

## 2-4 分數的乘除運算與指數律

## ① 正負分數的乘法

對應能力指標 N-7-3、N-7-4

國小曾學過正分數的乘法，方法如下：

- ① 將分母相乘當做新的分母；將分子相乘當做新的分子，這樣所得到的新分數

$$\text{就是它們的乘積，例如：} \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \frac{14}{15}。$$

- ② 如果有某個數是帶分數，則先將此數化成假分數，再用前述的方法相乘，

$$\text{例如：} \frac{2}{7} \times 2\frac{3}{5} = \frac{2}{7} \times \frac{13}{5} = \frac{26}{35}。$$

對於正負分數的乘法，可先利用兩同號數相乘的乘積是正數，兩異號數相乘的乘積是負數來判別其乘積的正負，再運用上述正分數乘法的方法來計算。

$$\text{例如：(1) } \frac{2}{3} \times \left(-\frac{7}{5}\right) = -\left(\frac{2}{3} \times \frac{7}{5}\right) = -\frac{2 \times 7}{3 \times 5} = -\frac{14}{15}。$$

$$(2) \left(-\frac{2}{7}\right) \times \left(-2\frac{3}{5}\right) = +\left(\frac{2}{7} \times \frac{13}{5}\right) = \frac{2 \times 13}{7 \times 5} = \frac{26}{35}。$$

## 隨堂練習

搭配習作 P39 基礎題 1(1)、(2) 自評 P142 第 2 題(1)

計算下列各式的值：

$$(1) \frac{2}{3} \times \left(-\frac{6}{5}\right)$$

$$= -\left(\frac{2}{3} \times \frac{6}{5}\right)$$

$$= -\frac{4}{5}$$

$$(2) \left(-\frac{9}{5}\right) \times \frac{7}{18}$$

$$= -\left(\frac{9}{5} \times \frac{7}{18}\right)$$

$$= -\frac{7}{10}$$

$$(3) \left(-2\frac{1}{7}\right) \times \left(-\frac{7}{15}\right)$$

$$= \left(-\frac{15}{7}\right) \times \left(-\frac{7}{15}\right)$$

$$= +\left(\frac{15}{7} \times \frac{7}{15}\right) = 1$$

$$(4) \left(-1\frac{1}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= \left(-\frac{6}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{3}\right)$$

$$= +\left(\frac{6}{5} \times \frac{4}{3}\right) = \frac{8}{5}$$

**P129**

如同整數的乘法，多個都不為零的分數連乘時，如果其中含有**奇數個負數**，其乘積為**負數**；如果其中含有**偶數個負數**，其乘積為**正數**。

**例 1** 分數的連乘

計算下列各式的值：

$$(1) \frac{2}{3} \times \left(-\frac{5}{6}\right) \times \left(-\frac{4}{7}\right)$$

$$(2) (-12) \times \frac{5}{6} \times 1\frac{1}{3}$$

**解**

$$(1) \frac{2}{3} \times \left(-\frac{5}{6}\right) \times \left(-\frac{4}{7}\right)$$

$$= + \left( \frac{\cancel{2}^1}{3} \times \frac{5}{\cancel{6}_3} \times \frac{4}{7} \right) \leftarrow \text{有偶數個負數。}$$

$$= \frac{20}{63}$$

$$(2) (-12) \times \frac{5}{6} \times 1\frac{1}{3}$$

$$= - \left( \cancel{12}^2 \times \frac{5}{\cancel{6}_1} \times \frac{4}{3} \right) \leftarrow \text{有奇數個負數。}$$

$$= -\frac{40}{3}$$

**隨堂練習**

計算下列各式的值：

$$(1) 14 \times \left(-2\frac{1}{7}\right) \times \left(-1\frac{1}{5}\right)$$

$$= 14 \times \left(-\frac{15}{7}\right) \times \left(-\frac{6}{5}\right)$$

$$= + \left( 14 \times \frac{15}{7} \times \frac{6}{5} \right)$$

$$= 36$$

$$(2) \left(-\frac{9}{14}\right) \times \left(-1\frac{7}{12}\right) \times \left(-\frac{8}{19}\right)$$

$$= \left(-\frac{9}{14}\right) \times \left(-\frac{19}{12}\right) \times \left(-\frac{8}{19}\right)$$

$$= - \left( \frac{9}{14} \times \frac{19}{12} \times \frac{8}{19} \right)$$

$$= -\frac{3}{7}$$

「考試不作弊」，猜一個數學名詞。

**P130****② 正負分數的除法**

對應能力指標 N-7-3、N-7-4

當兩個數的乘積為 1 時，稱這兩個數互為**倒數**。

例如：(1)  $2 \times \frac{1}{2} = 1$ ，所以 2 與  $\frac{1}{2}$  互為倒數。

(2)  $(-\frac{2}{3}) \times (-\frac{3}{2}) = 1$ ，所以  $-\frac{2}{3}$  與  $-\frac{3}{2}$  (或  $-1\frac{1}{2}$ ) 互為倒數。

