1-2 解二元一次聯立方程式

1 二元一次聯立方程式及其解的意義

對應能力指標 A-7-4

搭配習作 P9 基礎題 1　自評 P36 第 1 題

根據一個問題的敘述，有時可同時列出兩個二元一次方程式，例如：

如果 10 元硬幣有 x 枚，5 元硬幣有 y 枚，兩種硬幣共 20 枚，合計是 140 元，則兩種硬幣各有多少枚？

由「**兩種硬幣共 20 枚**」，可列得方程式 $x+y=20$；

由「**合計是 140 元**」，可列得方程式 $10x+5y=140$。

這兩個二元一次方程式，同時用來表示問題中的數量關係，因此將這兩個方程式並列寫成 $\begin{cases} x+y=20 \\ 10x+5y=140 \end{cases}$。像這樣並列在一起的二元一次方程式，稱為**二元一次聯立方程式**或**二元一次方程組**。

$x=8$、$y=12$ 是 $\begin{cases} x+y=20 \\ 10x+5y=140 \end{cases}$ 共同的解嗎？

將 $x=8$、$y=12$ 代入

$x+y=8+12=20$ 成立！

再代入

$10x+5y=10\times8+5\times12$

$=140$

也成立！

所以 $x=8$、$y=12$ 是 $\begin{cases} x+y=20 \\ 10x+5y=140 \end{cases}$ 共同的解喔！

值日生：妙麗

在上面的討論中，$x=8$、$y=12$ 是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y=20 \\ 10x+5y=140 \end{cases}$ 的解。因此 10 元硬幣有 8 枚，5 元硬幣有 12 枚。

【二元一次聯立方程式的解】

將 $x=a$、$y=b$ 代入 x、y 的二元一次聯立方程式後，可使這兩個方程式的等式都成立，則稱 $x=a$、$y=b$ 為此二元一次聯立方程式的解。

P21

例 1 **解的檢驗** 搭配習作 P9 基礎題 2 自評 P36 第 2 題

下列哪一組 x、y 是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y=7 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 10x+5y=60 \cdots\cdots ② \end{cases}$ 的解？

> 為了說明方便，可將聯立方程式中的式子編號。

解

(1) 當 $x=6$、$y=0$：

代入①式得 $x+y=6+0=6$（不合），

所以 $x=6$、$y=0$ 不是此聯立方程式的解。

(2) 當 $x=2$、$y=5$：

代入①式得 $x+y=2+5=7$（合），

代入②式得 $10x+5y=10\times2+5\times5=20+25=45$（不合），

所以 $x=2$、$y=5$ 不是此聯立方程式的解。

(3) 當 $x=5$、$y=2$：

代入①式得 $x+y=5+2=7$（合），

代入②式得 $10x+5y=10\times5+5\times2=50+10=60$（合），

所以 $x=5$、$y=2$ 是此聯立方程式的解。

隨堂練習

1. 下列哪一組 x、y 是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x+y=13 \\ x-y=3 \end{cases}$ 的解？答：(3)。

(1) $x=5$，$y=-2$ (2) $x=-2$，$y=-5$ (3) $x=4$，$y=1$

(1) $\begin{cases} 3\times5+(-2)=13(\text{合}) \\ 5-(-2)=7(\text{不合}) \end{cases}$ (2) $3\times(-2)+(-5)=-11$（不合） (3) $\begin{cases} 3\times4+1=13(\text{合}) \\ 4-1=3(\text{合}) \end{cases}$

2. $x=2$、$y=3$ 是下列哪一組二元一次聯立方程式的解？答：(1)。

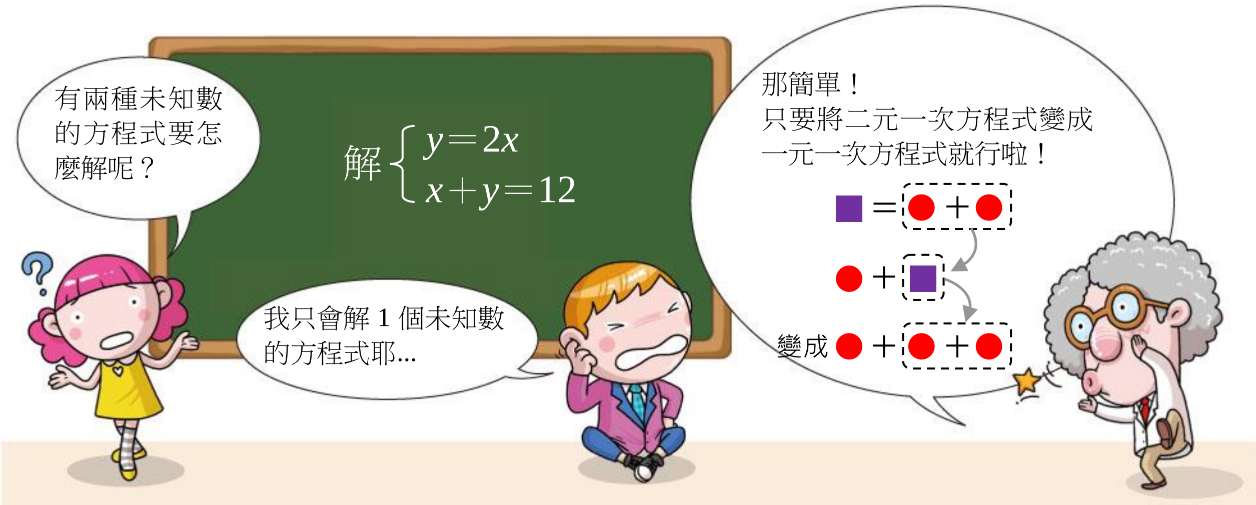
(1) $\begin{cases} 2x+3y=13 \\ x+y=5 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3x+y=9 \\ 2x-y=8 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} -2x+5y=-19 \\ x+3y=11 \end{cases}$

