2-2 最大公因數與最小公倍數

①最大公因數

對應能力指標 N-7-2

因為男女不同帳篷，且每個帳篷的人數要一樣，所以每個帳篷內的人數是 12 的因數，也必須是 18 的因數。

12 的因數有 1、2、3、4、6、12，

18 的因數有 1、2、3、6、9、18，

其中 1、2、3、6 是 12 和 18 的**公因數**，而 6 是這些公因數中最大的一個，稱為**最大公因數**，記為（12 , 18）＝6。因此每個帳篷裡的人數最多有 6 人。

a、b 為任意兩個正整數，這兩數的最大公因數記為（a , b）。若（a , b）＝1，則稱 a 與 b **互質**。例如：（15 , 28）＝1，則稱 15 和 28 兩數互質。

隨堂練習

1. (1) 列出 70 和 84 的因數，再圈出 70 和 84 的公因數，並求出最大公因數。

70 的因數有 1、2、5、7、10、14、35、70

84 的因數有 1、2、3、4、6、7、12、14、21、28、42、84

最大公因數是 14。

(2) 承上題，判別這些公因數是否為最大公因數的因數？ 是

2. 下列哪些數與 35 互質？在□中打「✓」。 自評 P114 第 1 題

☑ 3　　□ 5　　□ 7　　☑ 24

「我丟球過去，你丟球過來」，猜 2 個字的數學名詞。

P98

▶利用短除法求最大公因數

國小時曾利用短除法求得兩數的最大公因數，方法如下：

求 126 和 210 兩數的最大公因數。

$$
\begin{array}{r|rr}
2 & 126 & 210 \\
\hline
3 & 63 & 105 \\
\hline
7 & 21 & 35 \\
\hline
 & 3 & 5
\end{array}
$$

←126、210 有公因數 2，將兩數同除以 2。

←63、105 有公因數 3，將兩數同除以 3。

←21、35 有公因數 7，將兩數同除以 7。

←3、5 的公因數只有 1。

（126 , 210）＝2 × 3 × 7＝42

> 126 ＝$\boxed{2}$ × $\boxed{3}$ × $\boxed{7}$ × 3，
> 210 ＝$\boxed{2}$ × $\boxed{3}$ × $\boxed{7}$ × 5，
> 3 與 5 互質。

同樣的，三個整數 a、b、c 共同的因數稱為這三個整數的公因數，在這些公因數中，最大的一個稱為最大公因數，記為（a , b , c）。例如：72、120、84 三數的最大公因數，可記為（72 , 120 , 84）。

由於三個數的最大公因數，同時也會是其中任兩個數的公因數，所以要求（72 , 120 , 84）時，我們可以先求出前兩個數 72 和 120 的最大公因數 24，再求 24 和第 3 個數 84 的最大公因數 12，此時即可得 72、120、84 的最大公因數為 12。

探索活動　三個數的最大公因數

計算（（72 , 120）, 84）與（72 ,（120 , 84））的值，並比較兩者是否相等。

（（72 , 120）, 84）	（72 ,（120 , 84））
解 （（72 , 120）, 84） ＝（24 , 84） ＝12	解 （72 ,（120 , 84）） ＝（72 , 12） ＝12

☑相等
☐不相等

由探索活動可知，求三個數的最大公因數時，不論先求前兩個數的最大公因數或後兩個數的最大公因數，最後的結果都是 12。因此，當 a、b、c 為三個整數時，（a , b , c）＝（（a , b）, c）＝（a ,（b , c））。

隨堂練習 搭配習作 P31 基礎題 3

完成下列空格，以求 24、36、42 的最大公因數：

(1)（24 , 36 , 42）
＝（（24 , 36）, 42）
＝（ 12 , 42）
＝ 6

(2)（24 , 36 , 42）
＝（24 ,（36 , 42））
＝（24 , 6 ）
＝ 6

三個數以上（含三個數）也可以利用短除法求最大公因數。

例如：求 72、120、84 三數的最大公因數。

$$\begin{array}{r|rrr}
2 & 72 & 120 & 84 \\ \hline
2 & 36 & 60 & 42 \\ \hline
3 & 18 & 30 & 21 \\ \hline
 & 6 & 10 & 7
\end{array}$$

72、120、84 有公因數 2，將三數同除以 2。
36、60、42 有公因數 2，將三數同除以 2。
18、30、21 有公因數 3，將三數同除以 3。
6、10、7 的公因數只有 1。

（72 , 120 , 84）＝ 2 × 2 × 3 ＝12

利用短除法求最大公因數，其過程中的每一個步驟都要除以大於 1 的公因數，**直到它們的公因數只有 1**，而這些公因數的連乘積就是最大公因數。

隨堂練習 搭配習作 P30 基礎題 1　自評 P114 第 2 題(1)、(2)、(5)

