

3-2 解一元一次方程式

1 認識一元一次方程式

對應能力指標 A-7-2

▶一元一次方程式的意義

搭配習作 P53 基礎題 1、2



假設買了 x 包洋芋片，則 x 包洋芋片共 $45x$ 元；加上 1 個塑膠袋 2 元，所以總共花了 $(45x+2)$ 元。又由漫畫中可知總共花了 137 元，所以 $45x+2$ 和 137 是相等的，因此 $45x+2=137$ 。

在上面的式子 $45x+2=137$ 中，不知道 x 所代表的數是多少，這時稱 x 為**未知數**，這種含有未知數的等式稱為**方程式**，而只含一種未知數（一元），且未知數的最高次方是一次的等式，稱為**一元一次方程式**。

將下列的敘述列出一元一次方程式，如下表：

文字敘述	一元一次方程式
x 減 8 是 10	$x-8=10$
x 的 5 倍等於 35	$5x=35$
比 x 大 5 的數是 3	$x+5=3$
比 x 的 6 倍多 7 的數是 37	$6x+7=37$
比 x 的一半少 3 的數是 21	$\frac{1}{2}x-3=21$

P169**▶一元一次方程式的解**

依據題意列出一元一次方程式後，接著就是要找出這個方程式中，未知數所代表的數。例如：在前頁中，洋芋片 1 包 45 元，

買 1 包洋芋片共花費 $45 \times 1 + 2 = 47$ (元)；

買 2 包洋芋片共花費 $45 \times 2 + 2 = 92$ (元)；

買 3 包洋芋片共花費 $45 \times 3 + 2 = 137$ (元)。

買 3 包洋芋片及 1 個 2 元的塑膠袋，也就是當 $x=3$ 時，可使得一元一次方程式 $45x + 2 = 137$ 等號左右兩邊的數值相等，就稱 $x=3$ 是此方程式的**解**。也就是說，將一個數代入一元一次方程式後，能使等號左右兩邊的數值相等，稱這個數為此一元一次方程式的解。

例 1 解的檢驗

搭配習作 P53 基礎題 3 自評 P82 第 2 題

12、15、18 三個數中，何者為一元一次方程式 $4x + 80 = 8x + 20$ 的解？

解

將各數分別代入方程式 $4x + 80 = 8x + 20$ ，檢驗等號是否成立：

x	左式： $4x + 80$	右式： $8x + 20$	左右兩式是否相等
12	$4 \times 12 + 80 = 128$	$8 \times 12 + 20 = 116$	否
15	$4 \times 15 + 80 = 140$	$8 \times 15 + 20 = 140$	是
18	$4 \times 18 + 80 = 152$	$8 \times 18 + 20 = 164$	否

