

## 5

## 一元一次不等式

5-1 認識一元一次不等式

5-2 解一元一次不等式

## Are You Ready ?

+++ 以文字符號列式

小祐的撲滿中有 5 元、10 元硬幣共  $x$  個，其中 10 元的硬幣有 32 個，則：

- (1) 小祐的撲滿中有  $x-32$  個 5 元硬幣。
- (2) 小祐的撲滿中共有  $5(x-32)+320$  元。(不需化簡)

+++ 等量公理與移項法則

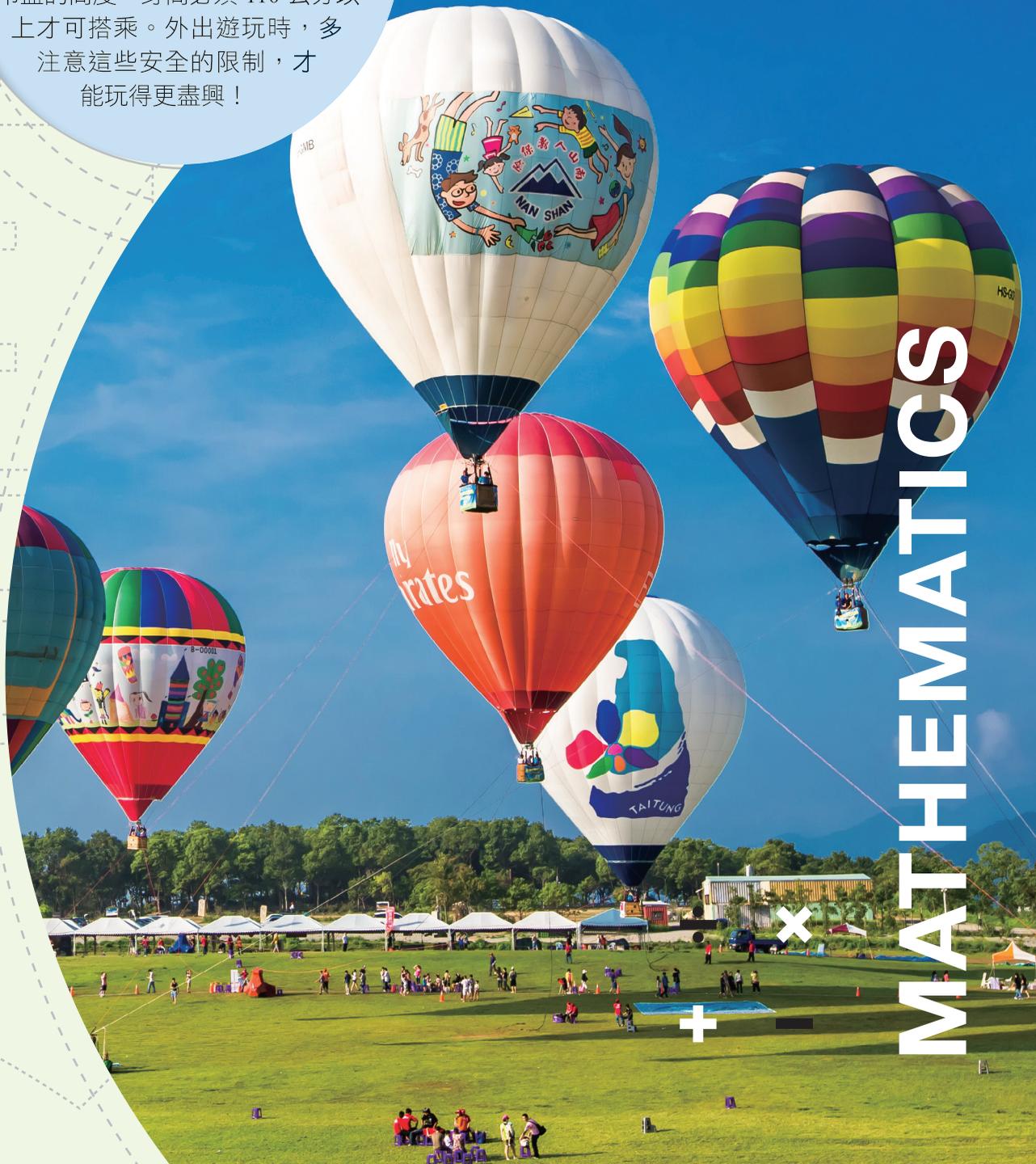
- (1) 若  $3x - (-5) = 22$ ，則  $3x =$  17。
- (2) 若  $12 + 5x = 8$ ，則  $5x =$  -4。
- (3) 若  $-\frac{3}{5}x = 18$ ，則  $x =$  -30。