利用短除法求下列各組數的最大公因數：

(1) 360、510

（360 , 510）
＝2×3×5
＝30

$$\begin{array}{r|rr}
2 & 360 & 510 \\ \hline
3 & 180 & 255 \\ \hline
5 & 60 & 85 \\ \hline
 & 12 & 17
\end{array}$$

(2) 72、54、126

（72 , 54 , 126）
＝2×3×3
＝18

$$\begin{array}{r|rrr}
2 & 72 & 54 & 126 \\ \hline
3 & 36 & 27 & 63 \\ \hline
3 & 12 & 9 & 21 \\ \hline
 & 4 & 3 & 7
\end{array}$$

P100

▶利用標準分解式求最大公因數

探索活動　標準分解式求最大公因數

1. 已知 $A=2^3$，$B=2^4$，若 A 與 B 皆可被 $2^{\triangle}$整除，則△最大可為__3__。

2. 已知 $C=2\times2\times2\times3=2^3\times3$，

　　$D=2\times2\times2\times2\times5=2^4\times5$，

　則 C 與 D 的最大公因數 $(C,D)=$__2^3__。

3. 已知 $E=2^4\times3\times7$，

　　$F=2^3\times3^2\times5$，

　(1) 若 E 與 F 皆可被 $2^{\triangle}$整除，則△最大可為__3__。

　(2) 若 E 與 F 皆可被 $3^{\square}$整除，則□最大可為__1__。

　(3) E 與 F 皆可被 $2^{\triangle}\times3^{\square}$整除，則△最大可為__3__，□最大可為__1__。

　(4) E 與 F 的最大公因數 $(E,F)=$__$2^3\times3$__。

在探索活動中，我們也可以直接觀察兩數的標準分解式，求此兩數的最大公因數 $2^3\times3$。

$$E=2^4\times3^1\qquad\times7$$
$$F=2^3\times3^2\times5$$

3 是最小的次方，取 2^3　　1 是最小的次方，取 3^1　　沒有共同的質因數　　沒有共同的質因數

我們發現：**要找到此兩數的最大公因數，可由此兩數的共同質因數 2、3，取指數（次方）最小者相乘而得**。

【利用標準分解式求最大公因數】

求 (a,b) 時，可先求出 a 和 b 的標準分解式：

(1) 如果可以找出兩者共同的質因數，則分別由**共同質因數中**，取**指數（次方）最小者**相乘，即為 a 和 b 的最大公因數。

(2) 如果找不到共同質因數，則 a 和 b 的最大公因數為 1，即 a 和 b 互質。

P101

三個整數的最大公因數，同樣也可以利用標準分解式求得。

例如：

$$
\begin{aligned}
A&=2^4\times 3^5\times 5\\
B&=2^5\times 3^3\times 7\\
C&=2^6\times 3^2\times 7\times 11
\end{aligned}
$$

4 是最小的次方，取 2^4

2 是最小的次方，取 3^2

5 不是三數共同質因數

7 不是三數共同質因數

11 不是三數共同質因數

因此（A,B,C）$=2^4\times 3^2$。

搭配習作 P31 基礎題 5

例 1 利用標準分解式求最大公因數

自評 P114 第 2 題(3)、(4)、(6)

求下列各組數的最大公因數，並以標準分解式表示。

(1) 504、$2^2\times 3^3\times 5^2\times 7\times 11^2$

(2) $2^3\times 3^2\times 5\times 7$、$2^2\times 3\times 5^2\times 11$、$2^2\times 3^3\times 5\times 11$

解

(1) $504=2^3\times 3^2\times 7^1$

$2^2\times 3^3\times 5^2\times 7^1\times 11^2$

$\downarrow$

$2^2\times 3^2\times 7$

所以兩數的最大公因數為 $2^2\times 3^2\times 7$。

(2) $2^3\times 3^2\times 5^1\times 7$

$2^2\times 3^1\times 5^2\times 11$

$2^2\times 3^3\times 5^1\times 11$

$\downarrow$

$2^2\times 3\times 5$

所以三數的最大公因數為 $2^2\times 3\times 5$。

隨堂練習

求下列各組數的最大公因數，並以標準分解式表示。

(1) $2^3\times 3^2\times 5$、$2^2\times 3\times 5^2\times 7$

$2^2\times 3\times 5$

(2) $2^2\times 3\times 7$、$2\times 3\times 5^2\times 7$、$2^3\times 3^2\times 5$

2×3

「one、two、three」，猜 2 個字的數學名詞。

P102

例 2 最大公因數的應用問題

搭配習作 P32 基礎題 6　自評 P115 第 4 題

有一張壁報紙，長 102 公分，寬 72 公分，學藝股長想將此張壁報紙裁成大小相同的正方形紙片，且沒有剩下任何紙片，則正方形的邊長最大是多少公分？此時可裁出多少張正方形紙片？