所以 $x=15$ 是一元一次方程式 $4x + 80 = 8x + 20$ 的解。

隨堂練習

將 x 分別以 1、2、3、4 代入一元一次方程式 $3x + 8 = 20$ 逐一檢驗，何者為這個一元一次方程式的解？

$x=1$ 代入得 $3 \times 1 + 8 = 11 \neq 20$ ，

$x=2$ 代入得 $3 \times 2 + 8 = 14 \neq 20$ ，

$x=3$ 代入得 $3 \times 3 + 8 = 17 \neq 20$ ，

$x=4$ 代入得 $3 \times 4 + 8 = 20$ ，

所以 $x=4$ 是一元一次方程式 $3x + 8 = 20$ 的解。

「正方形的都市」，猜一個數學名詞。

2 等量公理與移項法則

利用數值逐一代入方程式，不易求解。接下來介紹的等量公理，可以有效的求出一元一次方程式的解。

搭配習作 P53 基礎題 4

1. 等量公理（加法）

在天平的左右兩邊，分別放上巧克力（每塊 x 公克）與砝碼（每個 5 公克），天平剛好平衡。



$$2x + 5 = x + 15$$

在天平的左右兩邊，各加上 1 塊巧克力，結果天平仍然保持平衡，也就是在等號左右兩邊同加一個數，等號仍會成立。



$$2x + 5 + x = x + 15 + x$$

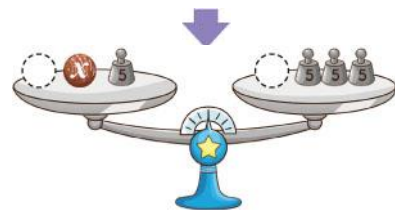
2. 等量公理（減法）

天平的左右兩邊，分別放上巧克力（每塊 x 公克）與砝碼（每個 5 公克），天平剛好平衡。



$$2x + 5 = x + 15$$

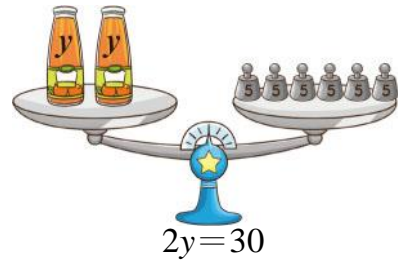
在天平的左右兩邊，各拿走 1 塊巧克力，則天平仍然保持平衡，也就是在等號左右兩邊同減一個數，等號仍會成立。



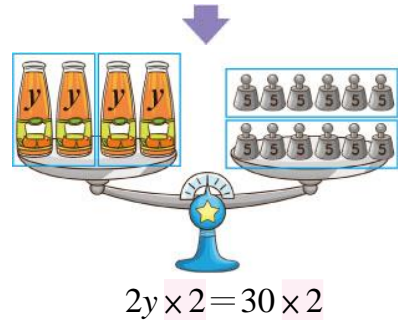
$$2x + 5 - x = x + 15 - x$$

3. 等量公理（乘法）

在天平的左右兩邊，分別放上果汁（每瓶 y 公克）與砝碼（每個 5 公克），天平剛好平衡。

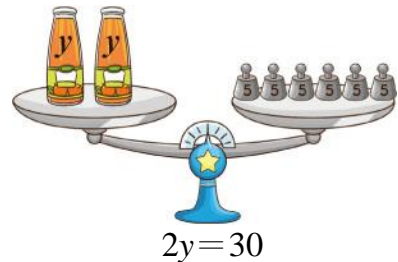


如果將天平左右兩邊的數量變成原來的 2 倍，則天平仍然保持平衡，也就是在等號左右兩邊同乘以一個數，等號仍會成立。

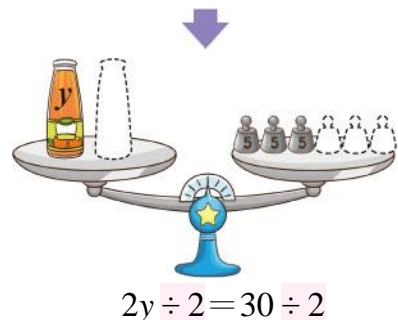


4. 等量公理（除法）

在天平的左右兩邊，分別放上果汁（每瓶 y 公克）與砝碼（每個 5 公克），天平剛好平衡。



將天平左右兩邊的數量減半，則天平仍然保持平衡，也就是在等號左右兩邊同除以一不為 0 的數，等號仍會成立。



雖然以上例子的情境都是正數，但不論正數或負數，等量公理都會成立。

【等量公理】

如果 $a=b$ ，則

(1) $a+c=b+c$

(2) $a-c=b-c$

(3) $a \times c=b \times c$

(4) $a \div c=b \div c$ (此時 $c \neq 0$)

