

5-2

解一元一次不等式

1 不等式的運算規則

2 應用問題

主題 1 不等式的運算規則

找出一個一元一次不等式所有的解的過程就稱為**解一元一次不等式**。當不等式為 $x > 1$ 時，我們很容易看出所有大於 1 的數都是 $x > 1$ 的解。但是，當不等式為 $2x + 3 > 5$ 時，就不能立即看出哪些數是 $2x + 3 > 5$ 的解。此時我們就要想辦法將 $2x + 3 > 5$ **整理成** $x > a$ 的形式，以方便看出哪些數是此不等式的解。下面先來介紹解不等式時常用的運算規則。

不等式的加減運算規則

在數線上愈右邊的點所表示的數愈大，如圖 1， $a > b$ 。

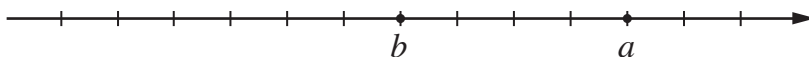


圖 1

同時將 a 、 b 都往右移 2 單位，如圖 2 所示，可得 $a + 2 > b + 2$ 。

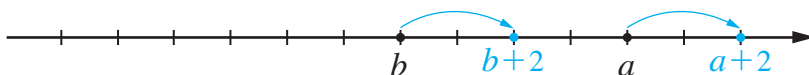


圖 2

同時將 a 、 b 都往左移 6 單位，如圖 3 所示，可得 $a - 6 > b - 6$ 。

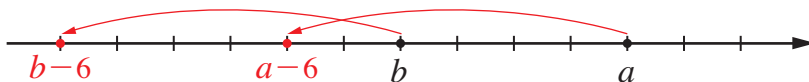
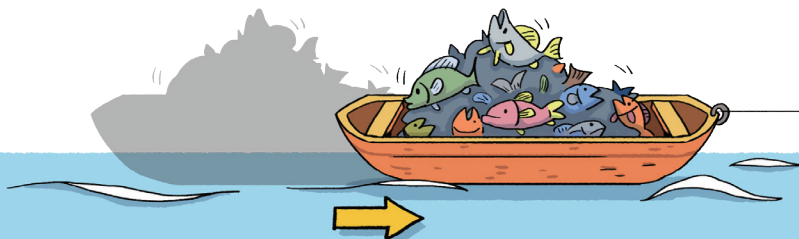


圖 3



綜合前面的敘述，我們可以得到不等式的加減運算規則：

Key point

不等式的加減運算規則

在不等號的兩邊同加或同減一數，其結果是不等號方向不變，
也就是說，若 $a > b$ ，則：

$$(1) a + c > b + c。$$

$$(2) a - c > b - c。$$



隨堂練習

在空格中填入正確的不等號。

$$(1) \text{ 若 } x + 3 < -9, \text{ 則 } x + 3 - 3 \boxed{<} -9 - 3。$$

$$(2) \text{ 若 } 2x - 7 \geq 11, \text{ 則 } 2x - 7 + 7 \boxed{\geq} 11 + 7。$$

$$(3) \text{ 若 } a > b, \text{ 則 } a - b \boxed{>} b - b, \text{ 可得 } a - b \boxed{>} 0。$$

不等式的乘除運算規則

如果一打原子筆的價錢比一打鉛筆的價錢高，那麼三打原子筆的價錢就比三打鉛筆的價錢高，且半打原子筆的價錢也比半打鉛筆的價錢高。根據這個概念，我們來進行第 170 頁的問題探索。



問題探索 不等號的兩邊同乘以「正數」時，兩邊的大小關係

原不等式	不等號兩邊 同乘以 3	新不等式	不等號的方向 (填不變或改變)
$9 > 5$		$27 > 15$	不變
$-4 < -2$		$-12 < -6$	不變
$0 > -7$		$0 > -21$	不變

