

4

比與比例式

4-1 比例式

4-2 正比與反比

Are You Ready ?

+++ 比與比值

小靖和小翊參加大胃王比賽，在同一時間內小靖吃了 12 個熱狗堡，小翊吃了 15 個熱狗堡，則小靖、小翊所吃的熱狗堡個數比可記為 $12 : 15$ ，比值是 $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ 。

+++ 相等的比

在下列各 中填入適當的數值。

(1) $14 : 21 = 42 :$ (2) $10 : 21 =$ $: 105$

+++ 正比

下表是 5 元硬幣個數和總金額的關係，完成下表。

5 元硬幣個數 (個)	10	20	33	40	130
總金額 (元)	50	100	165	200	650

+++ 速率

甲、乙兩地的距離是 180 公里，搭客運要 2 小時，騎機車要 3 小時，則客運和機車的平均時速分別為多少？

客運時速 90 公里，機車時速 60 公里

晶瑩剔透的泡泡，從口中一顆顆的吹出，是許多人童年的回憶之一。你曾經自製過泡泡水嗎？在調製泡泡水的配方中，洗碗精或洗髮精等與水的比例是重要的關鍵，同時也會影響泡泡的持久時間。本章我們就來介紹比例的概念。



MATHEMATICS



4-1

比例式

1 比與比值

2 比例式

3 應用問題

主題 1 比與比值

我們在國小時學到了比和比值的概念。



學習時光機

在數學上，比用來表示兩個數量的關係，以符號「：」來表示。

例如：大埔國中某學年度全校學生有 600 位，其中七年級學生有 200 位。我們就說該校七年級學生人數與全校學生人數的比為 200 比 600，記為 $200 : 600$ ，其中 200 稱為前項，600 稱為後項。

用 200 除以 600，可得 $200 \div 600 = \frac{200}{600} = \frac{1}{3}$ ，其中 $\frac{1}{3}$ 稱為 $200 : 600$ 的比值，也就是說七年級學生人數是全校學生人數的 $\frac{1}{3}$ 倍。

因此，若甲與乙的比為 $a : b$ ($b \neq 0$)，則：

(1) 甲：乙的比值為 $\frac{a}{b}$ 。

(2) 甲是乙的 $\frac{a}{b}$ 倍。

例 1

比值與倍數的關係 學習內容 N-7-9

右圖是製作 8 顆粽子的食譜，根據食譜回答下列問題：

- (1) 製作 8 顆粽子所需的水重量：醬油重量為 _____：_____，比值為_____。
- (2) 水重量是醬油重量的_____倍。
- (3) 醬油重量是水重量的_____倍。



肉粽食譜 (8 顆粽子)

食材

長糯米 400 公克

滷肉

豬梅花肉 100 公克、水 30 公克、醬油 12 公克、米酒 3 公克

其他

鹹蛋黃、蝦米、乾香菇、花生適量

解 (1) 製作 8 顆粽子所需的水重量：醬油重量

為 30：12，其比值為 $\frac{30}{12} = \frac{5}{2}$ 。

(2) 由(1)得水重量是醬油重量的 $\frac{5}{2}$ 倍。

(3) 因為醬油重量：水重量 = 12：30，

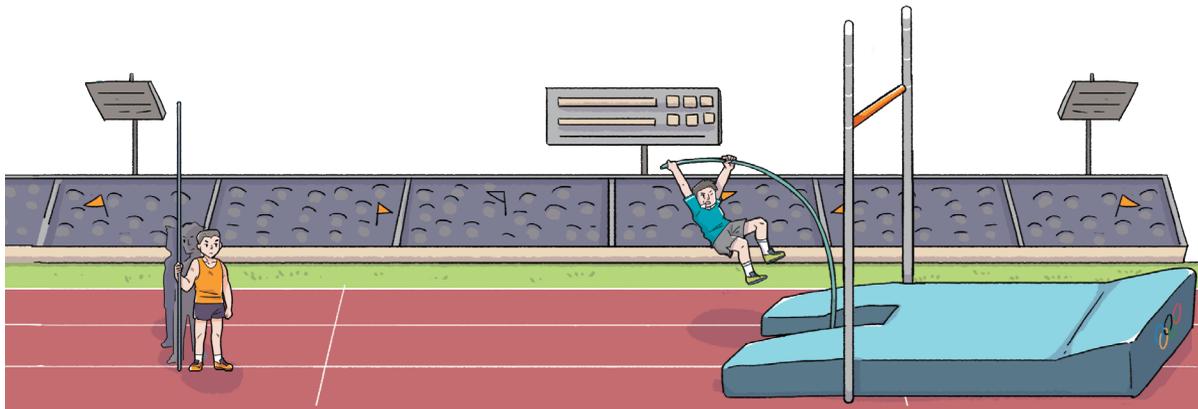
所以醬油重量是水重量的 $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$ 倍。