(1) $\begin{cases} 2\times2+3\times3=13(\text{合}) \\ 2+3=5 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 3\times2+3=9(\text{合}) \\ 2\times2-3=1(\text{不合}) \end{cases}$ (3) $(-2)\times2+5\times3=11$（不合）

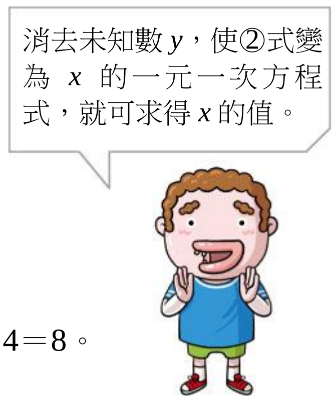
P22

2 代入消去法

對應能力指標 A-7-5



如何求得二元一次聯立方程式的解呢？下面的例子將介紹一種常用的方法來求二元一次聯立方程式 $\begin{cases} y=2x \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x+y=12 \cdots\cdots ② \end{cases}$ 的解。



步驟 1： 由①式可知 $y=\boxed{2x}$，

將①式代入②式 $x+\boxed{y}=12$

②式可被取代為 $x+2x=12$

$3x=12$

$x=4$

步驟 2： 將 $x=4$ 代入①式即可求得 y 值，所以 $y=2x=2\times4=8$。

步驟 3： 驗算解是否正確：

將 $x=4$、$y=8$ 代入①式得 $8=2\times4$，等號成立；

代入②式得 $4+8=12$，等號成立。

因此 $x=4$、$y=8$ 為二元一次聯立方程式 $\begin{cases} y=2x \\ x+y=12 \end{cases}$ 的解。

【Thinking】

在上述的**步驟 2** 中，如果將 $x=4$ 代入②式，是否也可求得 $y=8$？

可以。$4+y=12$，$y=8$。

P23

求二元一次聯立方程式解的過程，稱為解聯立方程式。像上述這樣**利用取代的方式，先消去一種未知數的解題方法，稱為代入消去法。**

例 2 直接代入消去　　搭配習作 P10 基礎題 4　自評 P36 第 3 題 (1)

利用代入消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} y=2x+1 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x+2y=12 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

思路分析

$\begin{cases} y=\boxed{2x+1} \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x+2\boxed{y}=12 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$，②式中的 y 可用 $2x+1$ 取代。

解

將①式 $y=2x+1$ 代入②式得

$$x+2(2x+1)=12$$
$$x+4x+2=12$$
$$5x=10$$
$$x=2$$

將 $x=2$ 代入①式得

$$y=2\times2+1=5$$

因此，解為 $x=2$、$y=5$。

驗算

將 $x=2$、$y=5$

代入①式得 $5=2\times2+1$，等號成立；

代入②式得 $2+2\times5=12$，等號成立。

驗算是為了檢查答案是否正確，自行檢驗即可，不一定要將檢驗過程寫出來。

隨堂練習

利用代入消去法完成下列各二元一次聯立方程式的解：

(1) $\begin{cases} y=-x \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 5x+y=28 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

將①式代入②式得

$5x+(-x)=28$

$4x=28$，$x=7$

將 $x=7$ 代入①式得 $y=-7$，

因此，解為 $x=7$、$y=-7$。

(2) $\begin{cases} y=-5x+1 \cdots\cdots\cdots ① \\ 2x-3y=11 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

將①式代入②式得

$2(-5y+1)-3y=-11$

$-10y+2-3y=-11$，$y=1$

將 $y=1$ 代入①式得 $x=-4$，

因此，解為 $x=-4$、$y=1$。

「小明被媽媽帶進理髮店剪頭髮」，猜一個數學用語。

P24

在二元一次聯立方程式中，如果沒有形如 $y=ax+b$ 或 $x=cy+d$ 時，可將其中一個方程式改寫成前述形式，再代入另一個方程式。

例 3 移項再代入消去 搭配習作 P9～10 基礎題 3、4

利用代入消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x-3y=-1 \cdots\cdots ① \\ 2x+y=5 \cdots\cdots ② \end{cases}$