綜合上面的討論，我們得到不等號的兩邊同乘以正數時的運算規則：

如果 $a > b$ 且 $c > 0$ ，那麼 $ac > bc$ 。

因為除以某數就等於乘以該數的倒數，例如： $5 \div 3$ 就等於 $5 \times \frac{1}{3}$ ，

所以經由此運算規則，也可以推導出同除以正數時的運算規則：

如果 $a > b$ 且 $c > 0$ ，那麼 $a \div c > b \div c$ 。

Key point

不等式乘除「正數」的運算規則

在不等號的兩邊同乘或同除以一個正數，其不等號的方向不變，也就是說，若 $a > b$ 且 $c > 0$ ，則：

(1) $ac > bc$ 。

(2) $a \div c > b \div c$ 。



隨堂練習

在空格中填入正確的不等號。

(1) 已知 $\frac{1}{2}x < 8$ ，在不等號兩邊同乘以 2，可得 x 16。

(2) 已知 $3x > 7$ ，在不等號兩邊同除以 3，可得 x $\frac{7}{3}$ 。

(3) 已知 $\frac{1}{4}x + 1 \leq -2$ ，則可得 $(\frac{1}{4}x + 1) \times 4$ $(-2) \times 4$ 。



問題探索 不等號的兩邊同乘以「負數」時，兩邊的大小關係

原不等式	不等號兩邊 同乘以 (-2) 	新不等式	不等號的方向 (填不變或改變)
$9 > 5$		$-18 < -10$	改變
$-4 < -2$		$8 > 4$	改變
$0 > -7$		$0 < 14$	改變

綜合上面的討論，我們得到不等號的兩邊同乘以負數時的運算規則：

如果 $a > b$ 且 $c < 0$ ，那麼 $ac < bc$ 。

經由此運算規則，也可以推導出同除以負數時的運算規則：

如果 $a > b$ 且 $c < 0$ ，那麼 $a \div c < b \div c$ 。

Key point

不等式乘除「負數」的運算規則

在不等號的兩邊同乘或同除以一個負數，其不等號的方向改變，也就是說，若 $a > b$ 且 $c < 0$ ，則：

(1) $ac < bc$ 。

(2) $a \div c < b \div c$ 。



隨堂練習

在空格中填入正確的不等號。

(1) 已知 $-x > -6$ ，在不等號兩邊同乘以 (-1) ，可得 x < 6 。

(2) 已知 $-3x < 8$ ，在不等號兩邊同除以 (-3) ，可得 x > $-\frac{8}{3}$ 。

(3) 已知 $-\frac{1}{5}x + 2 \geq -3$ ，則可得 $(-\frac{1}{5}x + 2) \times (-5)$ < $(-3) \times (-5)$ 。

利用不等式的運算規則，可以用來解一元一次不等式。我們來看下面的例題。

例 1

加減運算規則解不等式 學習內容 A-7-8

解一元一次不等式 $x-3 < 10$ 。

解

$$x-3 < 10$$

$$x-3+3 < 10+3$$

$$x < 13$$

不等號兩邊同時加 3
化簡

這代表所有小於 13 的數都是 $x-3 < 10$ 的解，以 $x < 13$ 表示。

在例 1 的解題過程中，我們也可以這樣看：

$$x-3 < 10$$

-3 移到不等號另一邊，要改成 +3

$$x < 10+3$$

化簡

$$x < 13$$



隨堂練習

解下列各一元一次不等式。

(1) $x-11 \leq 19$

$$x \leq 19+11$$

$$x \leq 30$$

(2) $x+3 \geq 8$

$$x \geq 8-3$$

$$x \geq 5$$

例 2

乘除運算規則解不等式 學習內容 A-7-8

解一元一次不等式 $-2x > 6$ 。

解

$$\begin{aligned}
 -2x &> 6 \\
 -2x \div (-2) &< 6 \div (-2) && \text{不等號兩邊同除以 } (-2), \text{ 不等號「} > \text{」變「} < \text{」} \\
 x &< 6 \div (-2) && \text{化簡} \\
 x &< -3 && \text{化簡}
 \end{aligned}$$