你知道嗎？

奧林匹克運動會簡稱奧運，最早發源地位於古希臘的奧林匹亞。而隨著古希臘沒落，奧運停辦將近 1500 年。直到西元 1896 年由法國 顧拜旦 (Coubertin) 創立現代奧運，自此開始才決議每 4 年舉辦一次。

隨堂練習

日本造幣局所發行的 2020 東京奧運紀念幣，其中白銅是由鎳和銅以 1：7 的比例所合成的，則這種紀念幣中，白銅裡鎳的重量是銅的重量的 $\frac{1}{7}$ 倍。



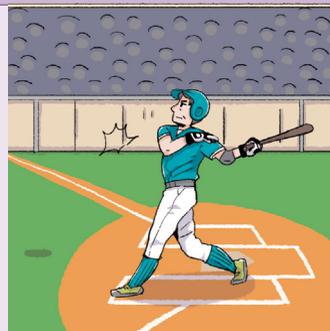
例 2

打擊率



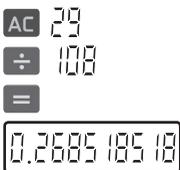
學習內容 N-7-9

「打擊率」是棒球運動中評量打者成績的指標之一，其計算方式為選手安打次數與總打擊次數的比值，通常會化為小數並四捨五入取到小數點後第 3 位。設某職棒選手在最近 108 次打擊次數中，共擊出 29 支安打，則：



- (1) 該選手這段時間的打擊率為幾成？
- (2) 後來該選手又多了 42 次打數，如果要將打擊率提升為 3 成，他必須在這 42 次打擊次數中擊出幾支安打？

計算機操作



解 (1) $29 : 108$ 的比值是 $\frac{29}{108}$ ，

化為小數為 0.269 (以四捨五入取到小數點後第 3 位)，

一般記為 .269，讀作 2 成 69，

即該選手這段時間的打擊率為 2 成 69。

(2) 此時該選手總打數為 $108 + 42 = 150$ (次)，

若要將打擊率提升為 3 成，

應該要有的安打總數為 $150 \times 0.3 = 45$ (支)，

即該選手必須在這 42 次打數中，擊出 $45 - 29 = 16$ 支安打。



隨堂練習

在一場籃球比賽中，選手的投進球數和總投球數的比值，稱為該選手的「命中率」，通常以百分率表示。若某次投籃比賽中，小翊共投進 21 球，命中率為 70% (或 7 成)，則他的總投球數為多少？

設總投球數為 x 球 ($x \neq 0$)

$21 : x$ 的比值是 $\frac{21}{x}$

$\frac{21}{x} \times 100\% = 70\%$ ， $x = 30$

所以總投球數為 30 球

國小學到的比都是兩個正數的比，事實上，也可以含有負數的比。
一般而言，兩個數 a 、 b ，

(1) 我們將 a 與 b 的比記為 $a : b$ ，讀作 a 比 b ，

其中 a 稱為這個比的前項， b 稱為這個比的後項。

(2) $a : b$ 的比值為 $a \div b = \frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)。

例 3

比的比值 學習內容 N-7-9

寫出下列各比的比值，並以最簡分數表示。

(1) $(-2) : 3$ (2) $\frac{2}{3} : (-\frac{3}{4})$ (3) $(-0.7) : (-1.3)$

解 (1) $(-2) : 3$ 的比值為 $(-2) \div 3 = -\frac{2}{3}$ 。

(2) $\frac{2}{3} : (-\frac{3}{4})$ 的比值為 $\frac{2}{3} \div (-\frac{3}{4}) = \frac{2}{3} \times (-\frac{4}{3}) = -\frac{8}{9}$ 。