+++ 數線

已知一條數線，以右方為正向，回答下列問題：

- (1) 數線上愈右邊的數愈 大。(填大或小)
- (2) 數線上左邊的數比右邊的數 小。(填大或小)
- (3) 原點左邊的數都是 負 數。(填正或負)

臺東縣政府每年都在  
臺東縣鹿野高臺舉辦「臺灣  
國際熱氣球嘉年華」，現場不  
只有熱氣球的展示，還能搭乘喲！  
為了安全起見，每顆熱氣球承載以  
200 公斤為上限，另外也考量熱氣球  
吊籃的高度，身高必須 110 公分以  
上才可搭乘。外出遊玩時，多  
注意這些安全的限制，才  
能玩得更盡興！



## 5-1

## 認識一元一次不等式

- 1 一元一次不等式
- 2 一元一次不等式的解與圖示

## 主題 1 一元一次不等式



在高速公路上我們可以看到下面的交通標誌，如果我們把車輛的時速設為  $x$  公里，則：



代表最高速限為每小時 110 公里，  
表示「時速不高於 110 公里」，  
也就是說， $x$  要小於或等於 110 公里，  
我們可以將「 $x < 110$  或  $x = 110$ 」合併用「 $x \leq 110$ 」表示，  
其中符號「 $\leq$ 」代表「小於或等於」的意思，  
讀作「 $x$  小於或等於 110」。



代表最低速限為每小時 60 公里，  
表示「時速不低於 60 公里」，  
也就是說， $x$  要大於或等於 60 公里，  
我們可以將「 $x > 60$  或  $x = 60$ 」合併用「 $x \geq 60$ 」表示，  
其中符號「 $\geq$ 」代表「大於或等於」的意思，  
讀作「 $x$  大於或等於 60」。

接著我們再來看另一個例子。下表是某天文館劇場門票的收費標準：

天文館劇場票價一覽表

票種類別	票價	適用對象
全票	100 元	一般參觀民眾。
優待票	50 元	① 6 歲以上(含)，而未滿 12 歲之兒童。 ② 年滿 65 歲以上(含)之長者。
免費入場	0 元	① 未滿 6 歲且有師長同行之兒童。 ② 身心障礙者。(及其負責照護者一名)

假設小恩的年齡為  $x$  歲，小恩外婆的年齡為  $y$  歲，根據上表可知：

小恩  因為我未滿 6 歲，我不需要購買門票。 → 即  $x < 6$

外婆  因為我 65 歲以上，所以購買優待票。 → 即  $y \geq 65$

小萱  我比小恩大 2 歲，但購買的是優待票。 → 即  $x + 2 \geq 6$ ，且  $x + 2 < 12$

### 學習時光機

$ax + b = 0$  ( $a \neq 0$ ) 稱為一元一次方程式。

像上述  $x < 6$ 、 $y \geq 65$ 、 $x + 2 \geq 6$ 、 $x + 2 < 12$  等，這類含有不等號  $>$ 、 $<$ 、 $\geq$ 、 $\leq$  的式子，稱為**不等式**。如果不等式中，只含有一種未知數（一元），且未知數的次數為 1（一次），則此不等式就稱為**一元一次不等式**，上面出現的不等式都是一元一次不等式。

### Key point

#### 一元一次不等式

若不等式中，只含有一種未知數（一元），且未知數的次數為 1（一次），則此不等式就稱為一元一次不等式。



哈里奧特

(*Thomas Harriot*, 西元 1560~1621 年) 是首位使用  $>$  和  $<$  符號的英國數學家。

對於日常生活的習慣用語和不等號的對照關係，可以用下表來表示：

習慣用語	不等號
(1) 大於、超過、高於	$>$
(2) 小於、未滿、低於、不到、不夠、不足	$<$
(3) 不小於、不低於、至少、以上(含)	$\geq$
(4) 不大於、不超過、不逾、不高於、至多、以下(含)	$\leq$



### 隨堂練習

將下面的敘述改寫成不等式。

(1)  $3x$  不超過 18

$$3x \leq 18$$

(2)  $4y-9$  超過 36

$$4y-9 > 36$$

(3)  $2x-3$  不低於 40

$$2x-3 \geq 40$$

(4)  $5x+3$  未滿 23

$$5x+3 < 23$$

你知道這些積木可以拼成哪一個國字嗎？



答案請見第 160 頁

## 例 1

## 由情境列出不等式(單一不等號) 學習內容 A-7-7

依下列情境列出  $x$  的不等式。(不需化簡)