在例 2 的解題過程中，我們也可以這樣看：

$$\begin{aligned}
 -2x &> 6 \\
 &\quad \times (-2) \text{ 移到不等號另一邊，要改成 } \div (-2), \\
 &\quad \text{不等號「} > \text{」變「} < \text{」} \\
 x &< 6 \div (-2) \\
 &\quad \downarrow \text{化簡} \\
 x &< -3
 \end{aligned}$$



隨堂練習

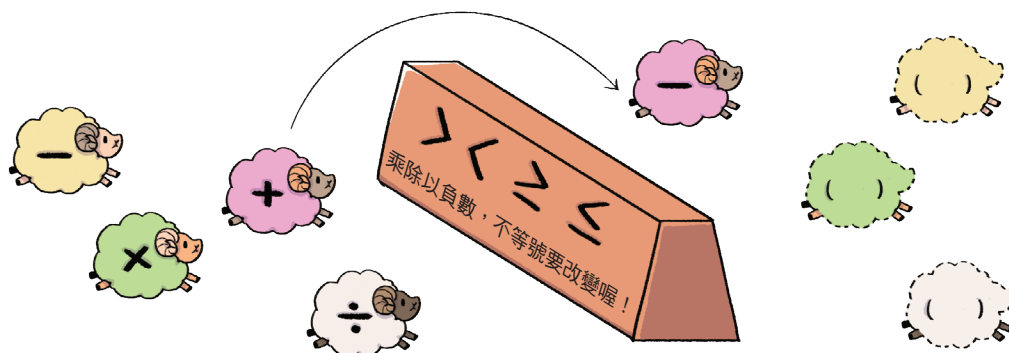
解下列各一元一次不等式。

(1) $\frac{1}{2}x > -4$

$$\begin{aligned}
 x &> (-4) \times 2 \\
 x &> -8
 \end{aligned}$$

(2) $-5x \leq 7$

$$\begin{aligned}
 x &\geq 7 \div (-5) \\
 x &\geq -\frac{7}{5}
 \end{aligned}$$

事實上，把某數或某項移到不等號的另一邊，且加變減、減變加、乘變除、除變乘的解一元一次不等式的方法，稱為**移項法則**。

例 3

解一元一次不等式 學習內容 A-7-8

解一元一次不等式 $2x+4<6$ 。

解

$$2x+4<6$$

$$2x<6-4$$

 $+4$ 移到不等號另一邊，要改成 -4

$$2x<2$$

$$x<1$$

不等號兩邊同除以 2



隨堂練習

解下列各一元一次不等式。

(1) $4x-5\geq 11$

$$4x\geq 16$$

$$x\geq 4$$

(2) $-6-5x>-31$

$$-5x>-25$$

$$x<(-25)\div(-5)$$

$$x<5$$

例 4

解一元一次不等式 學習內容 A-7-8

解一元一次不等式 $4x+3>-x+8$ 。

解

$$4x+3>-x+8$$

$$4x+x>8-3$$

 $+3$ 移到不等號另一邊，要改成 -3 $-x$ 移到不等號另一邊，要改成 $+x$

$$5x>5$$

$$x>1$$

不等號兩邊同除以 5

Hint

將不等式移項成「含 x 項的在一邊，不含 x 項的在另一邊」。

即 $4x+3>-x+8$

$$4x+x>8-3$$



隨堂練習

解下列各一元一次不等式。

(1) $7x-5<4x+1$

$$7x-4x<1+5$$

$$3x<6$$

$$x<2$$