(3) $(-0.7) : (-1.3)$ 的比值為

$$\begin{aligned} (-0.7) \div (-1.3) &= (-\frac{7}{10}) \div (-\frac{13}{10}) \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{10}{13} = \frac{7}{13}。 \end{aligned}$$

Hint

(3)也可以這樣做：

$$\begin{aligned} &(-0.7) \div (-1.3) \\ &= \frac{-0.7}{-1.3} \\ &= \frac{7}{13} \end{aligned}$$

分子、分母
同乘以 -10

隨堂練習

寫出下列各比的比值，並以最簡分數表示。

(1) $(-24) : (-12)$ (2) $\frac{1}{2} : (-\frac{2}{3})$ (3) $(-0.3) : 2.4$

$(-24) : (-12)$ 的比值為

$$(-24) \div (-12)$$

$$= \frac{-24}{-12}$$

$$= 2$$

$\frac{1}{2} : (-\frac{2}{3})$ 的比值為

$$\frac{1}{2} \div (-\frac{2}{3})$$

$$= \frac{1}{2} \times (-\frac{3}{2})$$

$$= -\frac{3}{4}$$

$(-0.3) : 2.4$ 的比值為

$$(-0.3) \div 2.4$$

$$= (-\frac{3}{10}) \div \frac{24}{10}$$

$$= (-\frac{3}{10}) \times \frac{10}{24}$$

$$= -\frac{1}{8}$$

小妍



小翊



相等的比

有兩個大小相同的披薩，小妍將其中一個披薩平均切成 4 塊，吃了 1 塊；小翊將另一個披薩平均切成 8 塊，吃了 2 塊。小妍和小翊兩人吃掉的部分與整個披薩的比分別為 $1:4$ 及 $2:8$ ，兩個比的比值都是 $\frac{1}{4}$ ，這時候我們說 $1:4$ 與 $2:8$ 相等，寫成 $1:4=2:8$ 。

當幾個比的比值相等時，我們說這幾個比是**相等的比**，例如 $600:400$ 與 $30:20$ 的比值都是 $\frac{3}{2}$ ，所以 $600:400$ 與 $30:20$ 是相等的比，寫成 $600:400=30:20$ 。

你知道嗎？

披薩 (pizza) 的發源地是義大利的拿坡里，意思是混合著番茄、起司及不同食材烘焗而成的餅。



隨堂練習

下列何者與 $30:20$ 是相等的比？

- (1) $3:2$ (2) $2:3$ (3) $1:\frac{2}{3}$ (4) $\frac{2}{3}:1$ (5) $\frac{3}{2}:1$

