

## 4

## 比與比例式

## 4-1 比例式

## 4-2 正比與反比

## Are You Ready ?

## +++ 比與比值

小靖和小翊參加大胃王比賽，在同一時間內小靖吃了 12 個熱狗堡，小翊吃了 15 個熱狗堡，則小靖、小翊所吃的熱狗堡個數比可記為  $12 : 15$ ，比值是  $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ 。

## +++ 相等的比

在下列各  中填入適當的數值。

(1)  $14 : 21 = 42 : \boxed{63}$       (2)  $10 : 21 = \boxed{50} : 105$

## +++ 正比

下表是 5 元硬幣個數和總金額的關係，完成下表。

5 元硬幣個數 (個)	10	20	33	40	130
總金額 (元)	50	100	165	200	650

## +++ 速率

甲、乙兩地的距離是 180 公里，搭客運要 2 小時，騎機車要 3 小時，則客運和機車的平均時速分別為多少？

客運時速 90 公里，機車時速 60 公里

晶瑩剔透的泡泡，從口中一顆顆的吹出，是許多人童年的回憶之一。你曾經自製過泡泡水嗎？在調製泡泡水的配方中，洗碗精或洗髮精等與水的比例是重要的關鍵，同時也會影響泡泡的持久時間。本章我們就來介紹比例的概念。



MATHEMATICS



## 4-1

## 比例式

1 比與比值

2 比例式

3 應用問題

## 主題 1 比與比值

我們在國小時學到了比和比值的概念。



## 學習時光機

在數學上，比用來表示兩個數量的關係，以符號「:」來表示。

例如：大埔國中某學年度全校學生有 600 位，其中七年級學生有 200 位。我們就說該校七年級學生人數與全校學生人數的比為 200 比 600，記為  $200 : 600$ ，其中 200 稱為前項，600 稱為後項。

用 200 除以 600，可得  $200 \div 600 = \frac{200}{600} = \frac{1}{3}$ ，其中  $\frac{1}{3}$  稱為  $200 : 600$  的比值，也就是說七年級學生人數是全校學生人數的  $\frac{1}{3}$  倍。

因此，若甲與乙的比為  $a : b$  ( $b \neq 0$ )，則：

(1) 甲：乙的比值為  $\frac{a}{b}$ 。

(2) 甲是乙的  $\frac{a}{b}$  倍。

## 例 1

## 比值與倍數的關係 學習內容 N-7-9

右圖是製作 8 顆粽子的食譜，根據食譜回答下列問題：

- (1) 製作 8 顆粽子所需的水重量：醬油重量為 \_\_\_\_\_：\_\_\_\_\_，比值為\_\_\_\_\_。
- (2) 水重量是醬油重量的\_\_\_\_\_倍。
- (3) 醬油重量是水重量的\_\_\_\_\_倍。



肉粽食譜 (8 顆粽子)

## 食材

長糯米 400 公克

## 滷肉

豬梅花肉 100 公克、水 30 公克、  
醬油 12 公克、米酒 3 公克

## 其他

鹹蛋黃、蝦米、乾香菇、花生適量

解

- (1) 製作 8 顆粽子所需的水重量：醬油重量

為 30：12，其比值為  $\frac{30}{12} = \frac{5}{2}$ 。

- (2) 由(1)得水重量是醬油重量的
- $\frac{5}{2}$
- 倍。

- (3) 因為醬油重量：水重量 = 12：30，

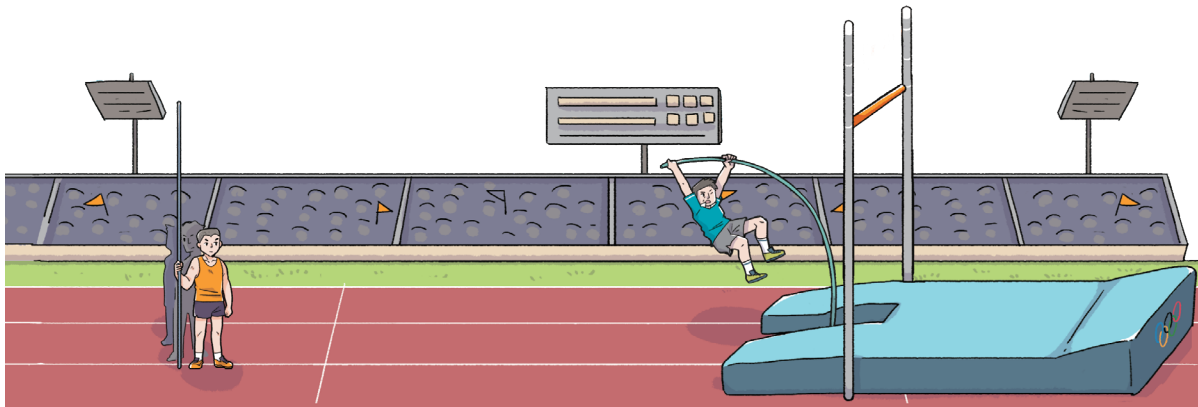
所以醬油重量是水重量的  $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$  倍。