解答：方程式（方城市）。

P172

求一元一次方程式中 x 所代表的數之過程，稱為解一元一次方程式。接下來利用等量公理解方程式，求出解之後，可將解代入原方程式驗算，以確定答案是正確的。

例 2 以等量公理解方程式（加法）

搭配習作 P54 基礎題 5

解一元一次方程式 $x - 19 = 25$ 。

解

為了求出 x 的值，須將等號左邊的「 -19 」消去。

$$\begin{array}{r}
 x - 19 = 25 \\
 +19 \quad \left(\begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \right. \quad x - 19 + 19 = 25 + 19 \quad \left. \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \right) +19 \leftarrow \text{等號兩邊同加 } 19 \\
 x = 25 + 19 \\
 x = 44
 \end{array}$$

驗算

把 $x = 44$ 代入原方程式：

$$\text{左式} = x - 19 = 44 - 19 = 25 = \text{右式}$$

例 3 以等量公理解方程式（減法）

搭配習作 P54 基礎題 5

解一元一次方程式 $x + 38 = 27$ 。

解

為了求出 x 的值，須將等號左邊的「 38 」消去。

$$\begin{array}{r}
 x + 38 = 27 \\
 -38 \quad \left(\begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \right. \quad x + 38 - 38 = 27 - 38 \quad \left. \begin{array}{l} \swarrow \\ \searrow \end{array} \right) -38 \leftarrow \text{等號兩邊同減 } 38 \\
 x = 27 - 38 \\
 x = -11
 \end{array}$$

驗算

把 $x = -11$ 代入原方程式：

$$\text{左式} = x + 38 = -11 + 38 = 27 = \text{右式}$$

P173**隨堂練習**

解下列各一元一次方程式：

$$(1) x + 8 = -9$$

$$x + 8 - 8 = -9 - 8$$

$$x = -17$$

$$(2) y - 6 = -7$$

$$y - 6 + 6 = -7 + 6$$

$$y = -1$$

在例題 2 中，若將 $x - 19 + 19 = 25 + 19$ 這個步驟省略，可得

$$\begin{array}{l} x - 19 = 25 \\ x = 25 + 19 \\ x = 44 \end{array}$$

「-19」移到等號另一邊變成「+19」

在例題 3 中，若將 $x + 38 - 38 = 27 - 38$ 這個步驟省略，可得

$$\begin{array}{l} x + 38 = 27 \\ x = 27 - 38 \\ x = -11 \end{array}$$

「+38」移到等號另一邊變成「-38」

在上述解方程式的過程中，省略的步驟看起來就像將「-19」移到等號的另一邊變成「+19」；將「+38」移到等號的另一邊變成「-38」，像這樣解方程式的運算方式，稱為**移項法則**。

「河邊垂釣」，猜一個數學名詞。

P174

求出解後，可將解代入原方程式驗算，以確定答案是正確的，驗算的過程通常不會寫出來。

例 4 以等量公理解方程式（乘法）

搭配習作 P54 基礎題 5

解一元一次方程式 $x \div 7 = 14$ 。

解

為了求出 x 的值，須將等號左邊的「 $\div 7$ 」消去

$$\begin{aligned}
 x \div 7 &= 14 \\
 \frac{x}{7} &= 14 \\
 \times 7 \left(\frac{x}{7} \times 7 = 14 \times 7 \right) & \times 7 \leftarrow \text{等號兩邊同乘以 7} \\
 x &= 14 \times 7 \\
 x &= 98
 \end{aligned}$$

例 5 以等量公理解方程式（除法）

搭配習作 P54 基礎題 5

解一元一次方程式 $x \times 3 = -63$ 。

解

為了求出 x 的值，須將等號左邊的「 $\times 3$ 」消去。

$$\begin{aligned}
 x \times 3 &= -63 \\
 \div 3 \left(\frac{x \times 3}{3} = \frac{-63}{3} \right) & \div 3 \leftarrow \text{等號兩邊同除以 3} \\
 x &= \frac{-63}{3} \\
 x &= -21
 \end{aligned}$$