- (1) 小翊帶了 100 元到便利商店買礦泉水，若他拿了 4 瓶售價  $x$  元的礦泉水，付錢時卻發現錢不夠。
- (2) 小妍身上原有  $x$  元，如果再加上弟弟的 220 元後，姐弟倆就有足夠的錢訂購定價 650 元的母親節蛋糕。



**解** (1) 4 瓶礦泉水的售價是  $4x$  元，而小翊帶了 100 元不夠付帳，可以列出不等式為  $4x > 100$ 。



- (2) 小妍和弟弟共有  $(x + 220)$  元，足夠訂購定價 650 元的母親節蛋糕，可以列出不等式為  $x + 220 \geq 650$ 。


 隨堂練習

依下列情境列出  $x$  的不等式。(不需化簡)

- (1) 小惠設計一面長方形的班旗，長為 10 公分，寬比長少  $x$  公分，且面積不到 60 平方公分。
- (2) 一學期有三次數學測驗，若三次總分達 270 分以上(含)即可得到獎勵。小妍三次測驗的分數分別為 86 分、91 分、 $x$  分，且小妍得到獎勵。

- (1) 長方形的寬是  $(10 - x)$  公分，可以列出不等式為  $10(10 - x) < 60$   
 (2) 小妍三次測驗的總分是  $(86 + 91 + x)$  分，且小妍得到獎勵  
 可以列出不等式為  $86 + 91 + x \geq 270$

### 你知道嗎？

空氣品質指標是依據當日空氣中的臭氧、細懸浮微粒等濃度，及其對人體的影響轉換成指標值。

在我們生活周遭常見到有上下範圍的情境描述，

例如：假設空氣品質指標  $AQI$  ( *Air Quality Index* ) 值為  $x$ ，且某地區指標顯示為「普通」時， $x$  應在 51 以上 ( 含 )，但不超過 100，可用「 $51 \leq x \leq 100$ 」表示，意思是「 $51 \leq x$ 」和「 $x \leq 100$ 」同時成立。

## 例 2

### 由情境列出不等式 ( 兩個不等號 ) 學習內容 A-7-7

下表是某網路書城的會員分級對照表：



鑽石會員 消費累積 8000 元以上 ( 含 )。



白金會員 消費累積 5000 元以上 ( 含 )，未滿 8000 元。



黃金會員 消費累積 2000 元以上 ( 含 )，未滿 5000 元。



一般會員 已註冊，消費累積未滿 2000 元。



- (1) 若小昱消費累積  $x$  元且是白金會員，試以不等式表示  $x$  的範圍。
- (2) 若小可消費累積  $y$  元且是一般會員，試以不等式表示  $y$  的範圍。

解

- (1) 因為白金會員是「5000 元以上 ( 含 )，未滿 8000 元」，所以可以列式為  $5000 \leq x < 8000$ 。
- (2) 因為一般會員是「未滿 2000 元」，所以列式為  $y < 2000$ ，又消費金額必為「0 元以上 ( 含 )」，所以列式為  $0 \leq y$ ，故可以列式為  $0 \leq y < 2000$ 。

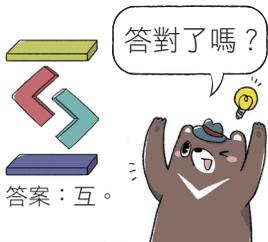


### 隨堂練習

根據例 2 的情境，回答下列問題：

- (1) 若白白消費累積  $a$  元且是黃金會員，試以不等式表示  $a$  的範圍。
- (2) 若大宛消費累積  $b$  元且是鑽石會員，試以不等式表示  $b$  的範圍。

- (1) 因為黃金會員是「2000 元以上 ( 含 )，未滿 5000 元」  
所以可以列式為  $2000 \leq a < 5000$
- (2) 因為鑽石會員是「8000 元以上 ( 含 )」  
所以可以列式為  $b \geq 8000$



答案：互。

## 主題 2 一元一次不等式的解與圖示

我們在第一冊學過能使一元一次方程式等式成立的數，稱為該方程式的解。例如： $x=3$  能使  $x+5=8$  等式成立，所以  $x=3$  是  $x+5=8$  的解。

同樣的，在一元一次不等式中，能使一元一次不等式成立的數，稱為該不等式的解。我們來看下面的例題。

### 例 3

#### 判斷不等式的解 學習內容 A-7-8

下列哪些數是不等式  $3x-7 \leq 9$  的解？

- (1)  $-2$                       (2)  $8$                       (3)  $5\frac{1}{3}$