## 你知道嗎？

奧林匹克運動會簡稱奧運，最早發源地位於古希臘的奧林匹亞。而隨著古希臘沒落，奧運停辦將近 1500 年。直到西元 1896 年由法國 顧拜旦 (Coubertin) 創立現代奧運，自此開始才決議每 4 年舉辦一次。

## 隨堂練習

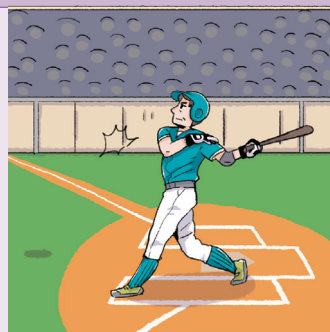
日本造幣局所發行的 2020 東京奧運紀念幣，其中白銅是由鎳和銅以 1：7 的比例所合成的，則這種紀念幣中，白銅裡鎳的重量是銅的重量的  $\frac{1}{7}$  倍。



## 例 2

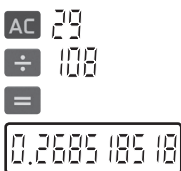
打擊率  學習內容 N-7-9

「打擊率」是棒球運動中評量打者成績的指標之一，其計算方式為選手安打次數與總打擊次數的比值，通常會化為小數並四捨五入取到小數點後第 3 位。設某職棒選手在最近 108 次打擊次數中，共擊出 29 支安打，則：



- (1) 該選手這段時間的打擊率為幾成？
- (2) 後來該選手又多了 42 次打數，如果要將打擊率提升為 3 成，他必須在這 42 次打擊次數中擊出幾支安打？

## 計算機操作



解 (1)  $29 : 108$  的比值是  $\frac{29}{108}$ ，

化為小數為 0.269 (以四捨五入取到小數點後第 3 位)，

一般記為 .269，讀作 2 成 69，

即該選手這段時間的打擊率為 2 成 69。

(2) 此時該選手總打數為  $108 + 42 = 150$  (次)，

若要將打擊率提升為 3 成，

應該要有的安打總數為  $150 \times 0.3 = 45$  (支)，

即該選手必須在這 42 次打數中，擊出  $45 - 29 = 16$  支安打。



## 隨堂練習

在一場籃球比賽中，選手的投進球數和總投球數的比值，稱為該選手的「命中率」，通常以百分率表示。若某次投籃比賽中，小翊共投進 21 球，命中率為 70% (或 7 成)，則他的總投球數為多少？

設總投球數為  $x$  球 ( $x \neq 0$ )

$21 : x$  的比值是  $\frac{21}{x}$

$\frac{21}{x} \times 100\% = 70\%$ ， $x = 30$

所以總投球數為 30 球

國小學到的比都是兩個正數的比，事實上，也可以含有負數的比。  
一般而言，兩個數  $a$ 、 $b$ ，

(1) 我們將  $a$  與  $b$  的比記為  $a : b$ ，讀作  $a$  比  $b$ ，

其中  $a$  稱為這個比的前項， $b$  稱為這個比的後項。

(2)  $a : b$  的比值為  $a \div b = \frac{a}{b}$  ( $b \neq 0$ )。

### 例 3

#### 比的比值 學習內容 N-7-9

寫出下列各比的比值，並以最簡分數表示。

(1)  $(-2) : 3$                       (2)  $\frac{2}{3} : (-\frac{3}{4})$                       (3)  $(-0.7) : (-1.3)$

**解** (1)  $(-2) : 3$  的比值為  $(-2) \div 3 = -\frac{2}{3}$ 。

(2)  $\frac{2}{3} : (-\frac{3}{4})$  的比值為  $\frac{2}{3} \div (-\frac{3}{4}) = \frac{2}{3} \times (-\frac{4}{3}) = -\frac{8}{9}$ 。