(2) $-3x+1\geq 2x-4$

$$-3x-2x\geq -4-1$$

$$-5x\geq -5$$

$$x\leq 1$$

例 5

解一元一次不等式 學習內容 A-7-8

解一元一次不等式 $-4x - 33 \geq 3(2x - 1)$ 。

解 $-4x - 33 \geq 3(2x - 1)$ 先將 $3(2x - 1)$ 乘開

$$-4x - 33 \geq 6x - 3$$

$$-4x - 6x \geq -3 + 33$$

$$-10x \geq 30$$

$$x \leq -3$$



隨堂練習

解下列各一元一次不等式。

(1) $3x - 5 \leq -2(x - 3)$

$$3x - 5 \leq -2x + 6$$

$$3x + 2x \leq 6 + 5$$

$$5x \leq 11$$

$$x \leq \frac{11}{5}$$

(2) $2(1 - 5x) < 5 - 11x$

$$2 - 10x < 5 - 11x$$

$$-10x + 11x < 5 - 2$$

$$x < 3$$



例 6

解一元一次不等式並圖示其解 學習內容 A-7-8

解一元一次不等式 $\frac{x-5}{3} \leq \frac{-x+5}{2}$ ，並在數線上圖示其解。

解

$$\frac{x-5}{3} \leq \frac{-x+5}{2}$$

$$2(x-5) \leq 3(-x+5)$$

不等號兩邊同乘以 6

$$2x-10 \leq -3x+15$$

$$5x \leq 25$$

$$x \leq 5$$

圖示如下：



隨堂練習

解一元一次不等式 $\frac{x-2}{2} \leq \frac{3}{4}x$ ，並在數線上圖示其解。

$$\frac{x-2}{2} \leq \frac{3}{4}x$$

$$2(x-2) \leq 3x$$

$$2x-4 \leq 3x$$

$$-x \leq 4$$

$$x \geq -4$$

圖示如下：



主題 2 應用問題

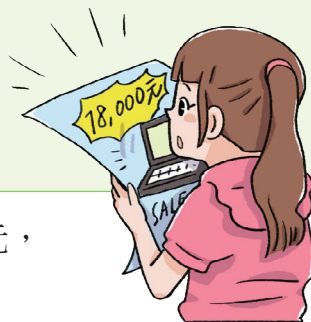
利用不等式來解決日常生活中的問題時，必須考慮答案的合理性。
我們來看下面的例題。

例 7

存款問題 學習內容 A-7-8

小妍想要購買一臺價值 18000 元的筆記型電腦，但現有存款僅 5000 元，若從今天開始每天存 80 元，至少需要存 x 天，他才有足夠的錢購買這臺筆記型電腦，則：