對於分數  $\frac{n}{m}$ ，其中  $m、n$  皆是不為零的整數，因為  $\frac{n}{m} \times \frac{m}{n} = 1$ ，所以分數  $\frac{n}{m}$  的倒數為  $\frac{m}{n}$ 。當我們要找帶分數的倒數時，可先將帶分數化為假分數，就可找到其倒數。例如：將  $1\frac{2}{5}$  改為假分數  $\frac{7}{5}$ ，就可以找到  $1\frac{2}{5}$  的倒數為  $\frac{5}{7}$ 。

**【倒數】**

1. 如果  $a、b$  為任意兩個數，當  $a \times b = 1$  時，稱  $a、b$  互為倒數，其中  $a$  是  $b$  的倒數，而  $b$  也是  $a$  的倒數。
2. 正數的倒數為正數，負數的倒數為負數。

**隨堂練習**

自評 P142 第 1 題

完成下列空格：

(1) 5 的倒數為  $\frac{1}{5}$ 。

(2)  $-\frac{1}{7}$  的倒數為  $-7$ 。

(3)  $-1$  的倒數為  $-1$ 。

(4)  $-3\frac{2}{5}$  的倒數為  $-\frac{5}{17}$ 。

國小學過除以一個正數就是乘以這個數的倒數，對於負分數的除法也可用同樣的方式計算。

例如：(1)  $\frac{4}{7} \div (-\frac{9}{11}) = \frac{4}{7} \times (-\frac{11}{9}) = -(\frac{4}{7} \times \frac{11}{9}) = -\frac{44}{63}$ 。

(2)  $\frac{3}{5} \div (-1\frac{2}{3}) = \frac{3}{5} \div (-\frac{5}{3}) = \frac{3}{5} \times (-\frac{3}{5}) = -(\frac{3}{5} \times \frac{3}{5}) = -\frac{9}{25}$ 。

**131****隨堂練習**

搭配習作 P39 基礎題 1(3)、(5) 自評 P142 第 2 題(2)

計算下列各式的值：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \left(-\frac{5}{3}\right) \div \left(-\frac{7}{2}\right) \\
 &= \left(-\frac{5}{3}\right) \times \left(-\frac{2}{7}\right) \\
 &= \frac{10}{21}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \left(-2\frac{1}{4}\right) \div 1\frac{2}{5} \\
 &= \left(-\frac{9}{4}\right) \div \frac{7}{5} \\
 &= \left(-\frac{9}{4}\right) \times \frac{5}{7} = -\frac{45}{28}
 \end{aligned}$$

計算分數的乘除混合運算時，同樣可利用「除以一個數等於乘上其倒數」的方法，將除法都改成乘法，再進行計算。

**例 2 分數的乘除**

搭配習作 P39 基礎題 1(4) 自評 P142 第 2 題(3)、(4)

求  $\frac{3}{5} \div \left(-\frac{9}{14}\right) \times 2\frac{6}{7}$  的值。**解**

$$\begin{aligned}
 & \frac{3}{5} \div \left(-\frac{9}{14}\right) \times 2\frac{6}{7} \\
 &= \frac{3}{5} \times \left(-\frac{14}{9}\right) \times \frac{20}{7} \\
 &= -\left(\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{\underset{1}{5}} \times \frac{\overset{2}{\cancel{14}}}{\underset{3}{9}} \times \frac{\overset{4}{\cancel{20}}}{\underset{1}{7}}\right) \\
 &= -\frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

**隨堂練習**

計算下列各式的值：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \frac{21}{5} \div (-7) \times 3 \\
 &= \frac{21}{5} \times \left(-\frac{1}{7}\right) \times 3 \\
 &= -\left(\frac{21}{5} \times \frac{1}{7} \times 3\right) = -\frac{9}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad & \left(-\frac{7}{13}\right) \times 1\frac{6}{7} \div \left(-\frac{3}{8}\right) \\
 &= \left(-\frac{7}{13}\right) \times \frac{13}{7} \times \left(-\frac{8}{3}\right) \\
 &= +\left(\frac{7}{13} \times \frac{13}{7} \times \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}
 \end{aligned}$$

解答：真分數。

**P132****③ 指數律**

對應能力指標 N-7-6、N-7-7

**▶ 分數的指數記法**

在第一章曾介紹過指數的記法。同樣地， $(-\frac{3}{2})^3$  也代表  $(-\frac{3}{2})$  連乘了 3 次，即  $(-\frac{3}{2})^3 = (-\frac{3}{2}) \times (-\frac{3}{2}) \times (-\frac{3}{2}) = -(\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}) = -\frac{27}{8}$ 。

 使用計算機將分數的指數轉換成小數的方法如下，以  $(-\frac{3}{2})^3$  為例：

輸入 3  2  =  3 =，螢幕顯示 。

**隨堂練習**

計算下列各式的值：

(1)  $(-\frac{1}{2})^4$

$$= (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2})$$

$$= + (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = \frac{1}{16}$$

(2)  $(-\frac{1}{2})^3$

$$= (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{2})$$

$$= - (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$$

如同整數的乘法，多個都不為零的分數連乘時，如果其中含有奇數個負數，其乘積為負數；如果其中含有偶數個負數，其乘積為正數，所以我們可以得到下面的結論。

**【負數的指數性質】**

1. 負數的偶數次方為正數。
2. 負數的奇數次方為負數。

**P133****▶ 指數律**

①  $a^m \times a^n = a^{m+n}$

$2^2 \times 2^3$  等於 2 的幾次方呢？

$$\text{因為 } 2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2) = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^{2+3} = 2^5,$$

