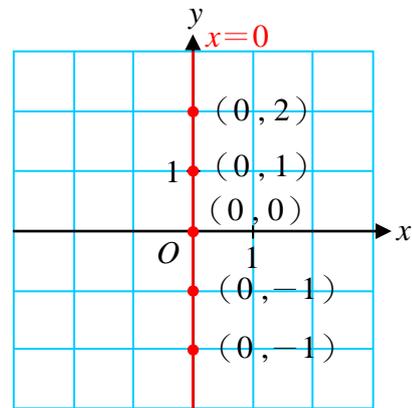
▶ $x=0$ 的圖形

將 $x=0$ 看成 $x+0y=0$ ，列出方程式 $x+0y=0$ 的一些解，如下表：

| | | | | | |
|-----|----|----|---|---|---|
| x | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| y | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |

在坐標平面上標示這些解所代表的點。

事實上， x 坐標為 0 的點都在 y 軸上，所以 $x=0$ 的圖形就是 y 軸，如圖一。



圖一

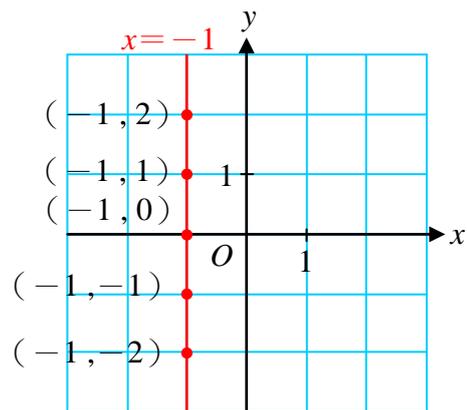
▶ $x=h$ ($h \neq 0$) 的圖形

將 $x=-1$ 看成 $x+0y=-1$ ，列出方程式 $x+0y=-1$ 的解。

| | | | | | |
|-----|----|----|----|----|----|
| x | -1 | -1 | -1 | -1 | -1 |
| y | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |

在坐標平面上標示這些解所代表的點。

事實上， x 坐標為 -1 的點所形成的直線就是 $x=-1$ 的圖形，它是一條與 y 軸平行的鉛垂線，也就是通過 $(-1, 0)$ 與 x 軸垂直的直線，如圖二。



圖二

【垂直 x 軸的鉛垂線 ($x=h$ 的圖形)】

1. 當 $h=0$ 時， $x=0$ 的圖形就是 y 軸。
2. 當 $h \neq 0$ 時， $x=h$ 的圖形都是與 y 軸平行的鉛垂線，也就是通過 $(h, 0)$ 且垂直 x 軸的鉛垂線。

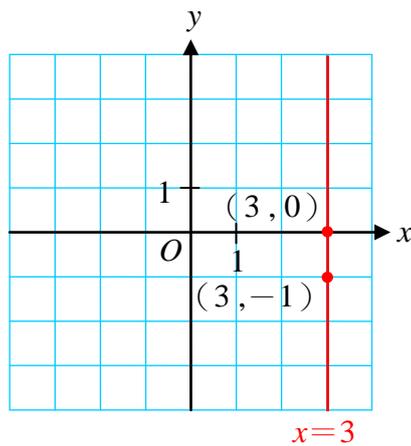
P83**例 7** 垂直 x 軸的直線

搭配習作 P27 基礎題 4 自評 P90 第 2 題 (4)

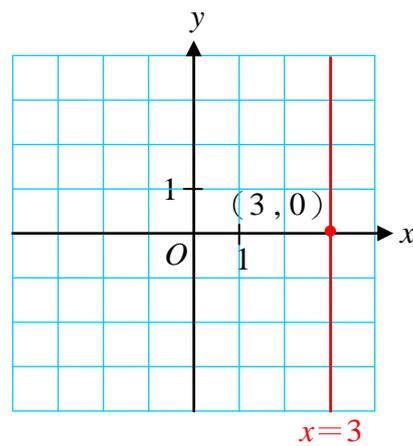
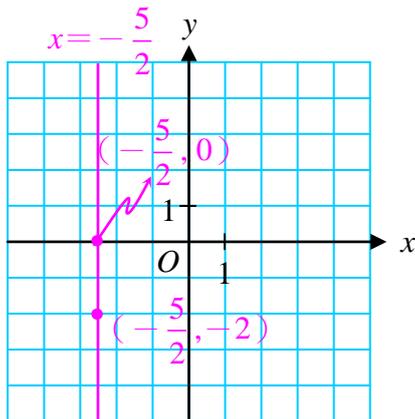
在坐標平面上畫出方程式 $x=3$ 的圖形。**解一**將 $x=3$ 視為 $x+0y=3$ ，任取兩組解。