(3)  $(-0.7) : (-1.3)$  的比值為

$$\begin{aligned} (-0.7) \div (-1.3) &= (-\frac{7}{10}) \div (-\frac{13}{10}) \\ &= \frac{7}{10} \times \frac{10}{13} = \frac{7}{13}。 \end{aligned}$$

**Hint**

(3)也可以這樣做：

$$\begin{aligned} &(-0.7) \div (-1.3) \\ &= \frac{-0.7}{-1.3} \\ &= \frac{7}{13} \end{aligned}$$

分子、分母  
同乘以-10

#### 隨堂練習

寫出下列各比的比值，並以最簡分數表示。

(1)  $(-24) : (-12)$                       (2)  $\frac{1}{2} : (-\frac{2}{3})$                       (3)  $(-0.3) : 2.4$

$(-24) : (-12)$  的比值為

$$(-24) \div (-12)$$

$$= \frac{-24}{-12}$$

$$= 2$$

$\frac{1}{2} : (-\frac{2}{3})$  的比值為

$$\frac{1}{2} \div (-\frac{2}{3})$$

$$= \frac{1}{2} \times (-\frac{3}{2})$$

$$= -\frac{3}{4}$$

$(-0.3) : 2.4$  的比值為

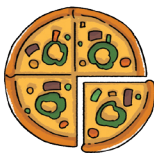
$$(-0.3) \div 2.4$$

$$= (-\frac{3}{10}) \div \frac{24}{10}$$

$$= (-\frac{3}{10}) \times \frac{10}{24}$$

$$= -\frac{1}{8}$$

小妍



小翊



## 相等的比

有兩個大小相同的披薩，小妍將其中一個披薩平均切成 4 塊，吃了 1 塊；小翊將另一個披薩平均切成 8 塊，吃了 2 塊。小妍和小翊兩人吃掉的部分與整個披薩的比分別為  $1:4$  及  $2:8$ ，兩個比的比值都是  $\frac{1}{4}$ ，這時候我們說  $1:4$  與  $2:8$  相等，寫成  $1:4=2:8$ 。

當幾個比的比值相等時，我們說這幾個比是**相等的比**，例如  $600:400$  與  $30:20$  的比值都是  $\frac{3}{2}$ ，所以  $600:400$  與  $30:20$  是相等的比，寫成  $600:400=30:20$ 。

### 你知道嗎？

披薩 (pizza) 的發源地是義大利的拿坡里，意思是混合著番茄、起司及不同食材烘焗而成的餅。



### 隨堂練習

下列何者與  $30:20$  是相等的比？

- (1)  $3:2$       (2)  $2:3$       (3)  $1:\frac{2}{3}$       (4)  $\frac{2}{3}:1$       (5)  $\frac{3}{2}:1$