P175**隨堂練習**

解下列各一元一次方程式：

(1) $x \div 6 = -18$

$$\frac{x}{6} = -18$$

$$\frac{x}{6} \times 6 = -18 \times 6$$

$$x = -108$$

(2) $-\frac{1}{4}t = 6$

$$-\frac{1}{4}t \times (-4) = 6 \times (-4)$$

$$t = -24$$

(3) $7x = -105$

$$\frac{7x}{7} = \frac{-105}{7}$$

$$x = -15$$

(4) $3x = 11$

$$\frac{3x}{3} = \frac{11}{3}$$

$$x = \frac{11}{3}$$

在例題 4 中，若將 $\frac{x}{7} \times 7 = 14 \times 7$ 這個步驟省略，可得

$$\begin{array}{l} x \div 7 = 14 \\ x = 14 \times 7 \\ x = 98 \end{array}$$

「 $\div 7$ 」移到等號另一邊變成「 $\times 7$ 」

在例題 5 中，若將 $\frac{x \times 3}{3} = \frac{-63}{3}$ 這個步驟省略，可得

$$\begin{array}{l} x \times 3 = -63 \\ x = \frac{-63}{3} \\ x = -21 \end{array}$$

「 $\times 3$ 」移到等號另一邊變成「 $\div 3$ 」

$$\frac{-63}{3} \text{ 即 } -63 \div 3。$$

解答：等於（等魚）。

P176


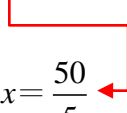
例題 6 與例題 7 中，我們將等量公理與移項法則的解題步驟並列，方便同學們觀察移項法則是等量公理簡化的結果。

例 6 等量公理與移項法則

搭配習作 P54 基礎題 5

解一元一次方程式 $5x - 20 = 30$ 。

解

等量公理解題	移項法則解題
$5x - 20 = 30$	$5x - 20 = 30$
↓ 等號兩邊同加 20 $5x - 20 + 20 = 30 + 20$	 $5x = 30 + 20$
↓ 整理 $5x = 50$	$5x = 50$
↓ 等號兩邊同除以 5 $\frac{5x}{5} = \frac{50}{5}$	 $x = \frac{50}{5}$
↓ 整理 $x = 10$	$x = 10$
<div style="width: 10px; height: 10px; background-color: #cccccc; margin: 0 auto;"></div>	<div style="width: 10px; height: 10px; background-color: #c8e6c9; margin: 0 auto;"></div>

隨堂練習

解下列各一元一次方程式：

(1) $2x + 8 = 14$

$2x = 14 - 8$

$2x = 6$

$x = 3$

(2) $4 - 5x = 14$

$-5x = 14 - 4$

$-5x = 10$

$x = -2$

P177

解一元一次方程式的目的是求出未知數的值，得到形如 $x=3$ 的式子，所以當方程式的等號兩邊都含有未知數時，應設法使含未知數的每一項都在等號的一邊，不含未知數的每一項都在等號的另一邊。

搭配習作 P54 基礎題 5(1)~(2)

例 7 等量公理與移項法則（兩邊都含有未知數）

自評 P182 第 3 題 (1)~(2)

解一元一次方程式 $9x+7=6x-4$ 。

解

等量公理解題	移項法則解題
--------	--------

$$9x+7=6x-4$$

↓ 等號兩邊同減 $6x$

$$9x-6x+7=6x-6x-4$$

↓ 整理

$$3x+7=-4$$

↓ 等號兩邊同減 7

$$3x+7-7=-4-7$$

↓ 整理

$$3x=-11$$

↓ 等號兩邊同除以 3

$$\frac{3x}{3}=-\frac{11}{3}$$

↓ 整理

$$x=-\frac{11}{3}$$

$$9x+7=6x-4$$

$$9x-6x+7=-4$$

$$3x+7=-4$$

$$3x=-4-7$$

$$3x=-11$$

$$x=-\frac{11}{3}$$

隨堂練習

解一元一次方程式 $11x-5=9x+8$ 。

$$11x-5=9x+8$$

$$11x-9x=8+5$$

$$2x=13$$

$$x=\frac{13}{2}$$

P178

搭配習作 P54 基礎題 5(3)~(4)