| | | |
|-----|---|----|
| x | 3 | 3 |
| y | 0 | -1 |

過 $(3, 0)$ 與 $(3, -1)$ 畫一直線，
則直線為 $x=3$ 的圖形。

**解二**

在 x 軸上坐標是 3 的位置，
畫一條與 x 軸垂直的直線，
如下圖所示。

**隨堂練習**在坐標平面上畫出方程式 $x = -\frac{5}{2}$ 的圖形。

| | | |
|-----|----------------|----------------|
| x | $-\frac{5}{2}$ | $-\frac{5}{2}$ |
| y | 0 | -2 |

P84**5** 求二元一次方程式

對應能力指標 A-7-6

由前面的討論可知，如果我們觀察到的圖形是鉛垂線或水平線，該如何求出它所對應的方程式呢？

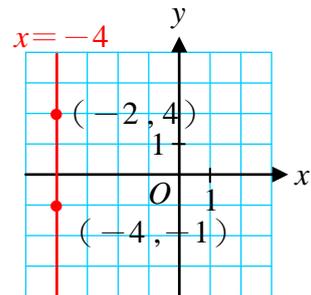
例 8 鉛垂線與水平線的方程式

搭配習作 P27、28 基礎題 5、7(2)

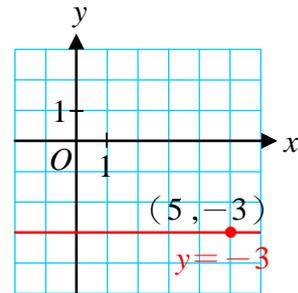
1. 哪個方程式的圖形是同時通過 $A(-4, -1)$ 、 $B(-4, 2)$ 兩點的鉛垂線？
2. 哪個方程式的圖形通過點 $C(5, -3)$ ，而且是平行 x 軸的水平線？

解

1. 通過 $A(-4, -1)$ 、 $B(-4, 2)$ 兩點畫一直線，
發現圖形為垂直 x 軸的鉛垂線，
直線上所有點的 x 坐標都是 -4 ，
因此這條直線所對應的方程式為 $x = -4$ 。



2. 通過點 $C(5, -3)$ ，畫一直線平行 x 軸，
發現直線上所有點的 y 坐標都是 -3 ，
因此這條直線所對應的方程式為 $y = -3$ 。

**隨堂練習**

1. 哪個方程式的圖形是同時通過 $A(3, -4)$ 、 $B(5, -4)$ 兩點的水平線？
通過 $A(3, -4)$ 、 $B(5, -4)$ 兩點畫一直線，
發現圖形為垂直 y 軸的水平線，直線上所有點的 y 坐標都是 -4 ，
因此這條直線所對應的方程式為 $y = -4$ 。
2. 哪個方程式的圖形通過點 $C(6, -2)$ ，而且是平行 y 軸的鉛垂線？
通過點 $C(6, -2)$ ，畫一直線平行 y 軸，
發現直線上所有點的 x 坐標都是 6 ，
因此這條直線所對應的方程式為 $x = 6$ 。

P85

如果觀察到的圖形不是鉛垂線或水平線時，又該如何求出它對應的方程式呢？

因為二元一次方程式 $ax+by=c$ 在坐標平面上的圖形是一條直線，此二元一次方程式的任何一組解都會在該直線上，所以可以利用直線通過的點求二元一次方程式。

搭配習作 P28 基礎題 7(1)

自評 P91 第 4 題

例 9 求過已知兩點的二元一次方程式

已知二元一次方程式 $ax+by=1$ 的圖形為通過 $P(3,5)$ 、 $Q(1,1)$ 兩點的直線，求此方程式。

解

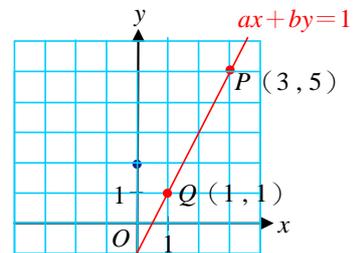
將 $(3,5)$ 、 $(1,1)$ 分別代入 $ax+by=1$

$$\text{得} \begin{cases} 3a+5b=1 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a+b=1 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