$30:20$  的比值是  $\frac{30}{20}=\frac{3}{2}$

(2)、(4)的比值皆是  $\frac{2}{3}\neq\frac{3}{2}$

而(1)、(3)、(5)與  $30:20$  是相等的比

我們也可以利用比值的分子、分母同乘以或同除以不為 0 的數，得到比的運算性質，例如：

分子、分母同乘以 20

$$\frac{600}{400} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$$

分子、分母同除以 10

前項、後項同乘以 20

$$600:400 = 30:20 = 3:2$$

前項、後項同除以 10

由上面的說明，我們可以得到：

### Key point

#### 相等的比

已知  $a$ 、 $b$ 、 $m$  三個數，其中  $b$ 、 $m$  皆不為 0，則：

(1)  $a:b=(a\times m):(b\times m)$ 。

(2)  $a:b=(a\div m):(b\div m)$ 。

## 例 4

## 相等的比 學習內容 N-7-9

在下列各  中填入適當的數值。

(1)  $8 : 18 = 4 : \square$

(2)  $2 : (-7) = (-12) : \square$

解

$$(1) 8 : 18 = 4 : \square,$$

而  $18 \div 2 = 9$ ,

所以  中填 9。

$$(2) 2 : (-7) = (-12) : \square,$$

而  $(-7) \times (-6) = 42$ ,

所以  中填 42。



## 隨堂練習

在下列各  中填入適當的數值。

(1)  $(-15) : 20 = 3 : \square$

$\square = -4$

(2)  $3 : 7 = \square : (-14)$

$\square = -6$

## 學習時光機

若兩整數的最大公因數為 1，就稱這兩整數互質。

當一個比的前、後項都是整數，且前、後項彼此互質時，我們說這個比為最簡整數比，其比值為最簡分數。例如  $3 : 2$  與  $2 : 9$  都是最簡整數比；

$60 : 40$  與  $1 : \frac{9}{2}$  則不是最簡整數比。

習慣上，我們會將一個比以最簡整數比表示。



## 隨堂練習

將下列各比化為最簡整數比。

(1)  $13 : 26$

$= 1 : 2$

(2)  $14 : (-35)$

$= 2 : (-5)$

(3)  $\frac{1}{3} : \frac{1}{2}$

$= 2 : 3$



## 主題 2 比例式

在第 126 頁學過兩個相等的比  $a : b$  和  $c : d$ ，可寫成  $a : b = c : d$ ，這種等式稱為**比例式**，其中  $b$ 、 $c$  稱為這個比例式的**內項**， $a$ 、 $d$  稱為這個比例式的**外項**。

當  $a : b = c : d$ ，即  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ，將算式  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  的等號兩邊同乘以  $bd$ ， $\frac{a}{b} \times bd = \frac{c}{d} \times bd$ ，得到  $ad = bc$ 。

Hint

$$\begin{array}{c} a \times d \\ \hline a : b = c : d \\ \hline b \times c \end{array}$$

### Key point

#### 比例式的運算性質①

若比例式  $a : b = c : d$ ，則  $ad = bc$ ，即比例式的外項乘積等於內項乘積。

### 例 5

#### 比例式運算性質①的應用 學習內容 N-7-9

求下列各比例式中的  $x$  值。

(1)  $8 : 9 = 14 : x$

(2)  $(x-2) : 6 = (x+8) : 8$

解

(1) 因為  $8 : 9 = 14 : x$

所以  $8 \times x = 9 \times 14$

$$\begin{aligned} x &= \frac{9 \times 14}{8} \\ &= \frac{63}{4} \end{aligned}$$

(2) 因為  $(x-2) : 6 = (x+8) : 8$

所以  $(x-2) \times 8 = 6 \times (x+8)$

$$8x - 16 = 6x + 48$$

$$2x = 64$$

$$x = 32$$



#### 隨堂練習

求下列各比例式中的  $x$  值。

(1)  $\frac{2}{3}x : \frac{3}{2} = 8 : 1$

$$\frac{2}{3}x \times 1 = \frac{3}{2} \times 8$$

$$\frac{2}{3}x = 12$$

$$x = 18$$

(2)  $(2x+1) : (x-3) = (-3) : 2$

$$(2x+1) \times 2 = (x-3) \times (-3)$$

$$4x+2 = -3x+9$$

$$7x = 7$$

$$x = 1$$

由比例式的外項乘積等於內項乘積可知，

若比例式  $x : y = 2 : 3$ ，則  $3x = 2y$ ，將等號兩邊同除以 6，得  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$ 。

若設  $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = r$ ，可得  $x = 2r$ 、 $y = 3r$ 。

### Key point

#### 比例式的運算性質②

若  $x : y = a : b$ ，其中  $a$ 、 $b$  均不為 0，則：

- (1)  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$  或  $x : a = y : b$ 。
- (2) 可設  $x = ar$ 、 $y = br$  ( $r \neq 0$ )。

### 例 6

#### 比例式運算性質②的應用 學習內容 N-7-9

有兩數  $x$ 、 $y$ ，已知  $x : y = 3 : 2$ ，且  $x + y = 20$ ，則  $x$ 、 $y$  的值分別為多少？

**解** 由  $x : y = 3 : 2$ ，  
 可設  $x = 3r$ 、 $y = 2r$  ( $r \neq 0$ )，  
 代入  $x + y = 20$ ，  
 得  $3r + 2r = 20$ ， $r = 4$ ，  
 所以  $x = 3r = 12$ 、 $y = 2r = 8$ 。



#### 隨堂練習

有兩數  $x$ 、 $y$ ，已知  $x : y = 5 : 7$ ，且  $x - y = 30$ ，則  $x$ 、 $y$  的值分別為多少？

由  $x : y = 5 : 7$   
 可設  $x = 5r$ 、 $y = 7r$  ( $r \neq 0$ )  
 代入  $x - y = 30$   
 得  $5r - 7r = 30$ ， $r = -15$   
 所以  $x = 5r = -75$   
 $y = 7r = -105$