$30:20$ 的比值是 $\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$

(2)、(4)的比值皆是 $\frac{2}{3}\neq\frac{3}{2}$

而(1)、(3)、(5)與 $30:20$ 是相等的比

我們也可以利用比值的分子、分母同乘以或同除以不為 0 的數，得到比的運算性質，例如：

分子、分母同乘以 20

$$\frac{600}{400} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

分子、分母同除以 10

前項、後項同乘以 20

$$600:400 = 30:20 = 3:2$$

前項、後項同除以 10

由上面的說明，我們可以得到：

Key point

相等的比

已知 a 、 b 、 m 三個數，其中 b 、 m 皆不為 0，則：

(1) $a:b=(a\times m):(b\times m)$ 。

(2) $a:b=(a\div m):(b\div m)$ 。

例 4

相等的比 學習內容 N-7-9

在下列各 中填入適當的數值。

(1) $8 : 18 = 4 : \square$

(2) $2 : (-7) = (-12) : \square$

解

$$(1) 8 : 18 = 4 : \square,$$

而 $18 \div 2 = 9$,

所以 中填 9。

$$(2) 2 : (-7) = (-12) : \square,$$

而 $(-7) \times (-6) = 42$,

所以 中填 42。



隨堂練習

在下列各 中填入適當的數值。

(1) $(-15) : 20 = 3 : \square$

(2) $3 : 7 = \square : (-14)$

$\square = -4$

$\square = -6$

學習時光機

若兩整數的最大公因數為 1，就稱這兩整數互質。

當一個比的前、後項都是整數，且前、後項彼此互質時，我們說這個比為最簡整數比，其比值為最簡分數。例如 $3 : 2$ 與 $2 : 9$ 都是最簡整數比；

$60 : 40$ 與 $1 : \frac{9}{2}$ 則不是最簡整數比。

習慣上，我們會將一個比以最簡整數比表示。



隨堂練習

將下列各比化為最簡整數比。

(1) $13 : 26$

(2) $14 : (-35)$

(3) $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$

$= 1 : 2$

$= 2 : (-5)$

$= 2 : 3$

主題 2 比例式

在第 126 頁學過兩個相等的比 $a : b$ 和 $c : d$ ，可寫成 $a : b = c : d$ ，這種等式稱為**比例式**，其中 b 、 c 稱為這個比例式的**內項**， a 、 d 稱為這個比例式的**外項**。

當 $a : b = c : d$ ，即 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，將算式 $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ 的等號兩邊同乘以 bd ， $\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd$ ，得到 $ad = bc$ 。

Hint

$$\begin{array}{c} a \times d \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ a : b = c : d \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}} \\ b \times c \end{array}$$

Key point

比例式的運算性質①

若比例式 $a : b = c : d$ ，則 $ad = bc$ ，即比例式的外項乘積等於內項乘積。

例 5

比例式運算性質①的應用 學習內容 N-7-9

求下列各比例式中的 x 值。

(1) $8 : 9 = 14 : x$

(2) $(x-2) : 6 = (x+8) : 8$

解

(1) 因為 $8 : 9 = 14 : x$

所以 $8 \times x = 9 \times 14$

$$\begin{aligned} x &= \frac{9 \times 14}{8} \\ &= \frac{63}{4} \end{aligned}$$

(2) 因為 $(x-2) : 6 = (x+8) : 8$

所以 $(x-2) \times 8 = 6 \times (x+8)$

$$8x - 16 = 6x + 48$$

$$2x = 64$$

$$x = 32$$



隨堂練習

求下列各比例式中的 x 值。

(1) $\frac{2}{3}x : \frac{3}{2} = 8 : 1$

$$\frac{2}{3}x \times 1 = \frac{3}{2} \times 8$$

$$\frac{2}{3}x = 12$$

$$x = 18$$

(2) $(2x+1) : (x-3) = (-3) : 2$

$$(2x+1) \times 2 = (x-3) \times (-3)$$

$$4x+2 = -3x+9$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

由比例式的外項乘積等於內項乘積可知，

若比例式 $x : y = 2 : 3$ ，則 $3x = 2y$ ，將等號兩邊同除以 6，得 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ 。

若設 $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = r$ ，可得 $x = 2r$ 、 $y = 3r$ 。

Key point

比例式的運算性質②

若 $x : y = a : b$ ，其中 a 、 b 均不為 0，則：

- (1) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ 或 $x : a = y : b$ 。
- (2) 可設 $x = ar$ 、 $y = br$ ($r \neq 0$)。

例 6

比例式運算性質②的應用 學習內容 N-7-9

有兩數 x 、 y ，已知 $x : y = 3 : 2$ ，且 $x + y = 20$ ，則 x 、 y 的值分別為多少？

解 由 $x : y = 3 : 2$ ，
 可設 $x = 3r$ 、 $y = 2r$ ($r \neq 0$)，
 代入 $x + y = 20$ ，
 得 $3r + 2r = 20$ ， $r = 4$ ，
 所以 $x = 3r = 12$ 、 $y = 2r = 8$ 。



隨堂練習

有兩數 x 、 y ，已知 $x : y = 5 : 7$ ，且 $x - y = 30$ ，則 x 、 y 的值分別為多少？

由 $x : y = 5 : 7$
 可設 $x = 5r$ 、 $y = 7r$ ($r \neq 0$)
 代入 $x - y = 30$
 得 $5r - 7r = 30$ ， $r = -15$
 所以 $x = 5r = -75$
 $y = 7r = -105$