解

	$x$	$3x-7$	$3x-7 \leq 9$
(1)	$-2$	$3 \times (-2) - 7 = -13$	不等式成立
(2)	$8$	$3 \times 8 - 7 = 17$	不等式不成立
(3)	$5\frac{1}{3}$	$3 \times 5\frac{1}{3} - 7 = 9$	不等式成立

所以  $x = -2$  和  $x = 5\frac{1}{3}$  都是不等式  $3x-7 \leq 9$  的解。

一般而言，在沒有其他條件的限制下，一元一次不等式的解通常不只一個。



#### 隨堂練習

下列哪些數是不等式  $15 > 8 + 2x$  的解？

- (1)  $4$                       (2)  $-5$                       (3)  $3\frac{1}{2}$

	$x$	$8+2x$	$15 > 8+2x$
(1)	$4$	$8+2 \times 4 = 16$	不等式不成立
(2)	$-5$	$8+2 \times (-5) = -2$	不等式成立
(3)	$3\frac{1}{2}$	$8+2 \times 3\frac{1}{2} = 15$	不等式不成立

所以  $x = -5$  是不等式  $15 > 8 + 2x$  的解

像  $x > 1$ 、 $x \geq 1$ 、 $x < 3$ 、 $x \leq 2$  等這類的 $不等式$ ，我們可以直接判斷哪些數是它們的解，哪些數不是它們的解，此時就可以在數線上將它們的解都表示出來。我們來看下面的例題。

### 例 4

#### 圖示不等式的解 (單一不等號) 學習內容 A-7-8

在數線上圖示下列各不等式的解。

(1)  $x < 1$

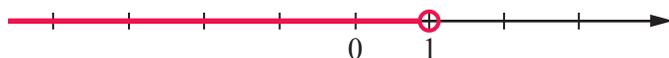
(2)  $x \geq -2$

解

(1) 不等式  $x < 1$  的解就是所有比 1 小的數，

而在數線上，所有小於 1 的數都在坐標為 1 之左邊的點，

所以我們可以用下圖來表示  $x < 1$  的解：



圖中符號「○」是一個空心的圓圈，

代表坐標為 1 的點**不包含**在這不等式的解內。

(2) 不等式  $x \geq -2$  的解就是所有比 -2 大，或是等於 -2 的數，

而在數線上，所有大於 -2 的數都在坐標為 -2 之右邊的點，

等於 -2 的數就是坐標為 -2 的點，

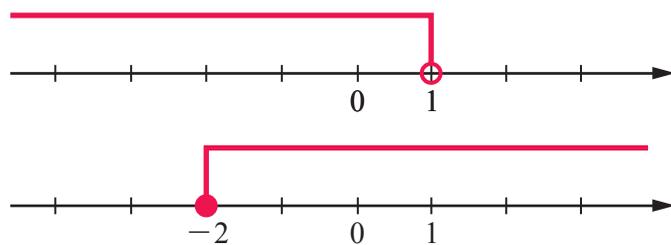
所以我們可以用下圖來表示  $x \geq -2$  的解：



圖中符號「●」是一個實心的圓圈，

代表坐標為 -2 的點**包含**在這不等式的解內。

另外為了方便繪製，也經常以下圖的方法表示如例 4 中不等式的解：





### 隨堂練習

在數線上圖示下列各不等式的解。

(1)  $x > -3$



(2)  $x \leq \frac{2}{3}$



### 例 5

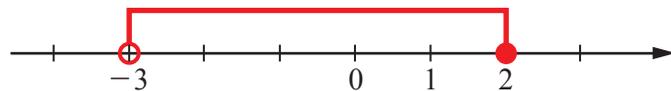
#### 圖示不等式的解 (兩個不等號) 學習內容 A-7-8

在數線上圖示不等式  $-3 < x \leq 2$  的解。

**解** 不等式  $-3 < x \leq 2$ ，表示「 $x$  大於  $-3$ 」且「 $x$  小於或等於  $2$ 」，圖示如下：



也可圖示如下：



### 隨堂練習

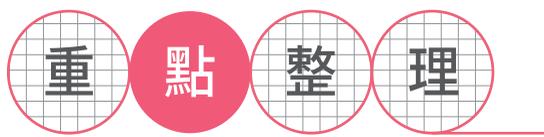
在數線上圖示下列各不等式的解。

(1)  $-4 \leq x \leq 1$



(2)  $3 > x > -2$





### 1 一元一次不等式

若不等式中，只含有一種未知數（一元），且未知數的次數為1（一次），則此不等式就稱為一元一次不等式。

例  $x < 25$ 、 $2y - 3 > 7$ 、 $4a \geq 5$ 、 $b \leq 2$  都稱為一元一次不等式。

### 2 習慣用語和不等號的對照表

習慣用語	不等號
(1) 大於、超過、高於	$>$
(2) 小於、未滿、低於、不到、不夠、不足	$<$
(3) 不小於、不低於、至少、以上(含)	$\geq$
(4) 不大於、不超過、不逾、不高於、至多、以下(含)	$\leq$