## 例 7

比例式運算性質②的應用 學習內容 N-7-9

設  $x$ 、 $y$  皆不為 0，且  $7x=4y$ ，求下列各比的比值。

(1)  $x : y$

(2)  $2x : 3y$

解

$7x=4y$

$\frac{x}{4} = \frac{y}{7}$

同除以 28

設  $\frac{x}{4} = \frac{y}{7} = r (r \neq 0)$ ，

得  $x=4r$ 、 $y=7r$ ，

(1)  $x : y = 4r : 7r$

$= 4 : 7$

同除以  $r$ 所以  $x : y$  的比值為  $\frac{4}{7}$ 。

(2)  $2x : 3y = (2 \times 4r) : (3 \times 7r)$

$= 8r : 21r$

$= 8 : 21$

同除以  $r$ 所以  $2x : 3y$  的比值為  $\frac{8}{21}$ 。

Hint

(1)也可以這樣做：

由  $7x=4y$ 

$\frac{7x}{y} = 4$

同除以  $y$ 

$\frac{x}{y} = \frac{4}{7}$

同除以 7

得  $x : y = 4 : 7$ 。



## 隨堂練習

設  $x$ 、 $y$  皆不為 0，且  $3x=5y$ ，則：

(1)  $x : y = \underline{5} : \underline{3}$ 。

(2)  $7x : 3y = \underline{35} : \underline{9}$ 。

$3x=5y$  同除以 15，得  $\frac{x}{5} = \frac{y}{3}$

設  $\frac{x}{5} = \frac{y}{3} = r (r \neq 0)$

得  $x=5r$ 、 $y=3r$

(1)  $x : y = 5r : 3r = 5 : 3$

(2)  $7x : 3y = (7 \times 5r) : (3 \times 3r) = 35 : 9$



## 例 8

## 比例式運算性質的綜合運用 學習內容 N-7-9

設  $(a+b):(a-b)=3:(-2)$ ，計算下列各式。

(1)  $a:b=$  \_\_\_\_\_  $:$  \_\_\_\_\_。

(2)  $b:(a-b)$  的比值。

解

$$(1) (a+b):(a-b)=3:(-2)$$

$$(-2)\times(a+b)=3\times(a-b)$$

$$-2a-2b=3a-3b$$

$$5a=b$$

$$a:b=1:5$$

(2) 由(1)可設  $a=r$ 、 $b=5r$  ( $r\neq 0$ )，

$$\text{則 } b:(a-b)=5r:(-4r)$$

$$=5:(-4)$$

所以  $b:(a-b)$  的比值為  $-\frac{5}{4}$ 。

Hint

(2)也可以這樣做：  
由(1)  $5a=b$  代入，  
則  $b:(a-b)=5a:(-4a)$   
 $=5:(-4)$ 。



## 隨堂練習

設  $(a+b):(a-b)=(-5):2$ ，計算下列各式。

(1)  $a:b=$    3    $:$    7  。

(2) 計算  $\frac{a+3b}{a-3b}$  的值。

$$(1) (a+b):(a-b)=(-5):2$$

$$2\times(a+b)=(-5)\times(a-b)$$

$$2a+2b=-5a+5b$$

$$7a=3b$$

$$a:b=3:7$$

(2) 由(1)可設  $a=3r$ 、 $b=7r$  ( $r\neq 0$ )

$$\text{則 } \frac{a+3b}{a-3b} = \frac{3r+3\times 7r}{3r-3\times 7r} = \frac{24r}{-18r} = -\frac{4}{3}$$

### 主題 3 應用問題

比與比值、比例式在生活中的應用非常廣泛，以下舉些例子說明。

例 9

#### 數量問題 學習內容 N-7-9

小翊和小靖各有一些零用錢，且小翊零用錢的 2 倍和小靖零用錢的 3 倍一樣多，則：

- (1) 小翊的零用錢：小靖的零用錢 = \_\_\_\_\_ : \_\_\_\_\_。
- (2) 承(1)，若小翊和小靖的零用錢共有 500 元，那麼小翊和小靖的零用錢各有多少元？