由①式-②式 $\times 3$ 得 $2b=-2$ ，則 $b=-1$

將 $b=-1$ 代入②式得 $a=2$

故可得二元一次方程式為 $2x-y=1$ 。



在**例 9**中， $2x-y=1$ 也可以表示成 $y=2x-1$ 或 $x=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$ ，即 $y=ax+b$ 或

$x=ay+b$ 等形式的圖形也是一條直線。因此，也可以用**例 9**的方法求出這些形式的二元一次方程式。

隨堂練習

自評 P91 第 5 題

1. 已知二元一次方程式 $x=ay+6$ 的圖形為通過點 $(2,1)$ 的直線，求 a 的值與此方程式。

$2=a+6$ ， $a=-4$ ，此方程式為 $x=-4y+6$ 。

2. 已知二元一次方程式 $y=ax+b$ 的圖形為通過 $A(2,-5)$ 、 $B(1,-2)$ 兩點的直線，求 a 、 b 的值與此方程式。

將 $(2,-5)$ 、 $(1,-2)$ 分別代入 $y=ax+b$

$$\text{得} \begin{cases} -5=2a+b \\ -2=a+b \end{cases}$$

解得 $a=-3$ 、 $b=1$ ，

可得方程式為 $y=-3x+1$ 。

上一章已經學過二元一次聯立方程式，例如： $\begin{cases} x-y=1 \\ x+2y=4 \end{cases}$ ，其中包含兩個二元一次方程式 $x-y=1$ 與 $x+2y=4$ ，因此在坐標平面上，可以分別畫出它們的圖形：

(1) 找出 $x-y=1$ 的兩組解：

| | | |
|-----|----|---|
| x | 0 | 1 |
| y | -1 | 0 |

則 $x-y=1$ 的圖形是通過

$A(0, -1)$ 、 $B(1, 0)$

兩點的直線 L_1 。(如下圖)

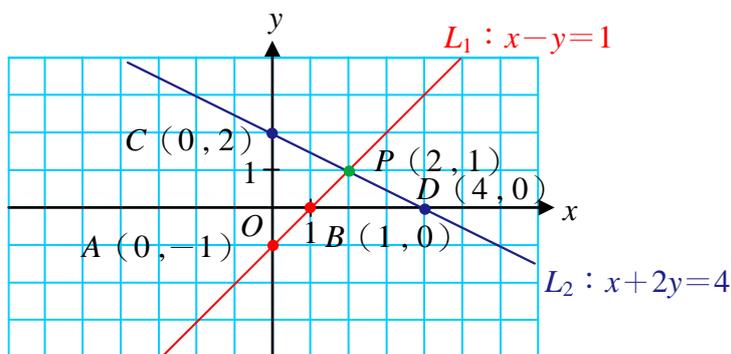
(1) 找出 $x+2y=4$ 的兩組解：

| | | |
|-----|---|---|
| x | 0 | 4 |
| y | 2 | 0 |

則 $x+2y=4$ 的圖形是通過

$C(0, 2)$ 、 $D(4, 0)$

兩點的直線 L_2 。(如下圖)



由上圖可以發現，直線 L_1 與 L_2 交於一點 $P(2, 1)$ 。

因為 $P(2, 1)$ 在直線 L_1 上，所以 $x=2$ 、 $y=1$ 是方程式 $x-y=1$ 的解，又 $P(2, 1)$ 也在直線 L_2 上，所以 $x=2$ 、 $y=1$ 也是方程式 $x+2y=4$ 的解，所以直線 L_1 與 L_2 的交點 $P(2, 1)$ 為此二元一次聯立方程式的解。

【二元一次聯立方程式的圖形與其解】

兩條直線交於一點時，其交點坐標就是二元一次聯立方程式的解；而二元一次聯立方程式的解，就是這兩個方程式所代表的兩條直線在坐標平面上的交點。

P87

搭配習作 P27、28 基礎題 6、7(3)