解一 消去 y

由①式得 $x=-1+3y \cdots\cdots ③$

將③式代入②式得

$2(-1+3y)+y=5$

$-2+6y+y=5$

$7y=7$

$y=1$

將 $y=1$ 代入③式得

$x=-1+3\times1=2$

因此，解為 $x=2$、$y=1$。

解二 消去 x

由②式得 $y=5-2x \cdots\cdots ③$

將③式代入①式得

$x-3(5-2x)=-1$

$x-15+6x=-1$

$7x=14$

$x=2$

將 $x=2$ 代入③式得

$y=5-2\times2=1$

因此，解為 $x=2$、$y=1$。

【Thinking】

在例 3 中，將②式整理成 $x=\dfrac{5-y}{2}$，並代入①式是否可求出方程式的解？

將 $x=\dfrac{5-y}{2}$ 代入①式得 $\dfrac{5-y}{2}-3y=-1$

$5-y-6y=-2$

$-7y=-7$

$y=1$

將 $y=1$ 代入 $x=\dfrac{5-y}{2}$ 得 $x=\dfrac{5-y}{2}=2$

所以將②式整理成 $x=\dfrac{5-y}{2}$，

也可求出方程式的解 $x=2$、$y=1$

P25

例 4 **移項再代入消去**　　搭配習作 P9～10 基礎題 3、4

利用代入消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3a+5b=22 \cdots\cdots ① \\ 2a+b=3 \cdots\cdots ② \end{cases}$

思路分析

觀察①、②式，發現只有②式中 b 的係數為 1，可先改寫②式再代入①式。

解

由②式得 $b=3-2a$⋯⋯③

將③式代入①式得 $3a+5(3-2a)=22$

$3a+15-10a=22$

$-7a=7$

$a=-1$

將 $a=-1$ 代入③式得 $b=3-2\times(-1)$

$=3+2$

$=5$

因此，解為 $a=-1$、$b=5$。

隨堂練習

利用代入消去法解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} x-2y=8 \cdots\cdots ① \\ 2x-3y=13 \cdots\cdots ② \end{cases}$

由①式得 $x=8+2y$⋯⋯③

將③式代入②式得

$2(8+2y)-3y=13$

$16+4y-3y=13$

$y=-3$，代入③式得

$x=8+2\times(-3)=2$

因此，解為 $x=2$、$y=-3$。

(2) $\begin{cases} 2a+b=2 \cdots\cdots ① \\ a-4b=-2 \cdots\cdots ② \end{cases}$

由①式得 $b=2-2a$⋯⋯③

將③式代入②式得

$a-4(2-2a)=-2$

$a-8+8a=-2$

$a=\frac{2}{3}$，代入③式得

$b=2-2\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

因此，解為 $a=\frac{2}{3}$、$b=\frac{2}{3}$。

解答：代入消去法（帶入削去髮）。

P26

例 5　直接代入消去的應用　　　　自評 P36 第 3 題 (2)

利用代入消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 4x=9y \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 4x-3y=18 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

思路分析

$\begin{cases} 4x=\boxed{9y} \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 4x-3y=18 \cdots\cdots ② \end{cases}$，觀察到①、②兩式分別都有 $4x$，所以②式的 $4x$ 可直接用 $9y$ 來取代。

解

將①式 $4x=9y$ 代入②式得

$9y-3y=18$

$6y=18$

$y=3$

將 $y=3$ 代入①式得

$4x=9\times 3$

$4x=27$

$x=\dfrac{27}{4}$

因此，解為 $x=\dfrac{27}{4}$，$y=3$。

隨堂練習

利用代入消去法解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} 2x=3y \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 4x-3y=2 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

將①式代入②式得

$4x-2x=2$

$2x=2$，$x=1$

將 $x=1$ 代入①式得

$2=3y$，$y=\dfrac{2}{3}$

因此，解為 $x=1$、$y=\dfrac{2}{3}$。

(2) $\begin{cases} 2a=3b-1 \cdots\cdots\cdots ① \\ 2a+b=3 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