2 個
3 個
(2+3) 個

所以  $2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$ 。

同理， $(\frac{1}{2})^2 \times (\frac{1}{2})^3 = (\frac{1}{2})^{2+3} = (\frac{1}{2})^5$ 。

我們可以得到：若  $a \neq 0$ ， $m$ 、 $n$  為正整數，

$$a^m \times a^n = (\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_m \text{ 個}) \times (\underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_n \text{ 個}) = \underbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}_{(m+n) \text{ 個}} = a^{m+n}$$

由上述內容可知：底數相同的兩數相乘，其乘積的底數不變，指數為原兩數的指數和。

②  $a^m \div a^n = a^{m-n}$

$3^5 \div 3^2$  等於 3 的幾次方呢？

$$\text{因為 } 3^5 \div 3^2 = \frac{3^5}{3^2} = \frac{\overbrace{3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3}^{5 \text{ 個}}}{\underbrace{3 \times 3}_{2 \text{ 個}}} = \frac{\cancel{3} \times \cancel{3} \times 3 \times 3 \times 3}{\cancel{3} \times \cancel{3}} = 3^{5-2} = 3^3,$$

5 個
剩下 (5-2) 個

所以  $3^5 \div 3^2 = 3^{5-2} = 3^3$ 。

同理， $(\frac{1}{3})^5 \div (\frac{1}{3})^2 = (\frac{1}{3})^{5-2} = (\frac{1}{3})^3$ 。

我們可以得到：若  $a \neq 0$ ， $m$ 、 $n$  為正整數 ( $m > n$ )，

$$a^m \div a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{\overbrace{a \times a \times a \times \cdots \times a}^m \text{ 個}}{\underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_n \text{ 個}} = \frac{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cdots \times a \times a \times \cdots \times a}{\cancel{a} \times \cancel{a} \times \cdots \times \cancel{a}} = a^{m-n}$$

m 個
剩下 (m-n) 個

由上述內容可知：底數相同的兩數相除，其商的底數不變，指數為被除數的指數減去除數的指數。

「 $\frac{7}{8}$ 」，猜一句成語。

**P134****隨堂練習**

搭配習作 P40 基礎題 2(1)、(2)、(4) 自評 P142 第 3 題 (1)、(2)

在下列空格中填入適當的數：

(1)  $(-7)^4 \times (-7)^3$  等於  $-7$  的 7 次方。

(2)  $(\frac{1}{3})^2 \times (\frac{1}{3})^6 = (\frac{1}{3})^\Delta$ ，則  $\Delta =$  8。

(3)  $2^8 \div 2^3$  等於 2 的 5 次方。

(4)  $(-5)^5 \div (-5)^2 = (-5)^\square$ ，則  $\square =$  3。

(5)  $(-\frac{3}{5})^5 \times (-\frac{3}{5})^5 \div (-\frac{3}{5})^3 = (-\frac{3}{5})^\square$ ， $\square =$  7。

如果  $a \neq 0$ ， $m$ 、 $n$  為任意兩個正整數 ( $m > n$ )， $a^m \div a^n = a^{m-n}$  一定成立。那麼當  $m = n$  時，要如何推廣指數符號，才能使  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  仍然成立呢？

$$\text{因為 } 2^3 \div 2^3 = \frac{2^3}{2^3} = \frac{2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = 1,$$

如果用  $a^m \div a^n = a^{m-n}$  來計算，

$$\text{可得 } 2^3 \div 2^3 = 2^{3-3} = 2^0 = 1。 \leftarrow \text{出現「指數為 0」的情形。}$$

為了延續指數為正整數時， $a^m \div a^n = a^{m-n}$  的運算規則，我們規定若  **$a \neq 0$** ，則  **$a^0 = 1$** 。例如： $5^0 = 1$ ， $(-7)^0 = 1$ 。

**【指數律 (一)】**

1. 若  $a \neq 0$ ， $m$ 、 $n$  是任意兩個整數，則  $a^m \times a^n = a^{m+n}$ 。
2. 若  $a \neq 0$ ， $m$ 、 $n$  是任意兩個整數 ( $m > n$  或  $m = n$ )，則  $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 。

**P135**

$$\textcircled{3} (a^m)^n = a^{m \times n}$$

$$\text{例 3 } (a^m)^n = a^{m \times n}$$

搭配習作 P40 基礎題 2(3)、3 自評 P142 第 3 題 (3)

在□中填入適當的數：

$$(1) (2^3)^4 = 2^{\square}$$

$$(2) \left[ \left( -\frac{3}{7} \right)^2 \right]^3 = \left( -\frac{3}{7} \right)^{\square}$$