自評 P91 第 6 題

例 10 兩個二元一次方程式的交點坐標

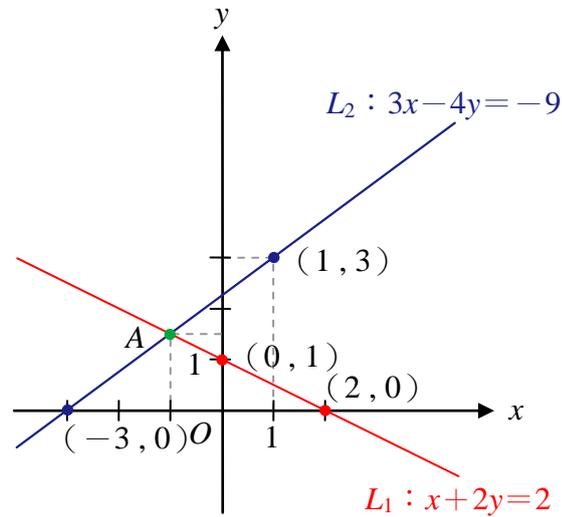
在坐標平面上分別畫出二元一次方程式 $x+2y=2$ 與 $3x-4y=-9$ 的圖形。假設此兩條直線相交於一點 A ，求出 A 點的坐標。

解(1) 先找出方程式 $x+2y=2$ 的兩組解

| | | |
|-----|---|---|
| x | 0 | 2 |
| y | 1 | 0 |

再找出 $3x-4y=-9$ 的兩組解

| | | |
|-----|---|----|
| x | 1 | -3 |
| y | 3 | 0 |



即直線 L_1 、 L_2 分別是二元一次方程式 $x+2y=2$ 與 $3x-4y=-9$ 的圖形。

(2) 解聯立方程式 $\begin{cases} x+2y=2 & \cdots\cdots\cdots\text{①} \\ 3x-4y=-9 & \cdots\cdots\cdots\text{②} \end{cases}$

由①式 $\times 2 +$ ②式得

$$5x = -5$$

$$x = -1$$

將 $x = -1$ 代入①式得

$$-1 + 2y = 2$$

$$y = \frac{3}{2}$$

所以兩條直線的交點坐標為 $A(-1, \frac{3}{2})$ 。

二元一次聯立方程式的解就是兩條直線的交點坐標。



P88**隨堂練習**

1. 在坐標平面上，二元一次方程式 $2x+y=-2$ 與 $x+2y=5$ 的圖形交於一點 P ，畫出這兩個二元一次方程式的圖形，並求出 P 點的坐標。

$$2x+y=-2$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & -1 \\ \hline y & -2 & 0 \end{array}$$

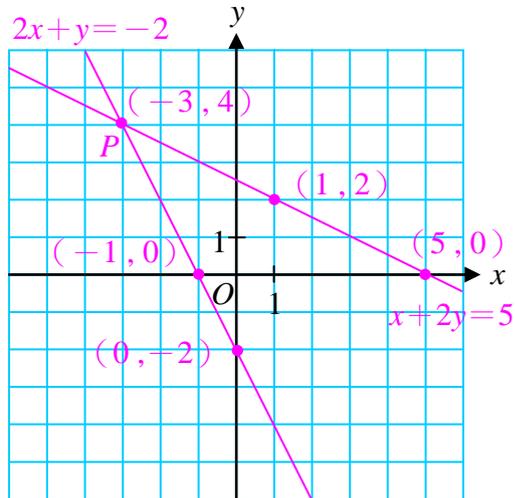
$$x+2y=5$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 5 & 1 \\ \hline y & 0 & 2 \end{array}$$

$$\text{由} \begin{cases} 2x+y=-2 \\ x+2y=5 \end{cases}$$

解得 $x=-3$ 、 $y=4$ ，

所以 $P(-3, 4)$ 。



2. 在坐標平面上，二元一次方程式 $2x+3y=5$ 與 $x-6y=0$ 的圖形交於一點 A ，求 A 點的坐標。

$$\text{解聯立方程式} \begin{cases} 2x+3y=5 \dots\dots ① \\ x-6y=0 \dots\dots ② \end{cases}$$

$$\text{由} ① \text{式} - ② \text{式} \times 2 \text{ 得 } 15y=5, y=\frac{1}{3}$$

$$\text{將 } y=\frac{1}{3} \text{ 代入 } ② \text{ 式得 } x-6 \times \frac{1}{3}=0, x=2$$

所以交點坐標為 $A(2, \frac{1}{3})$ 。

2-2 重點回顧

❶ 二元一次方程式的圖形與畫法

- (1) 一個二元一次方程式的任意一組解，可以記錄成數對的形式，此時這一組解在坐標平面上的圖形就是一個點。
- (2) 二元一次方程式的圖形都是一條直線。
- (3) 畫出二元一次方程式圖形的方法，須先找出此二元一次方程式中，兩組不同的解，然後在坐標平面上標示出此兩點，並畫一條直線通過這兩點，即為此方程式的圖形。