思路分析

(1) 因為要將壁報紙裁成大小相同的正方形紙片，所以正方形紙片的邊長可從 102、72 的所有公因數來考慮。

(2) 正方形邊長要最大，所以邊長取它們的最大公因數。

解

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 102 & 72 \\ \hline 3 & 51 & 36 \\ \hline & 17 & 12 \end{array}$$

（102 , 72）＝2 x 3＝6

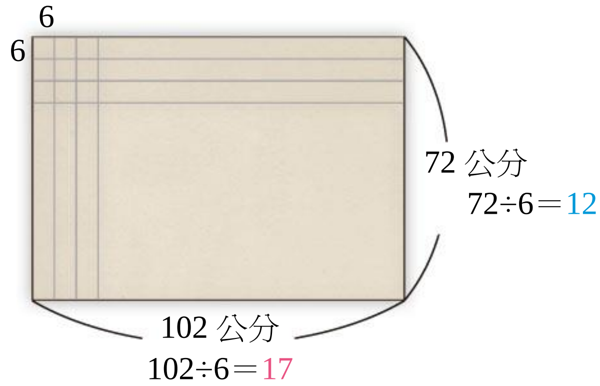
即正方形紙片的邊長最大為 6 公分。

102 ÷ 6＝17

72 ÷ 6＝12

17 x 12＝204

因此可裁出 204 張正方形紙片。



隨堂練習

艾美有一塊長方形的布，長 144 公分，寬 84 公分。艾美想裁成大小相同的正方形來做杯墊，且不浪費任何布料，則正方形的邊長最大為多少公分？可裁出多少塊正方形杯墊？

（144 , 84）＝2 x 2 x 3＝12

即正方形杯墊的邊長最大為 12 公分。

144 ÷ 12＝12，84 ÷ 12＝7

12 x 7＝84

因此可裁出 84 塊正方形杯墊。

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 144 & 84 \\ \hline 2 & 72 & 42 \\ \hline 3 & 36 & 21 \\ \hline & 12 & 7 \end{array}$$

P103

例 3 **最大公因數的應用問題** 搭配習作 P32 基礎題 6

有一個三角形的公園，三邊長分別是 140 公尺、154 公尺與 168 公尺，現在要在公園的周圍種樹，相鄰兩棵樹的距離相等，且公園的三個頂點也要種樹，則最少要種幾棵樹？

思路分析

(1) 因為相鄰兩棵樹的距離相等，且公園的三個頂點也要種樹，所以相鄰兩棵樹的距離可從 140、154 與 168 的所有公因數來考慮。

(2) 樹的數目要最少，所以樹距取它們的最大公因數。

(3) 由圖可看成每邊的一端種、一端不種，即有幾個間隔，就有幾棵樹。

解

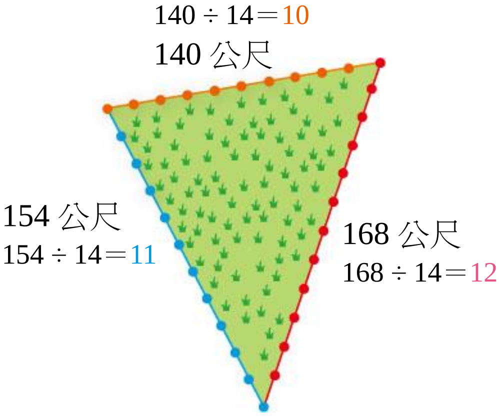
2	140	154	168
7	70	77	84
	10	11	12

（140 , 154 , 168）

＝2×7＝14（公尺）

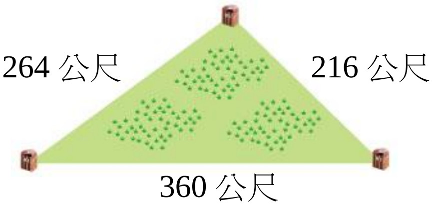
10＋11＋12＝33

所以最少要種 33 棵樹。



隨堂練習

有一個三角形的公園，三邊長分別是 216 公尺、264 公尺與 360 公尺，現在要在公園的周圍種樹，公園的三個頂點不種樹而設置垃圾桶，若相鄰的樹與樹，或樹與垃圾桶距離相等，則最少要種幾棵樹？