解

(1) 設小翊的零用錢有  $x$  元、小靖的零用錢有  $y$  元，

依題意可得  $2x=3y$ ，則  $x:y=3:2$ 。

(2) 由(1)可設小翊的零用錢有  $3r$  元、小靖的零用錢有  $2r$  元 ( $r \neq 0$ )，

依題意可得  $3r+2r=500$

$$r=100$$

所以小翊的零用錢有  $3 \times 100 = 300$  元，

小靖的零用錢有  $2 \times 100 = 200$  元。



#### 隨堂練習

箱子裡有一些蘋果和梨子，若蘋果顆數的 5 倍等於梨子顆數的 4 倍，且蘋果比梨子少 21 顆，則蘋果和梨子各有多少顆？

設蘋果有  $x$  顆、梨子有  $y$  顆

依題意可得  $5x=4y$ ， $x:y=4:5$

設  $x=4r$ 、 $y=5r$  ( $r \neq 0$ )

$$4r=5r-21$$

$$r=21$$

所以蘋果有  $4 \times 21 = 84$  顆

梨子有  $5 \times 21 = 105$  顆



## 例 10

## 數量變化問題 學習內容 N-7-9

亞駿和雅婷都喜愛跑馬拉松，已知兩人原本跑的公里數比是 6 : 5，後來兩人分別又跑了 5 公里和 3 公里，結果總里程數的比變為 5 : 4，則兩人原本各跑了多少公里？



## 你知道嗎？

馬拉松 (marathon) 是一項考驗耐力的長跑運動，其名稱源於古希臘的馬拉松戰役。在西元 1921 年，馬拉松的長度被確立為 42.195 公里，而西元 1980 年後，半程馬拉松 (約 21 公里) 才在民間興起。

解 設亞駿原跑  $6r$  公里、雅婷原跑  $5r$  公里 ( $r \neq 0$ )，

依題意可得  $(6r+5) : (5r+3) = 5 : 4$

$$4(6r+5) = 5(5r+3)$$

$$24r+20 = 25r+15$$

$$r = 5$$

所以亞駿原跑  $6 \times 5 = 30$  公里，

雅婷原跑  $5 \times 5 = 25$  公里。

## 隨堂練習

公園裡原有男生、女生人數比為 9 : 7，後來有 3 位男生和 6 位女生走出公園，剩下的男生、女生人數比變為 3 : 2，則公園裡原有男生、女生各多少位？

設公園裡原有男生  $9r$  位、女生  $7r$  位 ( $r \neq 0$ )

依題意可得  $(9r-3) : (7r-6) = 3 : 2$

$$2(9r-3) = 3(7r-6)$$

$$18r-6 = 21r-18$$

$$r = 4$$

所以原有男生  $9 \times 4 = 36$  位

女生  $7 \times 4 = 28$  位

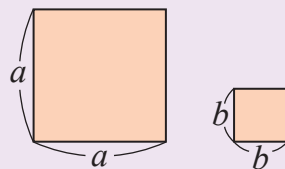
接下來，我們來探討平面圖形中，正方形邊長比與其周長比、面積比之間的關係。

### 例 11

#### 正方形邊長比與其周長比、面積比的關係 學習內容 N-7-9

如右圖，有大、小兩個正方形，設大正方形的邊長為  $a$ ，小正方形的邊長為  $b$ ，已知  $a : b = 5 : 2$ ，則：

- (1) 大正方形與小正方形的周長比 = ?
- (2) 大正方形與小正方形的面積比 = ?



**解** 由  $a : b = 5 : 2$ ，可設  $a = 5r$ 、 $b = 2r$  ( $r \neq 0$ )，

$$\begin{aligned} \text{(1) 大正方形周長 : 小正方形周長} &= (a \times 4) : (b \times 4) \\ &= (5r \times 4) : (2r \times 4) \\ &= 5 : 2 \end{aligned}$$

↘ 同除以  $4r$

所以大正方形與小正方形的周長比為  $5 : 2$ 。

$$\begin{aligned} \text{(2) 大正方形面積 : 小正方形面積} &= a^2 : b^2 = (5r)^2 : (2r)^2 \\ &= 25r^2 : 4r^2 \\ &= 25 : 4 \end{aligned}$$