例 7

比例式運算性質②的應用 學習內容 N-7-9

設 x 、 y 皆不為 0，且 $7x=4y$ ，求下列各比的比值。

(1) $x : y$

(2) $2x : 3y$

解

$$7x=4y$$

$$\frac{x}{4}=\frac{y}{7} \quad \text{同除以 } 28$$

$$\text{設 } \frac{x}{4}=\frac{y}{7}=r (r \neq 0),$$

$$\text{得 } x=4r, y=7r,$$

$$(1) x : y = 4r : 7r$$

$$= 4 : 7 \quad \text{同除以 } r$$

$$\text{所以 } x : y \text{ 的比值為 } \frac{4}{7}。$$

$$(2) 2x : 3y = (2 \times 4r) : (3 \times 7r)$$

$$= 8r : 21r$$

$$= 8 : 21 \quad \text{同除以 } r$$

$$\text{所以 } 2x : 3y \text{ 的比值為 } \frac{8}{21}。$$

Hint

(1)也可以這樣做：

$$\text{由 } 7x=4y$$

$$\frac{7x}{y}=4 \quad \text{同除以 } y$$

$$\frac{x}{y}=\frac{4}{7} \quad \text{同除以 } 7$$

$$\text{得 } x : y = 4 : 7。$$



隨堂練習

設 x 、 y 皆不為 0，且 $3x=5y$ ，則：

(1) $x : y =$ 5 $:$ 3。

(2) $7x : 3y =$ 35 $:$ 9。

$$3x=5y \text{ 同除以 } 15, \text{ 得 } \frac{x}{5}=\frac{y}{3}$$

$$\text{設 } \frac{x}{5}=\frac{y}{3}=r (r \neq 0)$$

$$\text{得 } x=5r, y=3r$$

(1) $x : y = 5r : 3r = 5 : 3$

(2) $7x : 3y = (7 \times 5r) : (3 \times 3r) = 35 : 9$



例 8

比例式運算性質的綜合運用 學習內容 N-7-9

設 $(a+b):(a-b)=3:(-2)$ ，計算下列各式。

(1) $a:b=$ _____ $:$ _____。

(2) $b:(a-b)$ 的比值。

解 (1) $(a+b):(a-b)=3:(-2)$
 $(-2)\times(a+b)=3\times(a-b)$
 $-2a-2b=3a-3b$
 $5a=b$
 $a:b=1:5$

(2) 由(1)可設 $a=r$ 、 $b=5r$ ($r\neq 0$)，

$$\begin{aligned} \text{則 } b:(a-b) &= 5r:(-4r) \\ &= 5:(-4) \end{aligned}$$

所以 $b:(a-b)$ 的比值為 $-\frac{5}{4}$ 。

Hint

(2)也可以這樣做：
 由(1) $5a=b$ 代入，
 則 $b:(a-b)=5a:(-4a)$
 $=5:(-4)$ 。



隨堂練習

設 $(a+b):(a-b)=(-5):2$ ，計算下列各式。

(1) $a:b=$ _____ 3 $:$ _____ 7 _____。

(2) 計算 $\frac{a+3b}{a-3b}$ 的值。

(1) $(a+b):(a-b)=(-5):2$
 $2\times(a+b)=(-5)\times(a-b)$
 $2a+2b=-5a+5b$
 $7a=3b$
 $a:b=3:7$

(2) 由(1)可設 $a=3r$ 、 $b=7r$ ($r\neq 0$)

$$\text{則 } \frac{a+3b}{a-3b} = \frac{3r+3\times 7r}{3r-3\times 7r} = \frac{24r}{-18r} = -\frac{4}{3}$$

主題 3 應用問題

比與比值、比例式在生活中的應用非常廣泛，以下舉些例子說明。

例 9

數量問題 學習內容 N-7-9

小翊和小靖各有一些零用錢，且小翊零用錢的2倍和小靖零用錢的3倍一樣多，則：

- (1) 小翊的零用錢：小靖的零用錢 = _____ : _____。
- (2) 承(1)，若小翊和小靖的零用錢共有500元，那麼小翊和小靖的零用錢各有多少元？