（216 , 264 , 360）＝2×2×2×3＝24

216 ÷ 24＝9

264 ÷ 24＝11

360 ÷ 24＝15

9＋11＋15－3＝32（棵）。

2	216	264	360
2	108	132	180
2	54	66	90
3	27	33	45
	9	11	15

P104

①最小公倍數

對應能力指標 N-7-2

國小時曾學過：兩個整數共同的倍數稱為這兩個整數的**公倍數**，在這些公倍數中，最小的一個稱為**最小公倍數**。例如：

12 的倍數有 12、24、36、48、60、72、84、96、、120、132、144、……，

18 的倍數有 18、36、54、72、90、108、126、144、162、……，

其中 36、72、108、144、……都是 12 和 18 的公倍數，而 36 是這些公倍數中最小的一個，所以 36 是 12 和 18 的最小公倍數，記為〔12 , 18〕＝36。

a、b 為任意兩個正整數，這兩數的最小公倍數記為〔a , b〕。

隨堂練習

1. 列出 100 以內 9 和 15 的倍數，再圈出 9 和 15 的公倍數，並求出最小公倍數。

   9 的倍數有 9、18、27、36、㊺、54、63、72、81、⑳、99，

   15 的倍數有 15、30、㊺、60、75、⑳，

   最小公倍數是 45。

2. 承上題，判別這些公倍數是否皆為最小公倍數的倍數？

   是

▶利用短除法求最小公倍數

國小時曾經學過利用短除法求 126 和 108 的最小公倍數，方法如下：

$$\begin{array}{r|rr}
2 & 126 & 108 \\ \hline
3 & 63 & 54 \\ \hline
3 & 21 & 18 \\ \hline
 & 7 & 6
\end{array}$$

← 126、108 有公因數 2，將兩數同除以 2。

← 63、54 有公因數 3，將兩數同除以 3。

← 21、18 有公因數 3，將兩數同除以 3。

← 7、6 的公因數只有 1。

因此（126 , 108）＝ 2 × 3 × 3 × 7 × 6 ＝756。

從上面的說明可知，利用短除法要求兩數的最小公倍數時，其過程就是在每一個步驟都除以大於 1 的公因數，直到除了 1 以外沒有其他公因數為止，而這兩個數的最小公倍數就是這些公因數與最下面一層兩數的連乘積。

P105

隨堂練習　　搭配習作 P30 基礎題 2(1)、(2)　自評 P114 第 3 題 (1)、(2)

求下列各組數的最小公倍數：

(1) 40、64

〔40，64〕
＝2×2×2×5×8
＝320

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 40 & 64 \\ \hline 2 & 20 & 32 \\ \hline 2 & 10 & 16 \\ \hline & 5 & 8 \end{array}$$

(2) 14、15

〔14，15〕
＝14×15
＝210

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 14 & 15 \\ \hline & 14 & 15 \end{array}$$

補給站　最大公因數及最小公倍數與兩數乘積的關係

在進行短除法求兩數的最大公因數與最小公倍數時，你是否有發現它們和兩數之間存在一種特殊的關係呢？

❶ 當兩數互質時，以 2、3 為例：

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 2 & 3 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

（2，3）＝1

〔2，3〕＝2×3

所以（2，3）×〔2，3〕
＝1×（2×3）
＝2×3

❷ 當兩數不互質時，以 8、12 為例：

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 8 & 12 \\ \hline 2 & 4 & 6 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

（8，12）＝2×2

〔8，12〕＝2×2×2×3

所以（8，12）×〔8，12〕
＝（2×2）×（2×2×2×3）
＝（2×2×2）×（2×2×3）
＝8×12

由上得到，兩數的**最大公因數×最小公倍數＝兩數的乘積**。

請你再舉不同的例子看看，這個關係是否成立？

「小明身體的後面有 123」，猜 2 個字的數學名詞。

P106

同樣的，三個整數 a、b、c 共同的倍數稱為這三個整數的公倍數，在這些公倍數中，最小的一個稱為最小公倍數，記為〔a, b, c〕。例如：8、12、10 三數的最小公倍數，可記為〔8 , 12 , 10〕。

由於三個數的最小公倍數同時也會是其中任兩個數的公倍數，所以要求〔8 , 12 , 10〕時，我們可以先求出前兩個數 8 與 12 的最小公倍數 24，再求 24 與第三個數 10 的最小公倍數 120，此時即可得 8、12、10 的最小公倍數為 120。

探索活動　三個數的最大公因數

計算〔〔8 , 12〕, 10〕與〔8 ,〔12 , 10〕〕的值，並比較兩者是否相等。

〔〔8 , 12〕, 10〕	〔8 ,〔12 , 10〕〕
解 〔〔8 , 12〕, 10〕 ＝〔24 , 10〕 ＝120	解 〔8 ,〔12 , 10〕〕 ＝〔8 , 60〕 ＝120

☑相等
☐不相等

由探索活動可知，求三個數的最小公倍數時，不論先求前兩個數的最小公倍數或後兩個數的最小公倍數，最後的結果都是 120。因此，當 a、b、c 為三個整數時，〔a, b, c〕＝〔〔a, b〕, c〕＝〔a ,〔b, c〕〕。