**解**

$$\begin{aligned} (1) (2^3)^4 &= 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \\ &= 2^{3+3+3+3} \\ &= 2^{3 \times 4} \\ &= 2^{12} \end{aligned}$$

所以□=12。

$$\begin{aligned} (2) \left[ \left( -\frac{3}{7} \right)^2 \right]^3 &= \left( -\frac{3}{7} \right)^2 \times \left( -\frac{3}{7} \right)^2 \times \left( -\frac{3}{7} \right)^2 \\ &= \left( -\frac{3}{7} \right)^{2+2+2} \\ &= \left( -\frac{3}{7} \right)^{2 \times 3} = \left( -\frac{3}{7} \right)^6 \end{aligned}$$

所以□=6。

由例 3 可知：若  $a \neq 0$ ， $(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = a^{3+3} = a^6$ 。所以，若  $a \neq 0$ ， $m$ 、 $n$  為任意兩個整數，則  $(a^m)^n = a^m \times a^m \times \cdots \times a^m = a^{m \times n}$ 。

共有  $n$  個  $a^m$  相乘

### 【指數律 (二)】

如果  $a \neq 0$ ， $m$ 、 $n$  是任意兩個整數，則  $(a^m)^n = a^{m \times n}$ 。

#### 隨堂練習

1. 在下列空格中填入適當的數：

(1) 若  $(11^2)^5 = 11^{\square}$ ，則□= 10。

(2) 若  $9^8 = (3^{\square})^8 = 3^{\triangle}$ ，則□= 2， $\triangle$ = 16。

2. 計算  $5^8 \div (5^2)^3 =$  25。

**P136**

$$④ (a \times b)^m = a^m \times b^m$$

$$\text{例 4 } (a \times b)^m = a^m \times b^m$$

搭配習作 P40 基礎題 3 自評 P142 第 3 題 (4)

在 $\triangle$ 及 $\square$ 中填入適當的數：

$$(1) (2 \times 3)^4 = 2^\triangle \times 3^\square$$

$$(2) \left[ \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{5} \right]^3 = \left(-\frac{3}{2}\right)^\triangle \times \left(\frac{1}{5}\right)^\square$$

**解**

$$\begin{aligned} (1) (2 \times 3)^4 &= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \\ &= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3) \\ &= 2^4 \times 3^4 \end{aligned}$$

所以 $\triangle=4$ ， $\square=4$ 。

$$\begin{aligned} (2) \left[ \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{5} \right]^3 &= \left[ \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{5} \right] \times \left[ \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{5} \right] \times \left[ \left(-\frac{3}{2}\right) \times \frac{1}{5} \right] \\ &= \left[ \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \right] \times \left( \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \right) \\ &= \left(-\frac{3}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \end{aligned}$$

所以 $\triangle=3$ ， $\square=3$ 。

由例 4 可知：若 $a \neq 0$  且  $b \neq 0$ ， $(a \times b)^4 = a^4 \times b^4$ 。

所以，若 $a \neq 0$  且  $b \neq 0$ ， $m$  為任意整數，則

$$\begin{aligned} (a \times b)^m &= \underbrace{(a \times b) \times (a \times b) \times \cdots \times (a \times b)}_{\text{共有 } m \text{ 個 } (a \times b) \text{ 相乘}} \\ &= \underbrace{(a \times a \times \cdots \times a)}_{\text{共有 } m \text{ 個 } a \text{ 相乘}} \times \underbrace{(b \times b \times \cdots \times b)}_{\text{共有 } m \text{ 個 } b \text{ 相乘}} \\ &= a^m \times b^m \end{aligned}$$

**【指數律 (三)】**

若 $a \neq 0$  且  $b \neq 0$ ， $m$  是任意整數，則 $(a \times b)^m = a^m \times b^m$ 。

**P137****隨堂練習**

1. 在下列空格中填入適當的數：

(1) 若  $(5 \times 4)^3 = 5^\Delta \times 4^\square$ ,

則  $\Delta = \underline{3}$ ,  $\square = \underline{3}$ 。

(2) 若  $[(-3) \times 6]^5 = (-3)^\Delta \times 6^\square$ ,

則  $\Delta = \underline{5}$ ,  $\square = \underline{5}$ 。

(3) 若  $[(-7) \times (-9)]^4 = (-7)^\Delta \times (-9)^\square$ ,

則  $\Delta = \underline{4}$ ,  $\square = \underline{4}$ 。

2.  $6^7 \div (2^5 \times 3^5) = \underline{36}$ 。

含指數的分數，也可以下列的方法來計算：

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^3 = \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{(-2)^3}{3^3} = -\frac{8}{27},$$

$$\left(\frac{-2}{3}\right)^4 = \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) = \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}.$$

**【分數的次方】**

如果  $m$  是任意正整數， $a$ 、 $b$  為整數，且  $a \neq 0$ ，則  $\left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{b^m}{a^m}$ 。