解

- (1) 設小翊的零用錢有 x 元、小靖的零用錢有 y 元，

依題意可得 $2x=3y$ ，則 $x:y=3:2$ 。

- (2) 由(1)可設小翊的零用錢有 $3r$ 元、小靖的零用錢有 $2r$ 元($r \neq 0$)，

依題意可得 $3r+2r=500$

$$r=100$$

所以小翊的零用錢有 $3 \times 100 = 300$ 元，

小靖的零用錢有 $2 \times 100 = 200$ 元。



隨堂練習

箱子裡有一些蘋果和梨子，若蘋果顆數的5倍等於梨子顆數的4倍，且蘋果比梨子少21顆，則蘋果和梨子各有多少顆？

設蘋果有 x 顆、梨子有 y 顆

依題意可得 $5x=4y$ ， $x:y=4:5$

設 $x=4r$ 、 $y=5r$ ($r \neq 0$)

$$4r=5r-21$$

$$r=21$$

所以蘋果有 $4 \times 21 = 84$ 顆

梨子有 $5 \times 21 = 105$ 顆



例 10

數量變化問題 學習內容 N-7-9

亞駿和雅婷都喜愛跑馬拉松，已知兩人原本跑的公里數比是 $6:5$ ，後來兩人分別又跑了 5 公里和 3 公里，結果總里程數的比變為 $5:4$ ，則兩人原本各跑了多少公里？



你知道嗎？

馬拉松 (marathon) 是一項考驗耐力的長跑運動，其名稱源於古希臘的馬拉松戰役。在西元 1921 年，馬拉松的長度被確立為 42.195 公里，而西元 1980 年後，半程馬拉松 (約 21 公里) 才在民間興起。

解 設亞駿原跑 $6r$ 公里、雅婷原跑 $5r$ 公里 ($r \neq 0$)，

依題意可得 $(6r+5):(5r+3)=5:4$

$$4(6r+5)=5(5r+3)$$

$$24r+20=25r+15$$

$$r=5$$

所以亞駿原跑 $6 \times 5 = 30$ 公里，

雅婷原跑 $5 \times 5 = 25$ 公里。

隨堂練習

公園裡原有男生、女生人數比為 $9:7$ ，後來有 3 位男生和 6 位女生走出公園，剩下的男生、女生人數比變為 $3:2$ ，則公園裡原有男生、女生各多少位？

設公園裡原有男生 $9r$ 位、女生 $7r$ 位 ($r \neq 0$)

依題意可得 $(9r-3):(7r-6)=3:2$

$$2(9r-3)=3(7r-6)$$

$$18r-6=21r-18$$

$$r=4$$

所以原有男生 $9 \times 4 = 36$ 位

女生 $7 \times 4 = 28$ 位

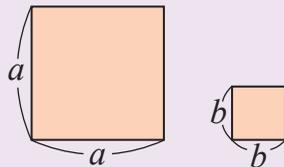
接下來，我們來探討平面圖形中，正方形邊長比與其周長比、面積比之間的關係。

例 11

正方形邊長比與其周長比、面積比的關係 學習內容 N-7-9

如右圖，有大、小兩個正方形，設大正方形的邊長為 a ，小正方形的邊長為 b ，已知 $a : b = 5 : 2$ ，則：

- (1) 大正方形與小正方形的周長比 = ?
- (2) 大正方形與小正方形的面積比 = ?



解 由 $a : b = 5 : 2$ ，可設 $a = 5r$ 、 $b = 2r$ ($r \neq 0$)，

$$\begin{aligned} \text{(1) 大正方形周長 : 小正方形周長} &= (a \times 4) : (b \times 4) \\ &= (5r \times 4) : (2r \times 4) \\ &= 5 : 2 \end{aligned}$$

↘ 同除以 $4r$

所以大正方形與小正方形的周長比為 $5 : 2$ 。

$$\begin{aligned} \text{(2) 大正方形面積 : 小正方形面積} &= a^2 : b^2 = (5r)^2 : (2r)^2 \\ &= 25r^2 : 4r^2 \\ &= 25 : 4 \end{aligned}$$