隨堂練習　　搭配習作 P31 基礎題 3

完成下列空格，以求出 24、30、42 的最小公倍數：

(1)〔24 , 30 , 42〕
＝〔〔24 , 30〕, 42〕
＝〔 120 , 42〕
＝ 840

(2)〔24 , 30 , 42〕
＝〔24 ,〔30 , 42〕〕
＝〔24 , 210 〕
＝ 840

P107

利用短除法可以簡記上述的過程，求得 8、12、10 的最小公倍數。方法如下：

步驟 1： 先將三數的公因數提出來，直到三數已無 1 之外的公因數。

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 8 & 12 & 10 \\ \hline & 4 & 6 & 5 \end{array}$$

← 8、12、10 都含有公因數 2。

步驟 2： 再逐步將兩數的公因數提出，直到任意兩數已無 1 之外的公因數。

$$\begin{array}{r|r|lll} 2 & & 8 & 12 & 10 \\ \hline & 2 & 4 & 6 & 5 \\ \cline{2-5} & & 2 & 3 & 5 \end{array}$$

← 4、6、5 三數已無 1 之外的公因數，但 4、6 含有公因數 2。

← 2、3、5 任意兩數已無 1 之外的公因數。

因此（8 , 12 , 10）$=2\times2\times2\times3\times5=120$ ← 將所有公因數與最下面一層數相乘。

說明

因為〔8 , 12 , 10〕＝〔〔8 , 12〕, 10〕，
8、12 的最小公倍數是 $2\times2\times2\times3$，可得
〔〔8 , 12〕, 10〕＝〔$2\times2\times2\times3$, 2×5〕，所以
8、12、10 的最小公倍數是 $2\times2\times2\times3\times5$。

$$\begin{array}{r|r|ll} 2 & & 8 & 12 \\ \hline & 2 & 4 & 6 \\ \cline{2-4} & & 2 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 10 \\ \hline & 5 \end{array}$$

在**步驟 1** 中，$2\times4\times6\times5=2\times(2\times2)\times(2\times3)\times5$ 並不是 8、12、10 的最小公倍數，因此用短除法求最小公倍數時，當執行完**步驟 1** 後，若其中兩數都有大於 1 的公因數時，就必須再執行**步驟 2**，提出它們的公因數，直到兩兩互質為止。

$$\begin{array}{r|lll} 2 & 8 & 12 & 10 \\ \hline & 4 & 6 & 5 \end{array}$$

所以利用短除法要求三數的最小公倍數時，其過程中的每一個步驟都要除以這些數的公因數，當這些數沒有大於 1 的公因數時，再除以任意兩數的公因數，**直到這幾個數兩兩互質為止**。

解答：倍數（背後有數字）。

P108

隨堂練習 　　搭配習作 P30 基礎題 2(3)、(4)　自評 P115 第 3 題 (5)

已知小明利用短除法做 28、36、48 的最大公因數如右，且過程無誤，繼續完成此短除法，並求這三個數的最小公倍數。

$$
\begin{array}{r|rrr}
2 & 28 & 36 & 48 \\ \hline
2 & 14 & 18 & 24 \\ \hline
3 & 7 & 9 & 12 \\ \hline
 & 7 & 3 & 4
\end{array}
$$

$[28, 36, 48] = 2\times2\times3\times7\times3\times4$

$= 2^4\times3^2\times7$（或 1008）

▶利用標準分解式求最小公倍數

在求 $2^4\times3\times7$ 和 $2^3\times3^2\times5$ 的最小公倍數時，我們可用短除法計算：

$$
\begin{array}{c}
 \\
\overset{2\times2\times2}{\downarrow}\ 2^3 \\
\quad 3
\end{array}
\begin{array}{|cc}
\overset{2\times2\times2\times2}{\downarrow}\ 2^4\times3\times7 & \overset{2\times2\times2}{\downarrow}\ 2^3\times3^2\times5 \\ \hline
\multicolumn{1}{|c}{2\times3\times7} & 3^2\times5 \longleftarrow 3\times3 \\ \hline
2\times7 & 3\times5 \longleftarrow 2\times7、3\times5\text{ 的公因數只有 }1\text{。}
\end{array}
$$

$2^4\times3\times7 = 2^3\times3\times2\times7$

$2^3\times3^2\times5 = 2^3\times3\times3\times5$

因此 $[2^4\times3\times7, 2^3\times3^2\times5] = 2^3\times3\times2\times7\times3\times5$