**隨堂練習**

判別下列哪些選項的值與  $\left(-\frac{2}{5}\right)^4$  相等？在  $\square$  中打「 $\checkmark$ 」。

$\left(\frac{2}{5}\right)^4$

$-\left(\frac{2}{5}\right)^4$

$-\frac{2^4}{5^4}$

$\frac{2^4}{5^4}$

$\frac{(-2)^4}{5^4}$

$\frac{2^4}{5}$

**P138****例 5** 指數律的運算

計算下列各式的值：

(1)  $3^3 \times 3^5 \div 3^6 + 3^3$

**解**

$$\begin{aligned}
(1) \quad & 3^3 \times 3^5 \div 3^6 + 3^3 \\
& = 3^3 + 5 - 6 + 3^3 \\
& = 3^2 + 3^3 \\
& = 9 + 27 \\
& = 36
\end{aligned}$$

搭配習作 P41 基礎題 4 自評 P143 第 4 題

(2)  $\left(\frac{4}{3}\right)^3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & \left(\frac{4}{3}\right)^3 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3 \\
& = \left(\frac{\overset{2}{4} \times \overset{3}{3}}{\underset{1}{3} \times \underset{2}{2}}\right)^3 \\
& = 2^3 \\
& = 8。
\end{aligned}$$

**隨堂練習**

$$\begin{aligned}
(1) \quad & (-2)^6 \div (-2)^3 \times (-2)^2 \\
& = (-2)^{6-3+2} \\
& = (-2)^5 \\
& = -32
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(3) \quad & 5^4 \times 2^4 - 10^3 \\
& = (5 \times 2)^4 - 10^3 \\
& = 10^4 - 10^3 \\
& = 10000 - 1000 \\
& = 9000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \quad & (5^3)^2 \div 5^5 \times 5^3 \\
& = 5^6 \div 5^5 \times 5^3 \\
& = 5^{6-5+3} \\
& = 5^4 = 625
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \quad & \left(\frac{5}{2}\right)^7 \times \frac{4^2}{5^5} \\
& = \frac{5^7}{2^7} \times \frac{(2^2)^2}{5^5} \\
& = \frac{5^7}{2^7} \times \frac{2^4}{5^5} = \frac{5^2}{2^3} = \frac{25}{8}
\end{aligned}$$

**P139****③分數的四則運算**

對應能力指標 N-7-3、N-7-4、N-7-6

四則運算的混合算式中，如果含有指數的運算，則應先做完指數的運算，然後由左而右，先算乘除，後算加減。當有括號時，應優先計算括號內的算式。

**例 6 分數的四則運算**

搭配習作 P41 基礎題 5 自評 P143 第 5 題(1)

計算下列各式的值：

$$(1) \text{ 計算 } (-2) \times \frac{2}{5} + (-\frac{4}{7}) \times 1\frac{3}{4} \quad (2) 2^3 \div (1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2})$$

**解**

$$\begin{aligned} (1) \quad & (-2) \times \frac{2}{5} + (-\frac{4}{7}) \times 1\frac{3}{4} \\ & = (-\frac{4}{5}) + (-\frac{4}{7}) \times \frac{7}{4} \\ & = (-\frac{4}{5}) + (-1) \\ & = -1\frac{4}{5} \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2) \quad & 2^3 \div (1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}) \\ & = 8 \div (1 - \frac{1}{8}) \\ & = 8 \div \frac{7}{8} \\ & = 8 \times \frac{8}{7} = \frac{64}{7} \end{aligned}$$

**隨堂練習**

計算下列各式的值：

$$\begin{aligned} (1) \quad & (-3\frac{1}{3}) \times (-\frac{3}{10}) + (-\frac{1}{4}) \times 4 \\ & = (-\frac{10}{3}) \times (-\frac{3}{10}) + (-\frac{1}{4}) \times 4 \\ & = 1 + (-1) \\ & = 0 \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2) \quad & (\frac{2}{3})^2 \times (\frac{3}{4} - \frac{5}{8} \times 2) \\ & = \frac{4}{9} \times (\frac{3}{4} - \frac{5}{4}) \\ & = \frac{4}{9} \times (\frac{-2}{4}) = -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

**P140**

在第一章我們學過整數的乘法對加法與減法都具有分配律；事實上，分數的乘法對加法與減法也都具有分配律。

$$\begin{aligned} \text{例如：} \left(100 + \frac{1}{2}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) &= 100 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= (-50) - \frac{1}{4} = -50\frac{1}{4} \end{aligned}$$

**例 7** 分數的分配律

自評 P143 第 5 題(2)

計算  $\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \left(-\frac{11}{8}\right)$  的值。

**解**

$$\begin{aligned} &\left(\frac{3}{2}\right)^3 \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \left(-\frac{11}{8}\right) \\ &= \frac{27}{8} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \left(-\frac{11}{8}\right) \\ &= \frac{3}{5} \times \left[\frac{27}{8} + \left(-\frac{11}{8}\right)\right] \\ &= \frac{3}{5} \times \left[\frac{27+(-11)}{8}\right] \\ &= \frac{3}{5} \times 2 = \frac{6}{5} \end{aligned}$$

**隨堂練習**

計算  $\left(-\frac{1}{8}\right) \times 3^2 + \left(-\frac{1}{8}\right) \times 7$  的值。