將①式代入②式得

$3b-1+b=3$

$4b=4$，$b=1$

將 $b=1$ 代入①式得

$2a=2$，$a=1$

因此，解為 $a=1$、$b=1$。

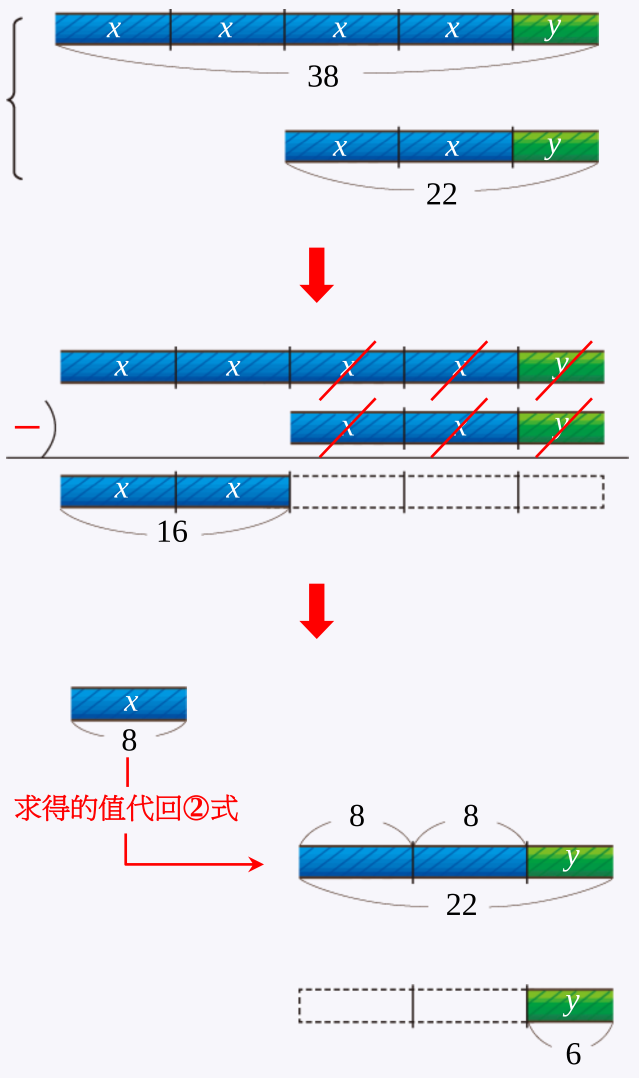
P27

3 加減消去法

對應能力指標 A-7-5

接著學習另一種解聯立方程式的方法：

在下面的線段圖中，如何求出 x 與 y 的長度？

圖像操作	符號記錄
	$\begin{cases}4x+y=38 \cdots\cdots ① \\ 2x+y=22 \cdots\cdots ②\end{cases}$ $\begin{array}{r} 4x+y=38 \\ -)\ 2x+y=22 \\ \hline 2x\qquad=16 \end{array}$ $x\qquad=8$ $2\times8+y=22$ $y=22-16=6$

因此 $x=8$、$y=6$ 為二元一次聯立方程式 $\begin{cases}4x+y=38\\2x+y=22\end{cases}$ 的解。

P28

除了使用圖像的方式來解題，我們也可以使用符號記錄並運用相加或相減的方法，先消去其中一種未知數，得到只含有另一種未知數的一元一次方程式，這種解題方法稱為**加減消去法**。

解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=33 \cdots\cdots ① \\ 2x-3y=-9 \cdots\cdots ② \end{cases}$

步驟 1： 觀察①、②兩式，$+3y$ 與 $-3y$ 互為相反數，將兩式相加，就可以消去 y。

①式＋②式可得

$$\begin{array}{rrcr} & 2x & \boxed{+3y} = & 33 \\ +) & 2x & \boxed{-3y} = & -9 \\ \hline & 4x & = & 24 \\ & x & = & 6 \end{array}$$

步驟 2： 將 $x=6$ 代入①式得

$$\begin{aligned} 2\times6+3y&=33 \\ 12+3y&=33 \\ 3y&=21 \\ y&=7 \end{aligned}$$

步驟 3： 驗算解是否正確。

將 $x=6$、$y=7$

代入①式得 $2\times6+3\times7=33$，等號成立；

代入②式得 $2\times6-3\times7=-9$，等號成立。

因此，解為 $x=6$、$y=7$。

也可以這樣做：兩式都有 $2x$，將兩式相減就可以消去 x。

$$\begin{array}{rrcr} & \boxed{2x} & +3y = & 33 \\ -) & \boxed{2x} & -3y = & -9 \\ \hline & & 6y = & 42 \\ & & y = & 7 \end{array}$$

$y=7$ 代入 $2x+3y=33$，得 $x=6$。

例 6 直接加減求解　　搭配習作 P10 基礎題 5　自評 P37 第 3 題 (3)、(4)

利用加減消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x+5y=-9 \cdots\cdots \text{①} \\ 2x+3y=-7 \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$

思路分析

觀察①、②兩式，分別都有 $2x$，所以將兩式相減即可消去未知數 x。

解

由①式－②式可得

$$\begin{array}{rr} & \boxed{2x}+5y=-9 \\ -) & \boxed{2x}+3y=-7 \\ \hline & 2y=-2 \\ & y=-1 \end{array}$$