↘ 同除以 r^2

所以大正方形與小正方形的面積比為 $25 : 4$ 。

從例 11 可以知道，當兩正方形的邊長比為 $a : b$ 時，周長比為 $a : b$ ，面積比為 $a^2 : b^2$ 。



隨堂練習

將一條 80 公分的繩子以 $3 : 5$ 的比例剪成兩段，分別圍出兩個正方形，則小正方形和大正方形的面積比為多少？

由題意可知小正方形周長 : 大正方形周長 = $3 : 5$

則小正方形邊長 : 大正方形邊長 = $3 : 5$

所以小正方形面積 : 大正方形面積 = $3^2 : 5^2 = 9 : 25$

例 12

比例尺問題 學習內容 N-7-9

右圖是臺灣鐵道路線圖，小妍用尺量得花蓮站到臺東站的距離約為 3 公分，則：

- (1) 這兩站的實際距離約為多少公里？
- (2) 若有一輛火車從花蓮站到臺東站以平均時速 120 公里的速度行駛，則花蓮站到臺東站的里程，行駛時間約為多少分鐘？



學習時光機

比例尺是指兩地在地圖上的距離和實際距離之間的比例。



裴秀
(西元 224~271 年)
西晉地圖學家，曾把當時一幅天下大圖縮小繪製成比例尺為 1:1800000 的地形圖，以便判讀晉國地圖。而他提出的「製圖六體」中，包含比例尺、方位和距離，對中國後來的地圖繪製影響很大。

解 (1) 右圖的比例尺為 $\frac{0 \quad 50 \quad 100}{\text{cm}} (km)$

表示縮圖上長 2 公分，實際長是 100 公里，

設兩站的實際距離約為 x 公里，

又兩站在地圖上的距離約為 3 公分，

可得比例式 $2:3=100:x$ ，

$$x=150,$$

所以這兩站的實際距離約為 150 公里。

(2) 設行駛時間約為 y 分鐘，

1 小時 = 60 分鐘，

可得比例式 $120:150=60:y$ ，

$$y=75,$$

所以花蓮站到臺東站的里程，行駛時間約為 75 分鐘。

隨堂練習

某國中的校園平面圖比例尺為 1:800，若在平面圖上，操場的長為 4 公分，寬為 2.5 公分，則操場實際的長、寬各為多少公尺？

設操場實際的長為 x 公分、寬為 y 公分

$$1:800=4:x$$

$$x=3200(\text{公分})=32(\text{公尺})$$

$$1:800=2.5:y$$

$$y=2000(\text{公分})=20(\text{公尺})$$

所以操場實際的長為 32 公尺、寬為 20 公尺



1 比與比值

兩個數 a 、 b 的比記為 $a:b$ ，其中 a 稱為比的前項， b 稱為比的後項，

$a:b$ 的比值為 $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$)。

例 一個比 $2:3$ 中， 2 為前項， 3 為後項，比值為 $\frac{2}{3}$ 。

2 相等的比

已知 a 、 b 、 m 三個數，其中 b 、 m 皆不為 0 ，則：

(1) $a:b = (a \times m):(b \times m)$ 。

例 $3:5 = (3 \times 2):(5 \times 2)$ 。

(2) $a:b = (a \div m):(b \div m)$ 。

例 $12:8 = (12 \div 4):(8 \div 4)$ 。

3 比例式

若 $a:b$ 和 $c:d$ 相等時，則 $a:b=c:d$ 稱為比例式，

其中 b 、 c 稱為這個比例式的內項， a 、 d 稱為這個比例式的外項。

例 比例式 $2:3=6:9$ 中，

3 、 6 為這個比例式的內項， 2 、 9 為這個比例式的外項。

4 比例式的運算性質

(1) 若比例式 $a:b=c:d$ ，則 $ad=bc$ ，即比例式的外項乘積等於內項乘積。

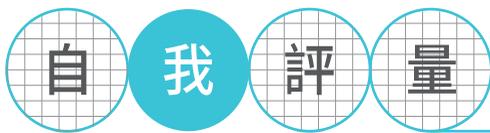
例 由比例式 $2:3=6:9$ ，可得 $2 \times 9 = 3 \times 6 = 18$ 。