↘ 同除以  $r^2$

所以大正方形與小正方形的面積比為  $25 : 4$ 。

從例 11 可以知道，當兩正方形的邊長比為  $a : b$  時，周長比為  $a : b$ ，面積比為  $a^2 : b^2$ 。



#### 隨堂練習

將一條 80 公分的繩子以  $3 : 5$  的比例剪成兩段，分別圍出兩個正方形，則小正方形和大正方形的面積比為多少？

由題意可知小正方形周長 : 大正方形周長 =  $3 : 5$

則小正方形邊長 : 大正方形邊長 =  $3 : 5$

所以小正方形面積 : 大正方形面積 =  $3^2 : 5^2 = 9 : 25$

## 例 12

## 比例尺問題 學習內容 N-7-9

右圖是臺灣鐵道路線圖，小妍用尺量得花蓮站到臺東站的距離約為 3 公分，則：

- (1) 這兩站的實際距離約為多少公里？
- (2) 若有一輛火車從花蓮站到臺東站以平均時速 120 公里的速度行駛，則花蓮站到臺東站的里程，行駛時間約為多少分鐘？



## 學習時光機

比例尺是指兩地在地圖上的距離和實際距離之間的比例。



## 裴秀

(西元 224~271 年)  
西晉地圖學家，曾把當時一幅天下大圖縮小繪製成比例尺為 1:1800000 的地形圖，以便判讀晉國地圖。而他提出的「製圖六體」中，包含比例尺、方位和距離，對中國後來的地圖繪製影響很大。

解

- (1) 右圖的比例尺為  $\frac{0 \quad 50 \quad 100}{\text{公分}} (km)$

表示縮圖上長 2 公分，實際長是 100 公里，

設兩站的實際距離約為  $x$  公里，

又兩站在地圖上的距離約為 3 公分，

可得比例式  $2 : 3 = 100 : x$ ，

$$x = 150,$$

所以這兩站的實際距離約為 150 公里。

- (2) 設行駛時間約為  $y$  分鐘，

1 小時 = 60 分鐘，

可得比例式  $120 : 150 = 60 : y$ ，

$$y = 75,$$

所以花蓮站到臺東站的里程，行駛時間約為 75 分鐘。

## 隨堂練習

某國中的校園平面圖比例尺為 1:800，若在平面圖上，操場的長為 4 公分，寬為 2.5 公分，則操場實際的長、寬各為多少公尺？

設操場實際的長為  $x$  公分、寬為  $y$  公分

$$1 : 800 = 4 : x$$

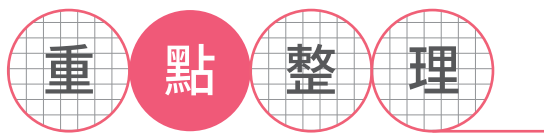
$$x = 3200 (\text{公分}) = 32 (\text{公尺})$$

$$1 : 800 = 2.5 : y$$

$$y = 2000 (\text{公分}) = 20 (\text{公尺})$$

所以操場實際的長為 32 公尺、寬為 20 公尺





### 1 比與比值

兩個數  $a$ 、 $b$  的比記為  $a:b$ ，其中  $a$  稱為比的前項， $b$  稱為比的後項，

$a:b$  的比值為  $\frac{a}{b}$  ( $b \neq 0$ )。

**例** 一個比  $2:3$  中， $2$  為前項， $3$  為後項，比值為  $\frac{2}{3}$ 。

### 2 相等的比

已知  $a$ 、 $b$ 、 $m$  三個數，其中  $b$ 、 $m$  皆不為  $0$ ，則：

(1)  $a:b = (a \times m):(b \times m)$ 。

**例**  $3:5 = (3 \times 2):(5 \times 2)$ 。

(2)  $a:b = (a \div m):(b \div m)$ 。

**例**  $12:8 = (12 \div 4):(8 \div 4)$ 。

### 3 比例式

若  $a:b$  和  $c:d$  相等時，則  $a:b=c:d$  稱為比例式，

其中  $b$ 、 $c$  稱為這個比例式的內項， $a$ 、 $d$  稱為這個比例式的外項。

**例** 比例式  $2:3=6:9$  中，

$3$ 、 $6$  為這個比例式的內項， $2$ 、 $9$  為這個比例式的外項。

### 4 比例式的運算性質

(1) 若比例式  $a:b=c:d$ ，則  $ad=bc$ ，即比例式的外項乘積等於內項乘積。

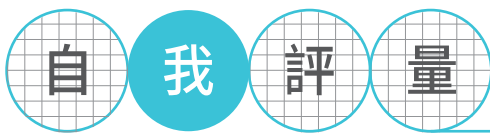
**例** 由比例式  $2:3=6:9$ ，可得  $2 \times 9 = 3 \times 6 = 18$ 。