$= 2^4\times3^2\times5\times7$

我們也可以直接觀察兩數的標準分解式，求此兩數的最小公倍數 $2^4\times3^2\times5\times7$。

$$
\begin{array}{lllll}
A = & 2^4 & \times\ 3^1 & & \times\ 7^1 \\
B = & 2^3 & \times\ 3^2 & \times\ 5^1 & \\
 & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\
 & \text{4 是最小的} & \text{2 是最大的} & \text{1 是最小的} & \text{1 是最大的} \\
 & \text{次方，取 }2^4 & \text{次方，取 }3^2 & \text{次方，取 }5^1 & \text{次方，取 }7^1
\end{array}
$$

我們發現：**要找到此兩數的最小公倍數，可由此兩數的全部質因數 2、3、5、7，分別取指數（次方）最大者相乘而得**。

P109

【利用標準分解式求最小公倍數】

如求〔a , b〕時，可先求出 a 和 b 的標準分解式，找出兩者**全部的質因數**，再分別取**指數（次方）最大者**相乘，即為 a 和 b 的最小公倍數。

搭配習作 P31 基礎題 5
自評 P114 第 3 題(3)、(4)

例 4　利用標準分解式求兩數的最小公倍數

求下列各組數的最小公倍數，並以標準分解式表示。

(1) $2^5\times3\times5$、$2^4\times5\times7^2$　　(2) 540、$2^3\times3^2\times7$

解

(1)
$$\begin{array}{ccccccc} 2^5 & \times & 3^1 & \times & 5^1 & & \\ 2^4 & \times & & \times & 5^1 & \times & 7^2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 2^5 & \times & 3 & \times & 5 & \times & 7^2 \end{array}$$

所以兩數的最小公倍數為
$2^5\times3\times5\times7^2$。

(2)
$$\begin{array}{lccccccc} 540= & 2^2 & \times & 3^3 & \times & 5^1 & & \\ & 2^3 & \times & 3^2 & & & \times & 7^1 \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & 2^3 & \times & 3^3 & \times & 5 & \times & 7 \end{array}$$

所以兩數的最小公倍數為
$2^3\times3^3\times5\times7$。

隨堂練習

求下列各組數的最小公倍數，並以標準分解式表示。

(1) $2^3\times3^4\times5\times7^2$、$2^5\times3^2\times7$

$2^5\times3^4\times5\times7^2$

(2) $2\times3\times7^3$、840

$840=2^3\times3\times5\times7$

所以〔$2\times3\times7^3$, $2^3\times3\times5\times7$〕

$=2^3\times3\times5\times7^3$

P110

三個整數的最小公倍數，同樣也可以利用標準分解式求得。要找三數的最小公倍數，可先分別將三數寫成標準分解式，找出三者全部的質因數，再把三數所有質因數中，分別取指數（次方）最大者相乘，即為三數的最小公倍數。

例如：

$$\begin{array}{lllll} A=2^4 & \times 3^5 & \times 5^1 & & \\ B=2^5 & \times 3^3 & & \times 7^2 & \\ C=2^6 & \times 3^2 & & \times 7^1 & \times 11^1 \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \end{array}$$

6 是最大的次方，取 2^6　5 是最大的次方，取 3^2　1 是最大的次方，取 5^1　2 是最大的次方，取 7^2　1 是最大的次方，取 11^1

因此〔A，B，C〕$=2^6\times3^5\times5\times7^2\times11$。

搭配習作 P31 基礎題 5
自評 P115 第 3 題(6)

例 5　利用標準分解式求三數的最小公倍數

求下列各組數的最小公倍數，並以標準分解式表示。

(1) $2^5\times3$、$2^3\times5$、$2^3\times7$　　(2) $2^3\times5^2\times7$、$2^3\times5\times11$、$2^2\times7\times11$

解

(1)
$$\begin{array}{cccc} 2^5 & \times 3^1 & & \\ 2^3 & & \times 5^1 & \\ 2^3 & & & \times 7^1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2^5 & \times 3 & \times 5 & \times 7 \end{array}$$

所以三數的最小公倍數為 $2^5\times3\times5\times7$。

(2)
$$\begin{array}{cccc} 2^3 & \times 5^2 & \times 7^1 & \\ 2^3 & \times 5^1 & & \times 11^1 \\ 2^2 & & \times 7^1 & \times 11^1 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2^3 & \times 5^2 & \times 7 & \times 11 \end{array}$$

所以三數的最小公倍數為 $2^3\times5^2\times7\times11$。

隨堂練習

求下列各組數的最小公倍數，並以標準分解式表示。

(1) $3^4\times7$、$3^3\times13$、$3^3\times19$

$3^4\times7\times13\times19$

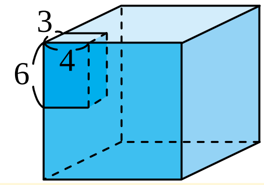
(2) $2^2\times7^2$、$2\times3\times7^2$、$3^2\times7^2$