(2) 若 $x:y=a:b$ ，其中 a 、 b 均不為 0 ，則：

① $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ 或 $x:a=y:b$ 。

② 可設 $x=ar$ 、 $y=br$ ($r \neq 0$)。

例 若 $x:y=3:5$ ，則可設 $x=3r$ 、 $y=5r$ ($r \neq 0$)。



- 1 茶世界飲料店中賣最好的頂級紅茶，為因應顧客口味，將甜度區分如右圖，求同為 500 c.c. 的兩杯頂級紅茶，少糖和微糖的含糖量比是多少？(化成最簡整數比) P.127 下方隨堂

依題意可得，

$$\begin{aligned} \text{少糖含糖量} : \text{微糖含糖量} &= \frac{3}{4} : \frac{1}{3} \\ &= 9 : 4 \end{aligned}$$

全糖

少糖 (全糖的 $\frac{3}{4}$)

半糖 (全糖的 $\frac{1}{2}$)

微糖 (全糖的 $\frac{1}{3}$)

無糖

- 2 求下列各比例式中的 x 值。

P.128 例 5

(1) $6 : x = (-5) : 3$

$$\begin{aligned} 6 \times 3 &= x \times (-5) \\ -5x &= 18 \\ x &= -\frac{18}{5} \end{aligned}$$

(2) $(x-1) : 5 = (2x+1) : 3$

$$\begin{aligned} 3(x-1) &= 5(2x+1) \\ 3x-3 &= 10x+5 \\ 7x &= -8 \\ x &= -\frac{8}{7} \end{aligned}$$

- 3 設 $x : 3 = y : 4$ ，且 x 、 y 皆不為 0，則：

P.129 例 6、P.131 例 8

- (1) $(x+2y) : (x-2y)$ 的比值為多少？

由 $x : 3 = y : 4$

得 $x : y = 3 : 4$

可設 $x = 3r$ 、 $y = 4r$ ($r \neq 0$)

$$\frac{(x+2y)}{(x-2y)} = \frac{3r+2 \times 4r}{3r-2 \times 4r} = \frac{11r}{-5r} = -\frac{11}{5}$$

- (2) 若 $3x+y=26$ ，則 $(x+2) : (y-2)$ 的比值為多少？

$3 \times 3r + 4r = 26$ ， $r = 2$

則 $x = 3 \times 2 = 6$ ， $y = 4 \times 2 = 8$

$$\frac{(x+2)}{(y-2)} = \frac{6+2}{8-2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

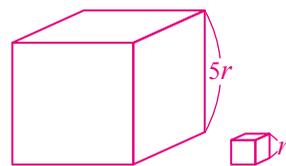
4 已知有大、小兩個正方體，小正方體邊長比大正方體邊長的比值為 $\frac{1}{5}$ ，則：

(1) 小正方體表面積比大正方體表面積的比值為何？

P.134 例 11

設小正方體邊長為 r 、大正方體邊長為 $5r$ ($r \neq 0$)

$$\begin{aligned} \text{則小正方體表面積} : \text{大正方體表面積} &= (6 \times r^2) : [6 \times (5r)^2] \\ &= 6r^2 : 150r^2 \\ &= 1 : 25 \end{aligned}$$



所以小正方體表面積比大正方體表面積的比值為 $\frac{1}{25}$

(2) 小正方體體積比大正方體體積的比值為何？

$$\begin{aligned} \text{小正方體體積} : \text{大正方體體積} &= r^3 : (5r)^3 \\ &= r^3 : 125r^3 \\ &= 1 : 125 \end{aligned}$$

所以小正方體體積比大正方體體積的比值為 $\frac{1}{125}$

挑錯題

小翊和小妍計算「已知 $x:y=9:5$ ，且 $y \neq -1$ ，則 $(x+1):(y+1)$ 的比值為何？」過程如下。判斷他們的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。

小翊：

已知 $x:y=9:5$

所以 $x=9, y=5$

故 $(x+1):(y+1)$ 的比值

$$\text{為 } \frac{9+1}{5+1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

小妍：

已知 $x:y=9:5$

可設 $x=9r, y=5r$ ($r \neq 0$)

$$\text{故 } (x+1):(y+1) \text{ 的比值} = \frac{9r+1}{5r+1}$$

這個值會隨著 r 值而改變

不是一個固定的數

正確解法如小妍