❷ 二元一次方程式 $ax+by=c$ 的圖形

| | | | |
|----|----------------------|-------------------|-------------------|
| 條件 | $a \neq 0, b \neq 0$ | $a = 0, b \neq 0$ | $a \neq 0, b = 0$ |
| 圖形 | 不垂直兩軸的直線 | 垂直 y 軸的直線 | 垂直 x 軸的直線 |
| 例 | $2x - y = 4$ | $y = 5$ | $x = 3$ |

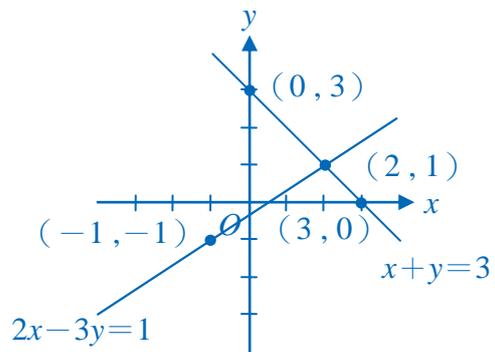
❸ 二元一次聯立方程式的圖形與其解

二元一次聯立方程式的解就是這兩個方程式圖形的交點坐標；兩條直線的交點坐標就是這兩條直線所代表的兩個方程式的共同解。

例 二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-3y=1 \end{cases}$ 的解為 $x=2, y=1$ ，所以此聯立方程式圖形的交點坐標為 $(2, 1)$ 。

| | | |
|-----|---|---|
| x | 0 | 3 |
| y | 3 | 0 |

| | | |
|-----|---|----|
| x | 2 | -1 |
| y | 1 | -1 |



哪一種「點」最不清楚？

P90**2-2 自我評量**

課 P70 例 1

① 在坐標平面上，下列哪些點在二元一次方程式 $3x+y=-4$ 的圖形上？

$$(2, -2) \cdot (-1, -1) \cdot \left(\frac{2}{3}, -6\right) \cdot (0, -4)$$

$$(-1, -1) \cdot \left(\frac{2}{3}, -6\right) \cdot (0, -4)$$

② 在坐標平面上畫出下列各二元一次方程式的圖形：

(1) $y=3x-1$

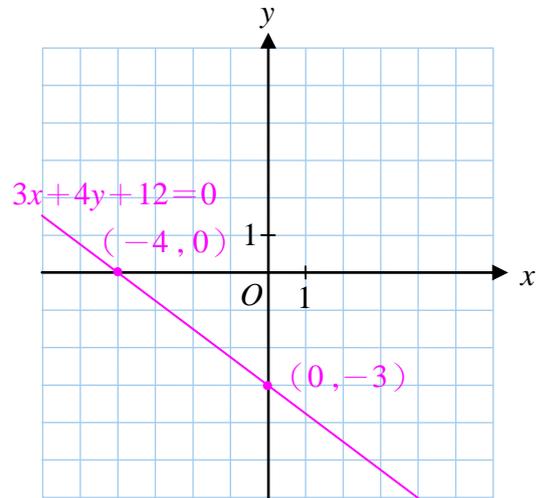
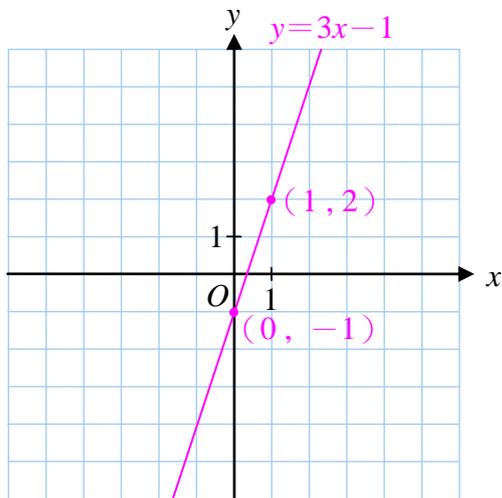
課 P77 例 4