- (1) 依題意列出不等式。
- (2) 承(1)， x 的值為何？



解

- (1) 小妍存了 x 天，則總存款有 $(5000 + 80x)$ 元，
依題意可列出不等式為 $5000 + 80x \geq 18000$ 。

- (2) 解不等式 $5000 + 80x \geq 18000$

$$80x \geq 13000$$

$$x \geq 162.5$$

因為天數為整數，而大於或等於 162.5 的最小整數為 163，
所以 x 的值為 163。



隨堂練習

若小翊原有存款 3000 元，每天花 35 元買早餐，買了 x 天後，他的存款開始少於原來的一半，則：

- (1) 依題意列出不等式。
- (2) 承(1)， x 的值為何？

- (1) 小翊買了 x 天後，則存款剩下 $(3000 - 35x)$ 元

依題意可列出不等式為 $3000 - 35x < \frac{1}{2} \times 3000$

- (2) 解不等式 $3000 - 35x < \frac{1}{2} \times 3000$

$$3000 - 35x < 1500$$

$$35x > 1500$$

$$x > \frac{300}{7} = 42\frac{6}{7}$$

因為天數為整數，而大於 $42\frac{6}{7}$ 的最小整數為 43，所以 x 的值為 43



例 8

成績計算問題 學習內容 A-7-8

已知數學的學期總成績，計算方式如下：

$$\text{學期總成績} = \text{平時成績} \times 60\% + \text{三次段考的平均分數} \times 40\%$$

若芸瑄這學期的平時成績為 92 分，且前兩次段考的分數分別為 85、90 分，則芸瑄在第三次段考至少要得幾分，才能使他的數學學期總成績達到 90 分以上（含）？

解 設芸瑄第三次段考的分數為 x 分，

$$\text{三次段考的平均分數為 } \frac{85+90+x}{3} = \frac{175+x}{3} \text{ (分),}$$

$$\text{依題意可列出不等式為 } 92 \times 60\% + \frac{175+x}{3} \times 40\% \geq 90,$$

$$\text{解不等式 } 92 \times 60\% + \frac{175+x}{3} \times 40\% \geq 90$$

$$55.2 + \frac{175+x}{3} \times \frac{2}{5} \geq 90$$

$$55.2 \times 15 + (175+x) \times 2 \geq 90 \times 15$$

$$828 + 350 + 2x \geq 1350$$

$$2x \geq 172$$

$$x \geq 86$$

所以第三次段考至少要得 86 分。

遇到例 8、例 9 中，有繁複的計算，可利用計算機輔助喔！



隨堂練習

承例 8，明天舉行數學的第三次段考（滿分 100 分），若阿楚這學期的平時成績為 80 分，且前兩次段考的分數分別為 72、65 分，則阿楚在第三次段考至少要得幾分，才能使他的數學學期總成績達到 80 分以上（含）？

設阿楚第三次段考的分數為 y 分

$$\text{依題意可列出不等式為 } 80 \times 60\% + \frac{72+65+y}{3} \times 40\% \geq 80$$

解不等式得 $y \geq 103$ ，所以第三次段考至少要得 103 分

但段考滿分只有 100 分，故阿楚無法達到學期總成績 80 分以上（含）

例 9

你知道嗎？

打八折：
定價 $\times 80\%$ 。

打六五折：
定價 $\times 65\%$ 。

折扣問題 學習內容 A-7-8

某出版社推出優惠折扣如右圖。欣欣國中想購買每本定價 300 元的書，數量超過 20 本，但不足 50 本；卻發現購買 50 本反而比原先想購買的數量還便宜，則學校原本至少想購買幾本書？



解 設原本想購買 x 本，所需費用為 $(300x \times 0.8)$ 元，
而購買 50 本，所需費用為 $(300 \times 50 \times 0.7)$ 元，
依題意可列出不等式為 $300x \times 0.8 > 300 \times 50 \times 0.7$ ，
解不等式 $300x \times 0.8 > 300 \times 50 \times 0.7$

$$0.8x > 35$$

$$x > 43.75$$

因為書本數量為整數，而大於 43.75 的最小整數為 44，
所以原本至少想購買 44 本。



隨堂練習

熊好康飲料店推出特價活動，如右圖。阿晃老師打算購買每杯 20 元的飲料二十幾杯來獎勵全班同學，但後來發現購買 30 杯反而比原先想購買的數量便宜，則阿晃老師原本至少要購買幾杯飲料？

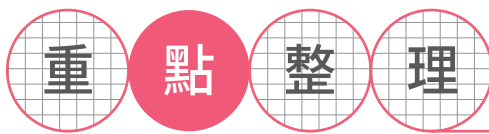
設原本要購買 x 杯，所需費用為 $(20x \times 0.9)$ 元
而購買 30 杯，所需費用為 $(20 \times 30 \times 0.7)$ 元
依題意可列出不等式為 $20x \times 0.9 > 20 \times 30 \times 0.7$
解不等式 $20x \times 0.9 > 20 \times 30 \times 0.7$