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{8}\right) \times 3^2 + \left(-\frac{1}{8}\right) \times 7 \\ &= \left(-\frac{1}{8}\right) \times 9 + \left(-\frac{1}{8}\right) \times 7 \\ &= \left(-\frac{1}{8}\right) \times (9+7) = \left(-\frac{1}{8}\right) \times 16 \\ &= -2 \end{aligned}$$

## 2-4 重點回顧

## 1 倒數

當兩個數的乘積為 1 時，稱這兩個數互為倒數。

例  $(-\frac{2}{3}) \times (-\frac{3}{2}) = 1$ ， $-\frac{2}{3}$  與  $-\frac{3}{2}$  互為倒數。

## 2 正負分數的除法

用「除以一個數等於乘以它的倒數」的方法，將分數除法改為分數乘法再計算。

例  $(-\frac{2}{3}) \div \frac{5}{8} = (-\frac{2}{3}) \times \boxed{\frac{8}{5}}$  ←  $\frac{5}{8}$  的倒數。

## 3 指數律

如果  $a \neq 0$  且  $b \neq 0$ ， $m$ 、 $n$  為任意兩個整數，則：

(1)  $a^m \times a^n = a^{m+n}$       例  $(-5)^2 \times (-5)^4 = (-5)^{2+4} = (-5)^6$

(2)  $a^m \div a^n = a^{m-n}$       例  $(-5)^6 \div (-5)^2 = (-5)^{6-2} = (-5)^4$

(3)  $(a^m)^n = a^{m \times n}$       例  $[(-5)^2]^4 = (-5)^{2 \times 4} = (-5)^8$

(4)  $(a \times b)^m = a^m \times b^m$       例  $[5 \times (-2)]^2 = 5^2 \times (-2)^2$

## 4 指數為 0

如果  $a \neq 0$ ，則  $a^0 = 1$ 。      例  $(-3)^0 = 1$

## 5 分數的次方

如果  $m$  是任意正整數， $a$ 、 $b$  為整數，且  $a \neq 0$ ，則  $(\frac{b}{a})^m = \frac{b^m}{a^m}$ 。

例  $(\frac{2}{3})^4 = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$

## 6 分數的四則運算

(1) 在混合算式中，如果含有指數的運算，則應先做完指數的運算，然後由左而右，先算乘（除），後算加（減）。

(2) 當有括號時，應優先計算括號內的算式。

例  $(\frac{1}{3} - 2) \div \frac{5}{3} - (\frac{1}{2})^2 = (-\frac{5}{3}) \times \frac{3}{5} - \frac{1}{4} = (-1) + (-\frac{1}{4}) = -1\frac{1}{4}$

**P142****2-4 自我評量**

① 填填看：

課 P130 隨堂

(1)  $-\frac{7}{4}$  的倒數是  $-\frac{4}{7}$ 。

(2)  $2\frac{2}{5}$  的倒數是  $\frac{5}{12}$ 。

② 計算下列各式的值：

課 P128、131 隨堂、例 2

(1)  $\frac{2}{5} \times (-\frac{3}{4})$   
 $= -\frac{3}{10}$

(2)  $(-\frac{5}{21}) \div (-\frac{6}{35})$   
 $= (-\frac{5}{21}) \times (-\frac{35}{6}) = \frac{25}{18}$

(2)  $2 \times \frac{7}{8} \div (-1\frac{3}{4})$   
 $= 2 \times \frac{7}{8} \div (-\frac{7}{4})$   
 $= 2 \times \frac{7}{8} \times (-\frac{4}{7}) = -1$

(4)  $(-\frac{3}{16}) \div 2\frac{1}{4} \times (-\frac{8}{3})$   
 $= (-\frac{3}{16}) \div \frac{9}{4} \times (-\frac{8}{3})$   
 $= (-\frac{3}{16}) \times \frac{4}{9} \times (-\frac{8}{3}) = \frac{2}{9}$

③ 在下列□中填入適當的數：

課 P134~136 隨堂、例 3~4

(1)  $(\frac{2}{13})^3 \times (\frac{2}{13})^5 \times (\frac{2}{13}) = (\frac{2}{13})^\square$ ,  $\square = 9$ 。

(2)  $3^5 \div 3^2 = 3^\square$ ,  $\square = 3$ 。

(3)  $[(-\frac{3}{7})^2]^4 = (-\frac{3}{7})^\square$ ,  $\square = 8$ 。

(4)  $(3 \times 5)^4 = 3^\square \times 5^\square$ ,  $\square = 4$ 。

**P143**

4 利用指數律計算下列各式的值：

課 P138 例 5

$$(1) 5^2 \times 2^2 - 10^2$$

$$= (5 \times 2)^2 - 10^2$$

$$= 10^2 - 10^2$$

$$= 0$$

$$(2) \left(\frac{9}{5}\right)^3 \times \left(-\frac{5}{3}\right)^4$$

$$= \left(\frac{9}{5}\right)^3 \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{9^3}{5^3} \times \frac{5^4}{3^4}$$

$$= \frac{(3^2)^3}{5^3} \times \frac{5^4}{3^4} = \frac{3^6}{5^3} \times \frac{5^4}{3^4}$$