(2) $3x+4y+12=0$

課 P77 例 4

| | | |
|-----|------|-----|
| x | 0 | 1 |
| y | -1 | 2 |

| | | |
|-----|------|------|
| x | 0 | -4 |
| y | -3 | 0 |



(3) $y=3$

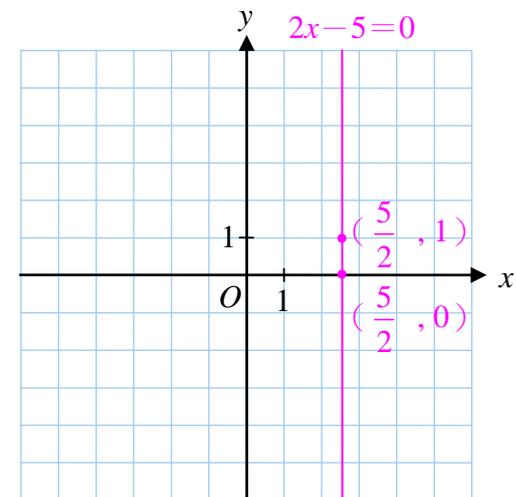
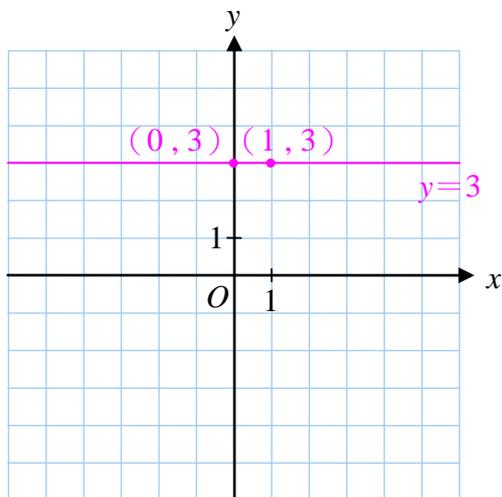
課 P81 例 6

(4) $2x-5=0$

課 P83 例 7

| | | |
|-----|-----|-----|
| x | 0 | 1 |
| y | 3 | 3 |

| | | |
|-----|---------------|---------------|
| x | $\frac{5}{2}$ | $\frac{5}{2}$ |
| y | 1 | 0 |



P91

- ③ 二元一次方程式 $y=4x-8$ 的圖形與 x 軸交於 P 點，與 y 軸交於 Q 點，求 P 、 Q 兩點的坐標。
課 P78 例 5

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 2 \\ \hline y & -8 & 0 \end{array}$$

所以與 x 軸交於 $P(2, 0)$ ，
與 y 軸交於 $Q(0, -8)$ 。

答： $P(2, 0)$ 、 $Q(0, -8)$ 。

課 P85 例 9

- ④ 已知方程式 $ax+by=2$ 的圖形為通過 $P(1, 1)$ 、 $Q(4, -2)$ 兩點的直線，求：
(1) a 、 b 之值。
(2) 此二元一次方程式。

(1) 將 $(1, 1)$ 、 $(4, -2)$ 分別代入 $ax+by=2$ ，得 $\begin{cases} a+b=2 \\ 4a-2b=2 \end{cases}$

解得 $a=1$ 、 $b=1$ 。

(2) 此二元一次方程式為 $x+y=2$ 。

答： $(1) a=1$ 、 $b=1$ ， $(2) x+y=2$ 。

- ⑤ 已知方程式 $y=ax+3$ 和 $x=by+4$ 的圖形皆為通過點 $(2, -1)$ 的直線，求出 a 、 b 之值。
課 P85 隨堂

$$-1=2a+3, a=-2。$$

$$2=-b+4, b=2。$$

答： $a=-2$ 、 $b=2$ 。

- ⑥ 在坐標平面上分別畫出二元一次方程式 $3x+y=-7$ 與 $-2x+y=3$ 的圖形，並求出此兩條直線的交點坐標。
課 P87 例 10

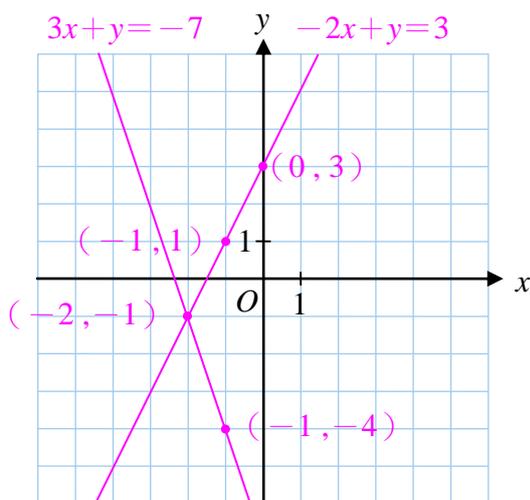
$$\begin{array}{c|c|c} 3x+y=-7 \\ x & -1 & -2 \\ \hline y & -4 & -1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} -2x+y=3 \\ x & 0 & -1 \\ \hline y & 3 & 1 \end{array}$$