$$0.9x > 21$$

$$x > 23\frac{1}{3}$$

因為飲料杯數為整數，而大於 $23\frac{1}{3}$ 的最小整數為 24
所以原本至少要購買 24 杯





1 不等式的加減運算規則

若 $a > b$ ，則：

(1) $a + c > b + c$ 。

(2) $a - c > b - c$ 。

例 若 $5 > -2$ ，則：(1) $5 + 3 > (-2) + 3$ 。

(2) $5 - 3 > (-2) - 3$ 。

2 不等式的乘除運算規則

(1) 若 $a > b$ 且 $c > 0$ ，則：① $ac > bc$ 。 ② $a \div c > b \div c$ 。

(2) 若 $a > b$ 且 $c < 0$ ，則：① $ac < bc$ 。 ② $a \div c < b \div c$ 。

例 若 $6 > 1$ ，則：(1) $6 \times 3 > 1 \times 3$ ； $6 \div 3 > 1 \div 3$ 。

(2) $6 \times (-3) < 1 \times (-3)$ ； $6 \div (-3) < 1 \div (-3)$ 。

3 不等式的移項法則

把某數或某項移到不等號的另一邊，且加變減、減變加、乘變除、除變乘的解一元一次不等式的方法，稱為移項法則。

例 $-2x > 6$

$\times(-2)$ 移到不等號另一邊，要改成 $\div(-2)$ ，不等號「 $>$ 」變「 $<$ 」

$x < 6 \div (-2)$

化簡

$x < -3$

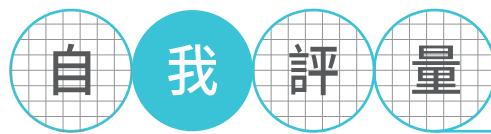
4 應用問題

在解應用問題時，必須考慮答案的合理性。

例 小妍想要購買一臺價值 18000 元的筆記型電腦，但現有存款僅 5000 元，若從今天開始每天存 80 元，則至少需要存 x 天，他才有足夠的錢購買這臺筆記型電腦？

因小妍存了 x 天，則 $5000 + 80x \geq 18000$ ，得 $x \geq 162.5$ ，

因為天數為整數，所以至少需要存 163 天。



1 解下列各不等式，並在數線上圖示其解。

(1) $3x - 2 \geq -5$

P.174 例 3

$$3x \geq -3$$

$$x \geq -1$$



(2) $x + 3 > 3x - 5$

P.174 例 4

$$-2x > -8$$

$$x < 4$$



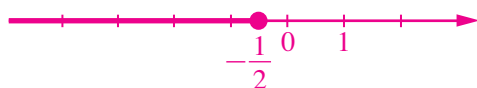
(3) $11(4x + 5) \leq 2(-x + 16)$

P.175 例 5

$$44x + 55 \leq -2x + 32$$

$$46x \leq -23$$

$$x \leq -\frac{1}{2}$$



(4) $\frac{3x-5}{2} + 1 \leq \frac{2x-3}{3} + 2$

P.176 例 6

不等號兩邊同乘以 6

$$3(3x-5) + 6 \leq 2(2x-3) + 12$$

$$9x - 15 + 6 \leq 4x - 6 + 12$$

$$5x \leq 15$$

$$x \leq 3$$



2 某城市計程車的車資規定如下：

P.177~179 例 7~9

上車起跳價為 70 元，走了若干公尺後開始跳表，每跳一次表加 5 元。如果小艾下車時付 200 元還有找錢，那麼小艾坐這趟計程車最多跳了幾次表？

設計程車跳了 x 次表

依題意可列出不等式為 $70 + 5x < 200$

$$5x < 130$$

$$x < 26$$

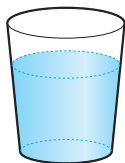
所以最多跳了 25 次表

3 下圖是估測玻璃珠體積的過程：

P.177~179 例 7~9

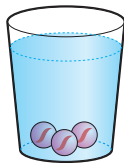
步驟一：

將 300 毫升的水裝進一個容量為 450 毫升的杯子中。



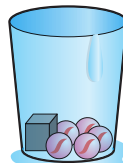
步驟二：

將三顆相同的玻璃珠放入杯中，結果水沒有滿。



步驟三：

再將兩顆同樣的玻璃珠及一體積為 20 立方公分的鐵塊放入杯中，結果水滿溢出。



- (1) 假設一顆玻璃珠體積為 x ，請根據步驟一、二的估測過程，試問 x 的範圍為何？
- (2) 承(1)，請根據步驟三的估測，試問 x 的範圍為何？
- (3) 試問下列哪一個選項不可能是一顆玻璃珠的體積？