將 $y=-1$ 代入①式得 $2x+5\times(-1)=-9$

$2x=-4$

$x=-2$

因此，解為 $x=-2$、$y=-1$。

先觀察兩式，如果有某個未知數（例如 x），其係數的絕對值相同時，即可利用兩式相加或相減消去該未知數。

隨堂練習

利用加減消去法解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} x+y=1 \cdots\cdots \text{①} \\ 3x-y=-9 \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$

由①式＋②式得

$4x=-8$，$x=-2$

將 $x=-2$ 代入①式得

$-2+y=1$，$y=3$

因此，解為 $x=-2$、$y=3$。

(2) $\begin{cases} 3a-b=2 \cdots\cdots \text{①} \\ 2a-b=0 \cdots\cdots \text{②} \end{cases}$

由①式－②式得 $a=2$，

將 $a=2$ 代入①式得

$6-b=2$，$b=4$

因此，解為 $a=2$、$b=4$。

如何解$\begin{cases}5x+2y=39\\2x+y=17\end{cases}$呢？直接將兩個方程式相加或相減後，發現都無法消去其中一種未知數（x 或 y），此時該如何利用加減消去法來解聯立方程式呢？我們先來看看下列的探索活動。

探索活動　等量公理與方程式的解

利用等量公理將方程式 $2x+y=17$ 左右兩邊同乘以 2，得 $4x+2y=34$。

(1) 寫出二元一次方程式 $2x+y=17$ 的任意一組解 $x=$ 1 、$y=$ 15 。

寫出的這組解是否也是 $4x+2y=34$ 的解？☑是　□否

(2) 寫出二元一次方程式 $4x+2y=34$ 的任意一組解 $x=$ 2 、$y=$ 13 。

寫出的這組解是否也是 $2x+y=17$ 的解？☑是　□否

由探索活動可發現，二元一次方程式 $2x+y=17$ 與 $4x+2y=34$ 有相同的解，即方程式經等量公理同乘以一個不為 0 的數後仍有相同的解。

因此，解$\begin{cases}5x+2y=39\cdots\cdots\cdots①\\2x+y=17\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$時，如果要用兩式相減消去未知數 y，必須先將②式中的 y 調整成 $2y$，即

$$\begin{cases}5x+2y=39\cdots\cdots\cdots①\\\boxed{2x+y=17\cdots\cdots\cdots②}\end{cases}\xrightarrow{\text{將②式乘以 2}}\begin{cases}5x+2y=39\cdots\cdots\cdots①\\\boxed{4x+2y=34\cdots\cdots\cdots③}\end{cases}$$

因為它們有相同的解，因此①式－③式消去未知數 y，最後所求得的 x、y 值即為原聯立方程式的解。

由前面的學習可知，解聯立方程式時，若遇到兩式直接相加或相減，都無法消去其中一種未知數，我們就會利用等量公理調整方程式的係數，讓聯立方程式的其中一種未知數（例如 y）的係數相同或互為相反數，再進行加減消去法。

搭配習作 P10 基礎題 5

例 7 調整一個式子的係數再加減消去

自評 P37 第 3 題 (5)

利用加減消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x+4y=23 \cdots\cdots ① \\ x-2y=11 \cdots\cdots ② \end{cases}$

思路分析

(1) 消去 x

$\begin{cases} \boxed{3x}+4y=23 \cdots\cdots ① \\ \boxed{x}-2y=11 \cdots\cdots ② \end{cases}$

如何讓②式 x 調整為 $3x$？

(2) 消去 y

$\begin{cases} 3x\boxed{+4y}=23 \cdots\cdots ① \\ x\boxed{-2y}=11 \cdots\cdots ② \end{cases}$

如何讓②式 $-2y$ 調整為 $-4y$？

解一 消去 x

②式 × 3 得 $3x-6y=33 \cdots\cdots ③$

①式 − ③式可得

$$\begin{array}{rrrr} & \boxed{3x} & +4y = & 23 \\ -) & \boxed{3x} & -6y = & 33 \\ \hline & & 10y = & -10 \\ & & y = & -1 \end{array}$$

將 $y=-1$ 代入①式得

$3x+4\times(-1)=23$，$x=9$

因此，解為 $x=9$、$y=-1$。

解二 消去 y

②式 × 2 得 $2x-4y=22 \cdots\cdots ③$

①式 + ③式可得

$$\begin{array}{rrrr} & 3x & \boxed{+4y} & = 23 \\ +) & 2x & \boxed{-4y} & = 22 \\ \hline & 5x & & = 45 \\ & x & & = 9 \end{array}$$

將 $x=9$ 代入①式得

$3\times9+4y=23$，$y=-1$

因此，解為 $x=9$、$y=-1$。

隨堂練習

利用加減消去法解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} 4x+5y=3 \cdots\cdots ① \\ x-2y=4 \cdots\cdots ② \end{cases}$