自評 P183 第 3 題 (3)~(4)

例 8 以移項法則解一元一次方程式

解下列各一元一次方程式：

(1) $5x + 24 = 3(x + 2) + 2$

解

(1) $5x + 24 = 3(x + 2) + 2$

$5x + 24 = 3x + 6 + 2$

$5x - 3x = 6 + 2 - 24$

$2x = -16$

$x = -8$

(2) $3x - 3(2x + 5) = 12 + 4(x + 2)$

(2) $3x - 3(2x + 5) = 12 + 4(x + 2)$

$3x - 6x - 15 = 12 + 4x + 8$

$3x - 6x - 4x = 12 + 8 + 15$

$-7x = 35$

$x = -5$

隨堂練習

解下列各一元一次方程式：

(1) $2(3 - x) = -4(x + 5)$

$6 - 2x = -4x - 20$

$-2x + 4x = -20 - 6$

$2x = -26$

$x = -13$

(2) $2(x - 4) - (3x + 4) = -20 + 7x$

$2x - 8 - 3x - 4 = -20 + 7x$

$2x - 3x - 7x = -20 + 8 + 4$

$-8x = -8$

$x = 1$

P179**例 9** 解一元一次方程式

搭配習作 P54 基礎題 6 自評 P183 第 3 題 (5)

解一元一次方程式 $2x = \frac{2}{3}x - 16$ 。**解**

解一 直接移項

$$2x = \frac{2}{3}x - 16$$

$$2x - \frac{2}{3}x = -16$$

$$\frac{4}{3}x = -16$$

$$x = (-16) \div \frac{4}{3}$$

$$x = -12$$

解二 先去分母再移項

$$2x = \frac{2}{3}x - 16$$

$$3 \times 2x = 3 \left(\frac{2}{3}x - 16 \right)$$

$$6x = 2x - 48$$

$$6x - 2x = -48$$

$$4x = -48$$

$$x = -12$$

等號兩邊
同乘以 3

隨堂練習

解下列各一元一次方程式：

(1) $\frac{1}{4}x - 4 = x + 3$

$x - 16 = 4x + 12$

$x - 4x = 12 + 16$

$-3x = 28$

$x = -\frac{28}{3}$

(2) $\frac{3}{2}x - 2 = 2x + \frac{2}{5}$

$15x - 20 = 20x + 4$

$15x - 20x = 4 + 20$

$-5x = 24$

$x = -\frac{24}{5}$

P180**例 10** 解一元一次方程式

搭配習作 P54 基礎題 6 自評 P183 第 3 題 (6)

解一元一次方程式 $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{6} = 2$ 。**解**

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{3} - \frac{x-4}{6} &= 2 \\ \frac{(2x+1) \times 2}{\cancel{3}^1} - \frac{(x-4) \times 1}{\cancel{6}_1} &= 2 \times 6 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{等號兩邊} \\ \text{同乘以 6} \end{array} \\ 2(2x+1) - (x-4) &= 12 \\ 4x+2-x+4 &= 12 \\ 3x+6 &= 12 \\ 3x &= 6 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

要記得**加括號**
才不會算錯喔！**隨堂練習**

解下列各一元一次方程式：

(1) $\frac{3x+2}{2} + \frac{4x-2}{3} = 1$

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{2} \times 6 + \frac{4x-2}{3} \times 6 &= 1 \times 6 \\ 3(3x+2) + 2(4x-2) &= 6 \\ 9x+6+8x-4 &= 6 \\ 17x &= 4 \\ x &= \frac{4}{17} \end{aligned}$$

(2) $\frac{3x+1}{4} - \frac{2x-3}{6} = 2$

$$\begin{aligned} \frac{3x+1}{4} \times 12 - \frac{2x-3}{6} \times 12 &= 2 \times 12 \\ 3(3x+1) - 2(2x-3) &= 24 \\ 9x+3-4x+6 &= 24 \\ 5x &= 15 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