$$\text{由 } \begin{cases} 3x+y=-7 \\ -2x+y=3 \end{cases}$$

解得 $x=-2$ 、 $y=-1$ ，

所以交點坐標為 $(-2, -1)$ 。



答： $(-2, -1)$ 。

解答：交點（模糊焦點）。

自我挑戰 本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師視班級情況決定如何運用。

 社會

臺灣的電線桿或配電箱，大多標有由英文字母和數字組成的雙排編號，共 9 碼或 11 碼，此編號為「電力坐標」，其中坐標中的英文字母和數字是根據固定的規則編碼，例如：圖一中的電力坐標是 ，第一排第一個英文字母 Q 代表分區坐標區塊，對照圖二即可大概知道位於臺灣的哪個位置。

圖二中，台灣電力公司將臺灣本島分成 22 個字母區塊，每一個字母矩形區塊，東西長 80 公里，南北長 50 公里，並依電力坐標定出直角坐標。



圖一



圖二

如果有不小心受困的民眾不曉得自己的所在位置，只要向救難單位報出電力坐標，救難人員就可依電力坐標確認位置！



- (D) (1) 圖一中電線桿上的編號對照圖二可知，其位置在下列何處的可能性最高？ (A)雲林縣 (B)南投縣 (C)嘉義縣 (D)屏東縣

Q 區的範圍包含臺南市、高雄市、屏東縣和臺東縣，
所以圖一的位置在屏東縣的可能性最高，故選(D)。

- (2) 若圖二中，甲點在 K 區左上角，台電所定的直角坐標為 (170, 2650)；乙點在 K 區右上角，台電所定的直角坐標為 (250, 2650)，單位為公里，試求 R 區塊左下角丙點的坐標。

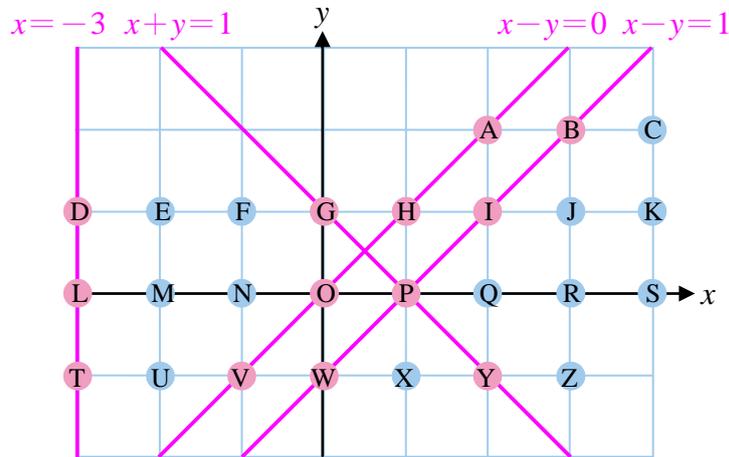
解

由乙 (250, 2650) 往下移動 $50 \times 3 = 150$ (公里)，
即可到達丙 (250, 2500)。

答：丙 (250, 2500)。

本單元為配合此章所設計的趣味問題，由學生自行練習，教師可視班級情況而自行決定如何運用。

在這張英文字母坐標中，每個字母都有其代表的坐標，例如：「X」的坐標為 $(1, -1)$ 。



① 配合 2-1

利用英文字母坐標，依序將甲、乙、丙的英文單字及所對應的坐標填入空格中。

| | | | | | | |
|---|-----------|-----------|-----------|----------|-----------|-----------|
| | 乙 | C | | 丙 | B | |
| | | $(4, 2)$ | | | $(3, 2)$ | |
| 甲 | M | O | N | K | E | Y |
| | $(-2, 0)$ | $(0, 0)$ | $(-1, 0)$ | $(4, 1)$ | $(-2, 1)$ | $(2, -1)$ |
| | | W | | | A | |
| | | $(0, -1)$ | | | $(2, 2)$ | |
| | | | | | R | |
| | | | | | $(3, 0)$ | |