②式 × 4 得 $4x-8y=16 \cdots\cdots ③$

①式 − ③式得 $13y=-13$，$y=-1$

將 $y=-1$ 代入①式得

$4x-5=3$，$x=2$

因此，解為 $x=2$、$y=-1$

(2) $\begin{cases} 9m-3n=1 \cdots\cdots ① \\ 3m+6n=5 \cdots\cdots ② \end{cases}$

①式 × 2 得 $18m-6n=2 \cdots\cdots ③$

②式 + ③式得 $21m=7$，$m=\frac{1}{3}$

將 $m=\frac{1}{3}$

代入②式得 $1+6n=5$，$n=\frac{2}{3}$

因此，解為 $m=\frac{1}{3}$、$n=\frac{2}{3}$。

P32

搭配習作 P10 基礎題 6

自評 P37 第 3 題 (6)

例 8 調整兩個式子的係數再加減消去

利用加減消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=7 \cdots\cdots ① \\ 3x-5y=1 \cdots\cdots ② \end{cases}$

思路分析

觀察①、②兩式，要消去 x，須將兩式中 x 的係數調整成相等的數，也就是它們的公倍數。例如：2 和 3 的最小公倍數〔2 , 3〕＝6

$\begin{cases} 2x+3y=7 \cdots\cdots ① \\ 3x-5y=1 \cdots\cdots ② \end{cases}$

如何讓①式的 $2x$ 與②式的 $3x$ 均調整為 $6x$？

解 消去 x

①式×3 得 $6x+9y=21$………③

②式×2 得 $6x-10y=2$………④

將①、②式均調整成 $6x$。

③式－④式可得

$$\begin{array}{rrcr} & 6x+9y & = & 21 \\ -) & 6x-10y & = & 2 \\ \hline & 19y & = & 19 \\ & y & = & 1 \end{array}$$

將 $y=1$ 代入①式得 $2x+3\times1=7$，$x=2$

因此，解為 $x=2$、$y=1$。

若要消去 y，則將兩式中 y 的係數調整成相反數喔！

$\begin{cases} 2x+3y=7 \cdots\cdots ① \\ 3x-5y=1 \cdots\cdots ② \end{cases}$

將①式的 $3y$ 調整為 $15y$，
將②式的 $-5y$ 調整為 $-15y$。

隨堂練習

利用加減消去法解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} 3x-5y=-3 \cdots\cdots ① \\ 2x-3y=-1 \cdots\cdots ② \end{cases}$

①式×2 得 $6x-10y=-6$………③

②式×3 得 $6x-9y=-3$ ………④

③式－④式得 $-y=-3$，$y=3$

將 $y=3$ 代入①式得

$3x-15=-3$，$x=4$

因此，解為 $x=4$、$y=3$。

(2) $\begin{cases} 4x+5y=7 \cdots\cdots ① \\ 6x-7y=25 \cdots\cdots ② \end{cases}$

①式×3 得 $12x+15y=21$………③

②式×2 得 $12x-14y=50$………④

③式－④式得 $29y=-29$，$y=-1$

將 $y=-1$ 代入①式得

$4x-5=7$，$x=3$

因此，解為 $x=3$、$y=-1$。

P33

解聯立方程式時，如果係數有分數或小數，可先將分數或小數調整成整數。

例 9 **調整係數再加減消去** 自評 P37 第 3 題 (7)

利用加減消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} \dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{2}y=1 \cdots\cdots ① \\ 3x-y=16 \cdots\cdots ② \end{cases}$

解

①式 × 6 得 $2x-3y=6$ ……③ ← 將①式的係數調整為整數。

②式 × 3 得 $9x-3y=48$……④ ← 將②式與③式中 y 的係數調整成相等的數。

③式－④式可得

$$\begin{array}{rrrcr} & 2x & \boxed{-3y} & = & 6 \\ -) & 9x & \boxed{-3y} & = & 48 \\ \hline & -7x & & = & -42 \\ & x & & = & 6 \end{array}$$

將 $x=6$ 代入②式得 $3\times6-y=16$

$18-y=16$

$y=2$

因此，解為 $x=6$、$y=2$。

也可以直接將 ① 式的 $-\dfrac{1}{2}y$ 調整成 $-y$：

① 式 × 2 得 $\dfrac{2}{3}x-y=2$…… ③

② 式－③ 式得 $\dfrac{7}{3}x=14$，$x=6$

將 x＝6 代入② 式得 $y=2$。

隨堂練習

利用加減消去法解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} x+2y=8 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{3}y=2 \cdots\cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

②式 × 6 得 $3x+2y=12$………③

③式－①式得 $2x=4$，$x=2$

將 $x=2$ 代入①式得

$2+2y=8$，$2y=6$，$y=3$

因此，解為 $x=2$、$y=3$。

(2) $\begin{cases} m+0.5n=1 \cdots\cdots ① \\ 4m-3n=9 \cdots\cdots ② \end{cases}$