$2^2\times3^2\times7^2$

P111

例 6 **最小公倍數的應用問題** 搭配習作 P32 基礎題 7

如果一個正方體可以切割成邊長分別為 3 公分、4 公分、6 公分的小長方體，剛好可切割完而沒有剩下，則此正方體的邊長最小是多少公分？



思路分析

(1) 正方體的邊長必須被 3、4、6 整除，所以是 3、4、6 的公倍數。

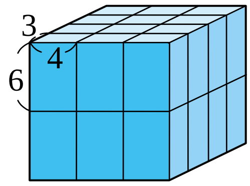
(2) 因此最小的邊長就是 3、4、6 的最小公倍數。

解

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 3 & 4 & 6 \\ \hline 3 & 3 & 2 & 3 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

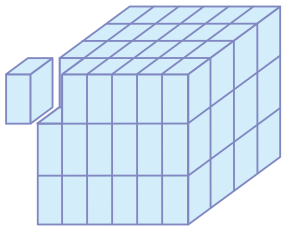
〔3，4，6〕＝2×3×1×2×1＝12

所以正方體的邊長最小是 12 公分。



隨堂練習

方妮用長 6 公分、寬 4 公分、高 8 公分的積木堆成一個實心的正方體，所有的積木都依相同方向排列，則這個正方體的邊長至少是多少公分？共用去多少塊積木？



〔6，4，8〕＝2×2×3×1×2＝24

24÷6＝4，24÷4＝6，24÷8＝3

4×6×3＝72

所以正方體的邊長至少是 24 公分，共用去 72 塊積木。

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 6 & 4 & 8 \\ \hline 2 & 3 & 2 & 4 \\ \hline & 3 & 1 & 2 \end{array}$$

P112

例 7 最小公倍數的應用問題 搭配習作 P32 基礎題 7 自評 P115 第 5 題

偉成、嘉裕、正信三人，同時從同地出發，朝同方向繞一個周長為 1800 公尺的環狀步道行走，偉成每分鐘走 90 公尺，嘉裕每分鐘走 75 公尺，正信每分鐘走 60 公尺，則至少在幾分鐘之後三人會同時會合於出發點？

思路分析

(1) 先計算偉成、嘉裕、正信繞一圈回到原出發點各需多少時間。

(2) 三人會合於原出發點的時間，即三人繞一圈時間的公倍數。

解

$1800 \div 90 = 20$

$1800 \div 75 = 24$

$1800 \div 60 = 30$

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 20 & 24 & 30 \\ \hline 2 & 10 & 12 & 15 \\ \hline 3 & 5 & 6 & 15 \\ \hline 5 & 5 & 2 & 5 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

〔20 , 24 , 30〕$= 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 1 \times 2 \times 1 = 120$

所以在 120 分鐘之後，三人會於原出發點會合。

隨堂練習

有一條公路全長 3600 公尺，自起點開始，在中央分隔島上每隔 25 公尺設置一盞路燈；為歡度國慶，自起點開始，每隔 6 公尺設立一面旗幟。如果起點同時設置路燈和旗幟，則共有多少個地方同時設置路燈和旗幟？

〔6 , 25〕$= 6 \times 25 = 150$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 6 & 25 \\ \hline & 6 & 25 \end{array}$$

$3600 \div 150 = 24$

$24 + 1 = 25$

所以共有 25 個地方同時設置路燈和旗幟。

P113

2-2 重點回顧

❶ 公因數與最大公因數

(1) 幾個整數共同的因數稱為這幾個整數的公因數。

(2) 在這幾個整數的公因數中，最大的一個稱為這幾個整數的最大公因數。

❷ 公公倍數與最小公倍數

(1) 幾個整數共同的倍數稱為這幾個整數的公倍數。

(2) 在這幾個整數的公倍數中，最小的一個稱為這幾個整數的最小公倍數。

❸ 互質

如果兩數的最大公因數為 1，則稱兩數互質。

例 （4 , 9）＝1，所以 4 與 9 互質。

❹ 利用標準分解式求最大公因數

求 a、b 的最大公因數時，可先求出 a 和 b 的標準分解式，找出兩者共同的質因數，分別由共同質因數中，取指數（次方）最小者相乘，即為 a 和 b 的最大公因數。

例 （$2^2\times3^3\times5$, $2^3\times3^2\times7$）＝$2^2\times3^2$

❺ 利用標準分解式求最小公倍數

求 a、b 的最小公倍數時，可先求出 a 和 b 的標準分解式，找出兩者全部的質因數，再分別取指數（次方）最大者相乘，即為 a 和 b 的最小公倍數。

例 〔$2^2\times33\times5$, $2^3\times3^2\times7$〕＝$2^3\times3^3\times5\times7$

「河裡的一棵樹」，猜 2 個字的數學名詞。

P114

2-2 自我評量

❶ 在 1、7、8、15、23 五個數中，哪些會與 12 互質？ 課 P97 隨堂 2

1、7、23

❷ 求下列各組數的最大公因數： 課 P99～101 隨堂～例 1

(1) 42、36

（42，36）

$=2\times3$

$=6$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 42 & 36 \\ \hline 3 & 21 & 18 \\ \hline & 7 & 6 \end{array}$$