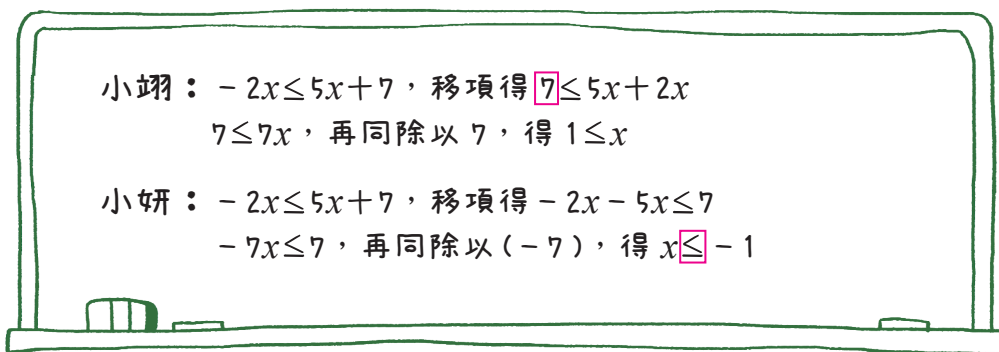
(A) 26 (B) 30 (C) 35 (D) 49

(單位：立方公分；1 毫升 = 1 立方公分)

- (1) 由步驟一、二得 $3x < 450 - 300$ ， $x < 50$
- (2) 由步驟三得 $5x + 20 > 450 - 300$ ， $x > 26$
- (3) 由(1)、(2)可知， x 的範圍為 $26 < x < 50$ ，故選(A)

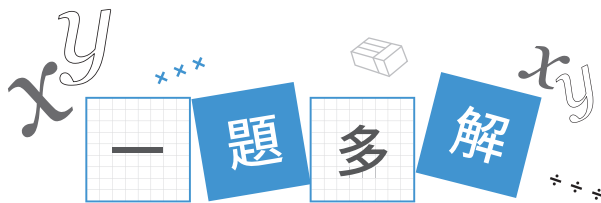
挑錯題

以下是小翊和小妍「解一元一次不等式 $-2x \leq 5x + 7$ 」的過程。判斷他們的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。



正確解法如下：

$-2x \leq 5x + 7$ ，移項得 $-7 \leq 5x + 2x$ ， $-7 \leq 7x$
 再同除以 7，得 $-1 \leq x$



康康花店在七夕情人節前買進一批紅玫瑰花，但在運送過程中有一成的花損壞無法賣出。已知花店以每枝 10 元的價格買進，並以每枝 40 元的價格賣出所剩的紅玫瑰花，最後至少獲利 5200 元，試問花店至少買進了多少枝紅玫瑰花？



假設未知數

設買進 x 枝紅玫瑰花，則所需成本費用為 $10x$ 元，

因為有一成的花無法賣出，

則花店賣出的總收入為 $40 \times (1 - 0.1) \times x$ 元，

依題意可列出不等式為 $40 \times (1 - 0.1) \times x - 10x \geq 5200$ ，

解不等式 $36x - 10x \geq 5200$

$$26x \geq 5200$$

$$x \geq 200$$

所以至少買進 200 枝紅玫瑰花。



平均每枝花的收入－每枝花的成本＝平均每枝花的獲利

每買進 10 枝花，則有一枝會損壞，所以只能賣出 9 枝，

故平均一枝的收入為 $40 \times 9 \div 10 = 36$ 。

因此一枝花的獲利為 $36 - 10 = 26$ 元，

而總獲利至少 5200 元的話，

則至少買進 $5200 \div 26 = 200$ 枝紅玫瑰花。