①式x6 得 $6m+3n=6$………③

③式＋②式得 $10m=15$，$m=\dfrac{3}{2}$

將 $m=\dfrac{3}{2}$ 代入③式得

$9+3n=6$，$n=-1$

因此，解為 $m=\dfrac{3}{2}$、$n=-1$。

P34

利用加減消去法解題時，要將式子中的同類項合併。

例 10 **先化簡再加減消去** 自評 P37 第 3 題 (8)

利用加減消去法解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x+y=8 \cdots\cdots ① \\ x-5y=-14-2y \cdots\cdots ② \end{cases}$

解

由②式可得 $x-5y+2y=-14$，即 $x-3y=-14$……③

$\begin{cases} 3x\boxed{+y}=8 \cdots\cdots ① \\ x\boxed{-3y}=-14 \cdots\cdots ③ \end{cases}$ ← $\boxed{+y}$ 調整成 $\boxed{+3y}$。 ← $\boxed{-3y}$ 仍是 $\boxed{-3y}$。

①式×3 得 $9x+3y=24$……④

③式＋④式可得

$$\begin{array}{rrcrl} & x & \boxed{-3y} = & -14 & \cdots\cdots ③ \\ +) & 9x & \boxed{+3y} = & 24 & \cdots\cdots ④ \\ \hline & 10x & = & 10 & \\ & x & = & 1 & \end{array}$$

將 $x=1$ 代入①式得 $3\times1+y=8$，$y=5$

因此，解為 $x=1$、$y=5$。

也可以使用代入消去法，
先將①式整理成
$y=8-3x$，
再代入②式，求得
$x=1$、$y=5$。

隨堂練習

利用加減消去法解下列各二元一次聯立方程式：

(1) $\begin{cases} -3y=2x-16 \cdots\cdots ① \\ 3x=24-2y \cdots\cdots ② \end{cases}$

整理①式得 $2x+3y=16$……③
整理②式得 $3x+2y=24$……④
③式×3 得 $6x+9y=48$……⑤
④式×2 得 $6x+4y=48$……⑥
⑤式－⑥式得 $5y=0$，$y=0$
將 $y=0$ 代入③式得 $2x=16$，$x=8$
因此，解為 $x=8$、$y=0$。

(2) $\begin{cases} x+2y=2x \cdots\cdots ① \\ 6x-3y=3x-y+2 \cdots\cdots ② \end{cases}$

整理①式得 $x-2y=0$……③
整理②式得 $3x-2y=2$……④
③式－④式得 $-2x=-2$，$x=1$
將 $x=1$ 代入③式
得 $1-2y=0$，$y=\frac{1}{2}$
因此，解為 $x=1$、$y=\frac{1}{2}$。

P35

1-2 重點回顧

❶ 二元一次聯立方程式與解

(1) 兩個並列在一起的二元一次方程式，稱為二元一次聯立方程式或二元一次方程組。

例 $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 2x-y=-7 \end{cases}$ 為一組二元一次聯立方程式或二元一次方程組。

(2) 將 $x=a$、$y=b$ 代入二元一次聯立方程式後，可使這兩個方程式的等式都成立，則稱 $x=a$、$y=b$ 為此二元一次聯立方程式的解。

例 將 $x=-2$、$y=3$ 代入 $2x+3y=5$ 及 $2x-y=-7$，可使這兩個方程式都成立，所以 $x=-2$、$y=3$ 是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 2x-y=-7 \end{cases}$ 的解。

❷ 方程式的化簡與編號

(1) 在解二元一次聯立方程式時，先化簡式子，以利於觀察。

(2) 為了說明方便，可將題目的式子或計算過程所新增的式子加上編號。

例 $\begin{cases} 5x-2y=4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ 7x+y=2x-3y+22 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$，由②式可得 $5x+4y=22 \cdots\cdots ③$，

故可得 $\begin{cases} 5x-2y=4 \cdots\cdots ① \\ 5x+4y=22 \cdots\cdots ③ \end{cases}$。

❸ 二元一次聯立方程式的解法

(1) 代入消去法：利用取代的方式，先消去一種未知數的解題方法，稱為代入消去法。在解二元一次聯立方程式時，可用 x 的一次式取代 y 來解題，也可用 y 的一次式取代 x 來解題。

例 $\begin{cases} y=x+2 \cdots\cdots\cdots ① \\ 3x-2y=-1 \cdots\cdots ② \end{cases}$ 將①式代入②式可消去 y，得 $3x-2(x+2)=-1$。

(2) 加減消去法： 將兩個方程式相加或相減，先消去一種未知數的解題方法，稱為加減消去法。

例 $\begin{cases} x+y=3 \cdots\cdots\cdots ① \\ 2x-y=-6 \cdots\cdots ② \end{cases}$ ①式＋②式可消去 y，得 $3x=-3$。