$$= 3^2 \times 5 = 45$$

5 計算下列各式的值：

課 P139~140 例 6、7

$$(1) 3\frac{3}{10} \div \left(-1\frac{1}{2}\right) - 4 \times \left(-2\frac{3}{4}\right) \quad (2) 5^3 \times \frac{2}{13} - \frac{2}{13} \times 60$$

$$= \frac{33}{10} \div \left(-\frac{3}{2}\right) - 4 \times \left(-\frac{11}{4}\right)$$

$$= \frac{33}{10} \times \left(-\frac{2}{3}\right) + 11$$

$$= \left(-\frac{11}{5}\right) + 11$$

$$= \left(-\frac{11}{5}\right) + \frac{55}{5} = \frac{44}{5}$$

$$= 125 \times \frac{2}{13} - \frac{2}{13} \times 60$$

$$= \frac{2}{13} \times (125 - 60)$$

$$= \frac{2}{13} \times 65$$

$$= 10$$

**P144**

**自我挑戰** 本單元為統整課程，由學生自行挑戰，教師可視班級情況決定如何運用。

1. 哥德巴赫 (Christian Goldbach, 1690-1764)，德國人，1742 年 6 月 7 日寫信給大數學家歐拉 (Leonhard Euler, 1707-1783)，提出一個猜想：

任何大於 2 的偶數，都能夠表示為兩個質數的和。

同年 6 月 30 日，歐拉回信表示他雖不能證明此猜想，但他相信這是完全正確的。這就是著名的哥德巴赫猜想 (Goldbach's conjecture)。驗證 98 這個偶數是否符合哥德巴赫猜想？如果是，請將 98 寫成 2 個質數的和。

**解**

因為  $98 = 19 + 79 = 31 + 67 = 37 + 61$ ，

可以寫成 2 個質數的和，所以 98 這個偶數符合哥德巴赫猜想。

2. 美國職棒 (MLB) 比賽中，投球局數 (innings pitched) 表示投手完成的投球局數，是以投手在投球過程中，打擊者及跑壘員出局的人次來計算。三個人出局為一個投球局數，二個人出局為三分之二局，一個人出局為三分之一局。其中，投手的「三振率減去保送率」是很重要的一個觀察指標。

$$\text{三振率} = \text{三振總次數} \div \text{投球局數} \times 9$$

$$\text{保送率} = \text{保送總次數} \div \text{投球局數} \times 9$$

已知某場比賽中，投手失常共投了  $5\frac{1}{3}$  局，三振了 4 位打者，保送了 7 位打者，

則此投手的三振率減去保送率是多少？

**解**

$$\text{三振率} = 4 \div 5\frac{1}{3} \times 9 = 4 \div \frac{16}{3} \times 9 = 4 \times \frac{3}{16} \times 9 = \frac{108}{16}，$$

$$\text{保送率} = 7 \div 5\frac{1}{3} \times 9 = 7 \div \frac{16}{3} \times 9 = 7 \times \frac{3}{16} \times 9 = \frac{189}{16}，$$

$$\text{三振率} - \text{保送率} = \frac{108}{16} - \frac{189}{16} = -\frac{81}{16}。$$

答：  $-\frac{81}{16}$ 。

解答 P228

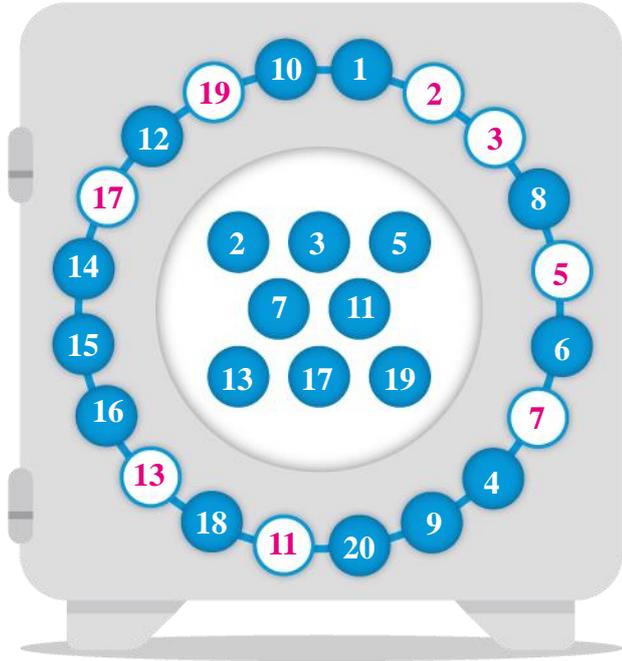
**P145**

**趣學數學**

趣學數學本單元為配合此章所設計的趣味問題，由學生自行練習，教師可視班級情況而自行決定如何運用。

**① 配合 2-1**

偵查小隊發現了一個祕密的箱子，箱子上設置了一組密碼鎖，只要將中間小於 20 的 8 個質數分別輸入圓圈中，使得任意相鄰兩個圓圈內的數字和皆為質數，就能開啟箱子，取得犯罪資料。該如何破解呢？一起動動腦吧！