3-2 重點回顧**① 一元一次方程式**

只含一種未知數，且未知數的最高次方是一次的等式，稱為一元一次方程式。

例 $2x=6$ ， $\frac{2}{5}x-3=x-9$ 等，皆為一元一次方程式。

② 一元一次方程式的解

如果一個數代入一元一次方程式後，能使等號左右兩邊的值相等，稱這個數為此一元一次方程式的解。

例 $x=3$ 代入一元一次方程式 $2x=6$ ，
左式 $=2 \times 3 = 6 =$ 右式，所以 $x=3$ 是 $2x=6$ 的解。

③ 等量公理

當等號左右兩邊相等時，在等號左右兩邊同時加、減、乘、除以一數（除數不為 0），等號仍然成立，即

如果 $a=b$ ，則

$$(1) a+c=b+c$$

$$(2) a-c=b-c$$

$$(3) a \times c = b \times c$$

$$(4) a \div c = b \div c \quad (\text{此時 } c \neq 0)$$

④ 解一元一次方程式

求一元一次方程式中，未知數所代表的數之過程，稱為解一元一次方程式。

例 $x+4+3x-2=-6$
 $4x+2=-6$
 $4x=-8$
 $x=-2$

P182**3-2 自我評量**

① 依據下列各文字敘述，列出一元一次方程式：

課 P168 表格

(1) x 加 5 等於 13

$$x+5=13$$

(2) x 的 7 倍等於 21

$$7x=21$$

(3) x 的 5 倍加 9 等於 29

$$5x+9=29$$

(4) x 的 $\frac{1}{4}$ 減 3 等於 25

$$\frac{1}{4}x-3=25$$

② (C) 判別 $x=-3$ 是下列哪一個方程式的解？

課 P169 例 1

(A) $5x+2=2x+5$

(B) $5x-2=-2x+5$

(C) $5x+4=2x-5$

(D) $5x+4=-2x-5$

(A)左式： $5 \times (-3) + 2 = -13$ (B)左式： $5 \times (-3) - 2 = -17$

右式： $2 \times (-3) + 5 = -1$ 右式： $-2 \times (-3) + 5 = 11$

(C)左式： $5 \times (-3) + 4 = -11$ (D)左式： $5 \times (-3) + 4 = -11$

右式： $2 \times (-3) - 5 = -11$ 右式： $-2 \times (-3) - 5 = 1$

③ 解下列各一元一次方程式：

(1) $3x+1=2x-5$

課 P177 例 7

$$3x-2x=-5-1$$

$$x=-6$$

(2) $5x=3x$

課 P177 例 7

$$5x-3x=0$$

$$2x=0$$

$$x=0$$

P184

(3) $2(x-4) - 3(x+4) = -2$

$2x - 8 - 3x - 12 = -2$

$-x = 18$

$x = -18$

課 P178 例 8

(4) $3(2x+1) - (x+2) = (7x+1) + (-x+3)$

$6x + 3 - x - 2 = 7x + 1 - x + 3$

$5x + 1 = 6x + 4$

$5x - 6x = 4 - 1$

$-x = 3$

$x = -3$

課 P178 例 8

(5) $\frac{1}{2}x + 3 = \frac{2}{3}x - 2$

$\left(\frac{1}{2}x + 3\right) \times 6 = \left(\frac{2}{3}x - 2\right) \times 6$

$3x + 18 = 4x - 12$

$3x - 4x = -12 - 18$

$-x = -30$

$x = 30$

課 P179 例 9

(6) $\frac{3x-3}{4} + \frac{x-8}{3} = 2$

$\frac{3x-3}{4} \times 12 + \frac{x-8}{3} \times 12 = 2 \times 12$

$3(3x-3) + 4(x-8) = 24$

$9x - 9 + 4x - 32 = 24$

$13x = 65$

$x = 5$

課 P180 例 10