P36

1-2 自我評量

① 聯課活動分組，已知桌球組總共有 38 人報名，其中男生人數比女生人數的 3 倍少 2 人。設男生有 x 人報名，女生有 y 人報名，則： 課 P20 課文

(1) 由總共 38 人報名，可列得二元一次方程式：$\underline{x+y=38}$。

(2) 由男生人數比女生人數的 3 倍少 2 人，可列得二元一次方程式：$\underline{x=3y-2}$。

(3) 因此可列得二元一次聯立方程式：$\begin{cases} x+y=38 \\ x=3y-2 \end{cases}$。

② 判別 $x=2$、$y=-3$ 是否為下列二元一次聯立方程式的解。 課 P21 例 1

(1) $\begin{cases} 3x+y=9 \\ x-2y=8 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=5 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=5 \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 4x-y=11 \\ -x+3y=7 \end{cases}$

(1) $3\times2-3=3$（不合）
$x=2$、$y=-3$
不是此聯立方程式的解。

(2) $2+(-3)=-1$（合）
$2-(-3)=5$（合）
$x=2$、$y=-3$
是此聯立方程式的解。

(3) $2\times2+(-3)=1$（合）
$2-(-3)=5$（合）
$x=2$、$y=-3$
是此聯立方程式的解。

(4) $4\times2-(-3)=11$（合）
$-2+3\times(-3)=-11$（不合）
$x=2$、$y=-3$
不是此聯立方程式的解。

③ 解下列各二元一次聯立方程式：

課 P23 例 2

(1) $\begin{cases} 3x-4y=5 \cdots\cdots① \\ x=2y+3 \cdots\cdots② \end{cases}$

將②式代入①式得
$3(2y+3)-4y=5$
$6y+9-4y=5$
$2y=-4$，$y=-2$
將 $y=-2$ 代入②式得 $x=-1$，
因此，解為 $x=-1$、$y=-2$。

課 P26 例 5

(2) $\begin{cases} 2a=3b \cdots\cdots① \\ 5a-3b=3 \cdots\cdots② \end{cases}$

將①式代入②式得
$5a-2a=3$，$a=1$
將 $a=1$ 代入①式得 $b=\frac{2}{3}$，
因此，解為 $a=1$、$b=\frac{2}{3}$。

課 P29 例 6

(3) $\begin{cases} x+y=8 \cdots\cdots\cdots ① \\ x-y=2 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

①式＋②式得 $2x=10$，$x=5$

將 $x=5$ 代入①式

得 $5+y=8$，$y=3$

因此，解為 $x=5$、$y=3$。

課 P29 例 6

(4) $\begin{cases} 3x+2y=7 \cdots\cdots\cdots ① \\ 3x-4y=13 \cdots\cdots\cdots ② \end{cases}$

①式－②式得 $6y=-6$，$y=-1$

將 $y=-1$ 代入①式

得 $3x-2=7$，$x=3$

因此，解為 $x=3$、$y=-1$。

課 P31 例 7

(5) $\begin{cases} 3m-5n=2 \cdots\cdots\cdots ① \\ -m+n=-1 \cdots\cdots ② \end{cases}$

將②式×3 得

$-3m+3n=-3 \cdots\cdots ③$

①式＋③式得 $-2n=-1$，$n=\dfrac{1}{2}$

將 $n=\dfrac{1}{2}$ 代入②式得 $m=\dfrac{3}{2}$

因此，解為 $m=\dfrac{3}{2}$、$n=\dfrac{1}{2}$。

課 P32 例 8

(6) $\begin{cases} 3x-6y=2 \cdots\cdots ① \\ 8x+10y=1 \cdots\cdots ② \end{cases}$

①式×8 得 $24x-48y=16 \cdots\cdots ③$

②式×3 得 $24x+30y=3 \cdots\cdots ④$

③式－④式

得 $-78y=13$，$y=-\dfrac{1}{6}$

將 $y=-\dfrac{1}{6}$ 代入①式得 $x=\dfrac{1}{3}$

因此，解為 $x=\dfrac{1}{3}$、$y=-\dfrac{1}{6}$。

課 P33 例 9

(7) $\begin{cases} 3x-2y=6 \cdots\cdots ① \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{3}y=4 \cdots\cdots ② \end{cases}$

②式×6 得 $3x+4y=24 \cdots\cdots ③$

①式－③式得 $-6y=-18$，$y=3$

將 $y=3$ 代入①式得 $x=4$

因此，解為 $x=4$、$y=3$。

課 P34 例 10

(8) $\begin{cases} 2y=-6-3x \cdots\cdots ① \\ -15=7x+5y \cdots\cdots ② \end{cases}$

整理①式得 $3x+2y=-6 \cdots\cdots ③$

整理②式得 $7x+5y=-15 \cdots ④$

③式×7 得 $21x+14y=-42 \cdots ⑤$

④式×3 得 $21x+15y=-45 \cdots ⑥$

⑤式－⑥式得 $-y=3$，$y=-3$

將 $y=-3$ 代入③式得 $x=0$

因此，解為 $x=0$、$y=-3$。