(MONKEY)



(COW) 乙
(BEAR) 丙

② 配合 2-2

在上面的英文字母坐標系中：

- (1) 分別畫出二元一次方程式 $x - y = 0$ 、 $x - y = 1$ 、 $x + y = 1$ 、 $x = -3$ 的圖形。
- (2) 列出這四條直線所通過的字母：

A、B、D、G、H、I、L、O、P、T、V、W、Y

- (3) 在這些字母中任意拼成 3 個有意義的單字（字母可重複），寫出其中文的意義，並依序寫出單字中字母所在的坐標。

範例 GOOD：好， $(0, 1)$ $(0, 0)$ $(0, 0)$ $(-3, 1)$ 。

【參考答案】 DOG：狗， $(-3, 1)$ $(0, 0)$ $(0, 1)$

BOY：男孩， $(3, 2)$ $(0, 0)$ $(2, -1)$

PIG：豬， $(1, 0)$ $(2, 1)$ $(0, 1)$

數學 FUN 手玩—轟炸寶果

本章中，我們學習了許多關於直角坐標與方程式圖形的內容，除了課堂上的練習，我們也可透過有趣的寶果遊戲，更熟悉坐標的表示法喔！趕緊拿出附件 2-1~2-3，並找到你的好夥伴，一起切磋吧！



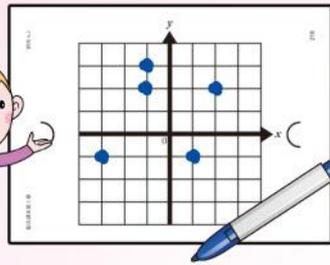
遊戲示範教學

遊戲說明

3~4 人一組

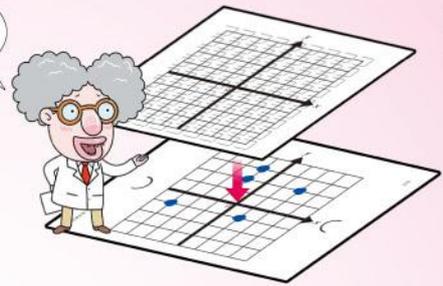
1 標記 每位玩家在自己的坐標板（附件 2-2）上畫記 5 個寶石標記，並發附件 2-3 的 5 張寶石卡（一人一種顏色）

4 種顏色對應
4 個玩家



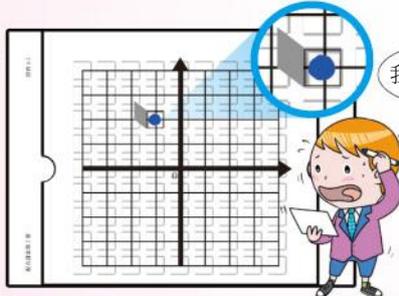
2 組合 將附件 2-1 和附件 2-2 扣合，避免其他玩家看到畫記的位置。

誰都不可以偷看喔！



3 引爆 輪到的玩家須報出坐標，且所有玩家須翻開自己對應的坐標板。※喊的坐標不得重複。

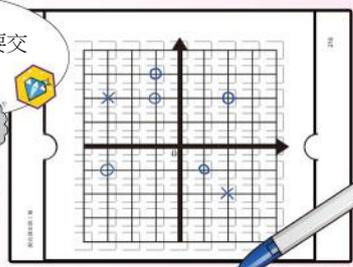
輪到我轟炸你囉～
坐標是 $(-1, 2)$



我被炸了！

4 記號 玩家可在坐標板上層做記號，炸到寶石位置的畫○，沒中的畫×。喊到寶石標記須繳出寶石卡。

被轟炸到，就要交出自己的寶石！



5 結束 當有玩家所設的寶石卡全部繳出，即為出局，且遊戲結束。剩餘玩家結算獲得的寶石卡，擁有最多寶石者即為贏家喔！

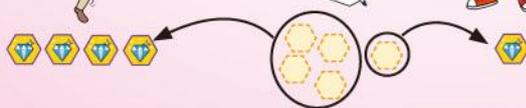
你的寶石全數繳出了！



咦？我輸了嗎？



？遊戲結束！



| 結算分數 | | |
|--------|----|--|
| Winner | 出局 | |
| | | |
| | | |
| | | |
| | | |