(2) 288、336

（288，336）

$=2^4\times3$

$=48$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 288 & 336 \\ \hline 2 & 144 & 168 \\ \hline 2 & 72 & 84 \\ \hline 2 & 36 & 42 \\ \hline 3 & 18 & 21 \\ \hline & 6 & 7 \end{array}$$

(3) $2^2\times3\times7$、$2\times3^2\times5$

（$2^2\times3\times7$，$2\times3^2\times5$）

$=2\times3$

$=6$

(4) 160、$2^4\times5\times7$

$160=2^5\times5$

（160，$2^4\times5\times7$）

$=2^4\times5$（或 80）

(5) 24、32、36

（24，32，36）

$=2\times2$

$=4$

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 24 & 32 & 36 \\ \hline 2 & 12 & 16 & 18 \\ \hline & 6 & 8 & 9 \end{array}$$

(6) 2×3^3、$2^2\times5$、$2^3\times5^2$

（2×3^3，$2^2\times5$，$2^3\times5^2$）

$=2$

❸ 求下列各組數的最小公倍數： 課 P105～110 隨堂～例 5

(1) 8、15

〔8，15〕

$=8\times15$

$=120$

$$\begin{array}{r|rr} 1 & 8 & 15 \\ \hline & 8 & 15 \end{array}$$

(2) 240、252

〔240，252〕

$=2\times2\times3\times20\times21$

$=2^4\times3^2\times5\times7$（或 5040）

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 240 & 252 \\ \hline 2 & 120 & 126 \\ \hline 3 & 60 & 63 \\ \hline & 20 & 21 \end{array}$$

(3) $2^2\times3^2\times11$、$3^3\times5\times11$

〔$2^2\times3^2\times11$，$3^3\times5\times11$〕

$=2^2\times3^3\times5\times11$（或 5940）

(4) 280、$24\times7\times11$

$280=2^3\times5\times7$

$24\times7\times11=2^3\times3\times7\times11$

〔280，$24\times7\times11$〕

$=2^3\times3\times5\times7\times11$（或 9240）

$$\begin{array}{r|r} 2 & 280 \\ \hline 2 & 140 \\ \hline 2 & 70 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array}$$

P115

(5) 84、24、14

〔84 , 24 , 14〕

$=2\times2\times3\times7\times1\times2\times1$

$=2^3\times3\times7$（或 168）

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 84 & 24 & 14 \\ \hline 2 & 42 & 12 & 7 \\ \hline 3 & 21 & 6 & 7 \\ \hline 7 & 7 & 2 & 7 \\ \hline & 1 & 2 & 1 \end{array}$$

(6) $2^2\times3\times5^2$、$3^2\times5^3\times7$、$2^3\times5^2\times7$

〔$2^2\times3\times5^2$, $3^2\times5^3\times7$, $2^3\times5^2\times7$〕

$=2^3\times3^2\times5^3\times7$（或 63000）

課 P100 例 2

❹ 淑惠家的客廳地板為長 690 公分、寬 720 公分的長方形，她想將客廳地板鋪滿大小相同的正方形瓷磚。在不切割瓷磚的前提下，淑惠所能選擇的瓷磚邊長最大是多少公分？此時共需要多少塊瓷磚才能將客廳地板鋪滿？

（690 , 720）$=2\times3\times5=30$

$690\div30=23$

$720\div30=24$

$23\times24=552$

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 690 & 720 \\ \hline 3 & 345 & 360 \\ \hline 5 & 115 & 120 \\ \hline & 23 & 24 \end{array}$$

答：邊長最大為 30 公分，共需 552 塊瓷磚。

課 P112 例 7

❺ 兆華飯店為迎接旅遊潮，走廊要重新鋪上地毯。地毯公司提供了三種相同寬度、不同長度的地毯，長度分別是 20 呎、28 呎、35 呎，每一種地毯的寬度都和走廊一樣寬，若飯店每次只鋪同一種地毯，且在不重疊與不留空隙的狀況下，三種長度的地毯都可以把走廊鋪滿，則走廊的長度至少多少呎？

〔20 , 28 , 35〕

$=2\times2\times5\times7$

$=140$

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 20 & 28 & 35 \\ \hline 2 & 10 & 14 & 35 \\ \hline 5 & 5 & 7 & 35 \\ \hline 7 & 1 & 7 & 7 \\ \hline & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

答：至少 140 呎。

解答：合數（河樹）。