規則：

1. 將環內的 8 個質數分別填入圓圈中。
2. 使得任意相鄰兩個圓圈內的數字和，皆為質數，即可開啟箱子。

**② 配合 2-3**

有隻可愛的貓頭鷹藏在右邊的分數方格中，你看的到牠在哪裡嗎？

規則：

1. 將  $\frac{1}{2}$  的等值分數方格塗上顏色。
2. 將  $-\frac{3}{5}$  等值分數方格塗上顏色。
3. 將  $\frac{1}{4}$  等值分數方格塗上顏色。
4. 將  $-\frac{1}{3}$  的等值分數方格塗上顏色。

每個步驟塗上不同顏色，會更容易發現喔！

$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{13}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{13}$
$\frac{7}{9}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{7}{14}$	$\frac{5}{13}$
$\frac{2}{5}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{6}{11}$
$\frac{2}{10}$	$\frac{12}{24}$	$\frac{4}{5}$		$\frac{8}{16}$	$\frac{4}{9}$		$\frac{8}{16}$	$\frac{5}{11}$
$\frac{3}{7}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{6}{7}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{9}{10}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{10}$	$-\frac{6}{10}$	$\frac{2}{4}$	$-\frac{2}{6}$	$\frac{6}{16}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{2}{4}$
$\frac{3}{6}$	$\frac{8}{16}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{20}$
$\frac{1}{7}$	$\frac{6}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{7}{27}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{7}$
$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{5}{6}$	$-\frac{4}{12}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$

解答 P230

## 數學萬花筒

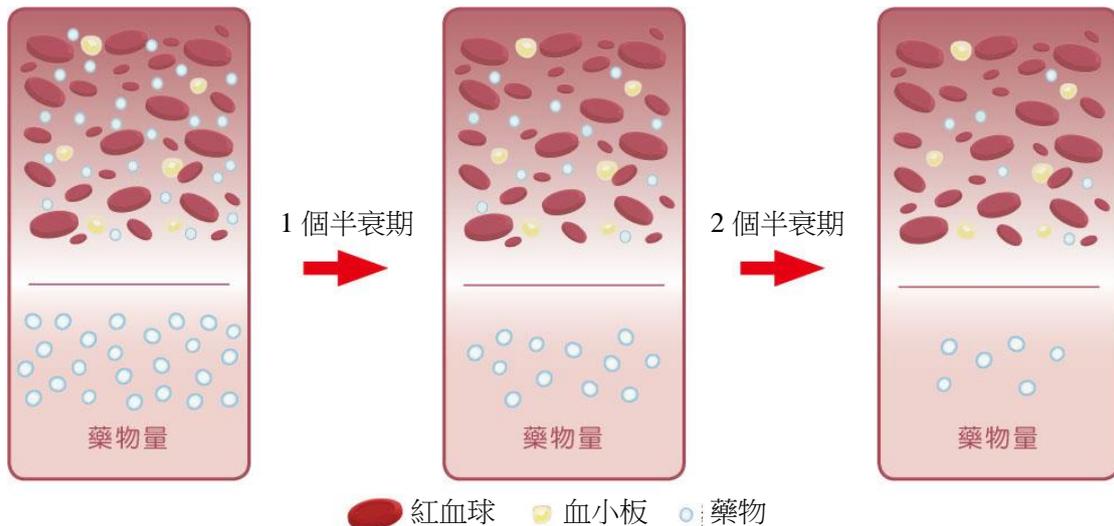
## 藥物半衰期

藥物在人體內經過正常的代謝程序，最終都會排出體外，只是代謝時間的長短每種藥物皆不同。人體服用藥物之後，藥物在身體血液中的濃度下降為原來的一半所經過的時間，稱為藥物半衰期。

一種藥物經過 1 個「半衰期」的時間，其血中藥物濃度會下降一半，經過 2 個「半衰期」，只會剩下濃度的  $\frac{1}{4}$   $[ = (\frac{1}{2})^2 ]$ ；經過 3 個「半衰期」，血中藥物濃度就只剩下原來濃度的  $\frac{1}{8}$   $[ = (\frac{1}{2})^3 ]$ ；而經過 5 個「半衰期」，血中藥物濃度就只剩下原來濃度的  $\frac{1}{32}$   $[ = (\frac{1}{2})^5 ]$ ，此時濃度已經非常低，通常以 5 個「半衰期」當做藥物排出體外的時間。7 個「半衰期」後，濃度就只剩下原來濃度的  $\frac{1}{128}$   $[ = (\frac{1}{2})^7 ]$ ，表示已排出 99% 以上。

每一種藥物的半衰期並不相同，為了維持藥物在體內的作用，就必須按時服藥。有的藥物是一日一次，有的藥物是一日數次。很多人怕吃太多藥，藥物會累積在體內傷害身體，其實只要代謝功能正常，按照醫師的指示用藥，就可不用擔心。

在下列各圖中，其下半部為上半部藥物的示意圖，用以顯示藥物的濃度隨著身體的代謝時間逐漸減少。



藥物的濃度隨著身體代謝時間逐漸減少示意圖