(2) 若  $x:y=a:b$ ，其中  $a$ 、 $b$  均不為  $0$ ，則：

①  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$  或  $x:a=y:b$ 。

② 可設  $x=ar$ 、 $y=br$  ( $r \neq 0$ )。

**例** 若  $x:y=3:5$ ，則可設  $x=3r$ 、 $y=5r$  ( $r \neq 0$ )。



- 1 茶世界飲料店中賣最好的頂級紅茶，為因應顧客口味，將甜度區分如右圖，求同為 500 c.c. 的兩杯頂級紅茶，少糖和微糖的含糖量比是多少？(化成最簡整數比) P.127 下方隨堂

依題意可得，

$$\begin{aligned}\text{少糖含糖量} : \text{微糖含糖量} &= \frac{3}{4} : \frac{1}{3} \\ &= 9 : 4\end{aligned}$$

全糖

少糖 (全糖的  $\frac{3}{4}$ )

半糖 (全糖的  $\frac{1}{2}$ )

微糖 (全糖的  $\frac{1}{3}$ )

無糖

- 2 求下列各比例式中的  $x$  值。

P.128 例 5

(1)  $6 : x = (-5) : 3$

$$6 \times 3 = x \times (-5)$$

$$-5x = 18$$

$$x = -\frac{18}{5}$$

(2)  $(x-1) : 5 = (2x+1) : 3$

$$3(x-1) = 5(2x+1)$$

$$3x-3 = 10x+5$$

$$7x = -8$$

$$x = -\frac{8}{7}$$

- 3 設  $x : 3 = y : 4$ ，且  $x$ 、 $y$  皆不為 0，則：

P.129 例 6、P.131 例 8

- (1)  $(x+2y) : (x-2y)$  的比值為多少？

由  $x : 3 = y : 4$

得  $x : y = 3 : 4$

可設  $x = 3r$ 、 $y = 4r$  ( $r \neq 0$ )

$$\frac{(x+2y)}{(x-2y)} = \frac{3r+2 \times 4r}{3r-2 \times 4r} = \frac{11r}{-5r} = -\frac{11}{5}$$

- (2) 若  $3x+y=26$ ，則  $(x+2) : (y-2)$  的比值為多少？

$$3 \times 3r + 4r = 26, r = 2$$

則  $x = 3 \times 2 = 6$ ， $y = 4 \times 2 = 8$

$$\frac{(x+2)}{(y-2)} = \frac{6+2}{8-2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

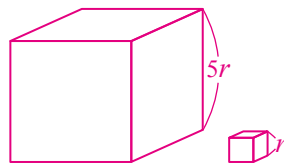
4 已知有大、小兩個正方體，小正方體邊長比大正方體邊長的比值為  $\frac{1}{5}$ ，則：

(1) 小正方體表面積比大正方體表面積的比值為何？

P.134 例 11

設小正方體邊長為  $r$ 、大正方體邊長為  $5r$  ( $r \neq 0$ )

$$\begin{aligned} \text{則小正方體表面積} : \text{大正方體表面積} &= (6 \times r^2) : [6 \times (5r)^2] \\ &= 6r^2 : 150r^2 \\ &= 1 : 25 \end{aligned}$$



所以小正方體表面積比大正方體表面積的比值為  $\frac{1}{25}$

(2) 小正方體體積比大正方體體積的比值為何？

$$\begin{aligned} \text{小正方體體積} : \text{大正方體體積} &= r^3 : (5r)^3 \\ &= r^3 : 125r^3 \\ &= 1 : 125 \end{aligned}$$

所以小正方體體積比大正方體體積的比值為  $\frac{1}{125}$

### 挑錯題

小翊和小妍計算「已知  $x:y=9:5$ ，且  $y \neq -1$ ，則  $(x+1):(y+1)$  的比值為何？」過程如下。判斷他們的解法是否正確？若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。

小翊：

已知  $x:y=9:5$

所以  $x=9, y=5$

故  $(x+1):(y+1)$  的比值

$$\text{為 } \frac{9+1}{5+1} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

小妍：

已知  $x:y=9:5$

可設  $x=9r, y=5r$  ( $r \neq 0$ )

$$\text{故 } (x+1):(y+1) \text{ 的比值} = \frac{9r+1}{5r+1}$$

這個值會隨著  $r$  值而改變

不是一個固定的數

正確解法如小妍