例 (1) 「 $x$  高於 32」可列式為  $x > 32$ 。

(2) 「 $y + 5$  不超過 19」可列式為  $y + 5 \leq 19$ 。

### 3 一元一次不等式的解

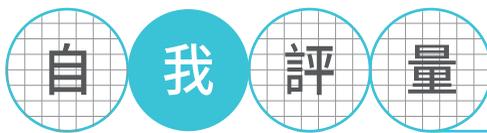
能使一元一次不等式成立的數，稱為該不等式的解。

例  $x = 3$  能使不等式  $2x + 3 > 5$  成立，

所以  $x = 3$  是不等式  $2x + 3 > 5$  的解。

### 4 圖示一元一次不等式的解

不等式	$x < a$	$x \leq a$
圖示		
不等式	$x > a$	$x \geq a$
圖示		



**1** 依下列情境列出  $x$  的不等式。(不需化簡)

P.159 例 1

- (1) 小恩今年  $x$  歲，小岩今年 12 歲，已知小恩至少比小岩大 8 歲。
- (2) 小渝帶 500 元到速食店，點了 2 個 80 元的雞腿堡後，剩餘的錢不夠再買 3 份每份  $x$  元的套餐。
- (3) 小萱跟 7 位朋友一起搭電梯，已知電梯的載重不超過 600 公斤，若小萱的體重是 45 公斤，7 位朋友的平均體重為  $x$  公斤，且小萱跟 7 位朋友可以一起順利搭乘。

(1)  $x - 12 \geq 8$

(2)  $500 - 80 \times 2 < 3x$

(3)  $45 + 7x \leq 600$

**2** 一年甲班有學生 35 人，其中 20 位是男生。某次數學平時考，全班的平均分數不高於 85 分。假設男生的平均分數為  $x$  分，女生的平均分數比男生的平均分數多 2 分，試回答下列問題：(不需化簡)

P.159 例 1

- (1) 以  $x$  的一元一次式表示全班的總分。
- (2) 以  $x$  的一元一次式表示全班的平均分數。
- (3) 根據「全班的平均分數不高於 85 分」，列出  $x$  的一元一次不等式。

由題意可知男生 20 位，平均分數  $x$  分；女生 15 位，平均分數  $(x+2)$  分

(1)  $20x + 15(x+2)$  分

(2)  $\frac{20x + 15(x+2)}{35}$  分

(3) 依題意可以列出不等式為  $\frac{20x + 15(x+2)}{35} \leq 85$

3 依下列情境列出  $x$  的不等式。(不需化簡)

P.160 例 2

(1) 有一個三角形的底邊長為  $x$  公分，底邊上的高為 13 公分，且其面積不小於 25 平方公分，但不超過 52 平方公分。

(2) 雪山隧道全長 13 公里，在沒有塞車的情況下，有一輛車以每小時 70 公里以上(含)，90 公里以下(含)的速度行駛，共花了  $x$  小時通過此隧道。

$$(1) 25 \leq \frac{13x}{2} \leq 52$$

$$(2) \frac{13}{90} \leq x \leq \frac{13}{70}$$

4 判斷下列哪些數是不等式  $5x + 16 \geq 88$  的解？

P.161 例 3

(1) 20

(2)  $14\frac{2}{5}$

(3) -3.1

	$x$	$5x+16$	$5x+16 \geq 88$
(1)	20	$5 \times 20 + 16 = 116$	不等式成立
(2)	$14\frac{2}{5}$	$5 \times 14\frac{2}{5} + 16 = 88$	不等式成立
(3)	-3.1	$5 \times (-3.1) + 16 = 0.5$	不等式不成立

所以  $x=20$  和  $x=14\frac{2}{5}$  都是不等式  $5x+16 \geq 88$  的解

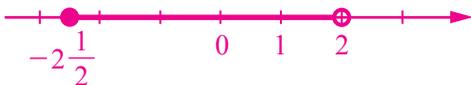
5 在數線上圖示下列各不等式的解。

P.162 例 4、P.163 例 5

$$(1) x \leq 5\frac{1}{2}$$



$$(2) -2\frac{1}{2} \leq x < 2$$

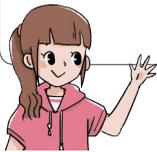


## 挑錯題

小妍、小翊、小美和小安四人對於「一元一次不等式」的說法如下。

判斷他們的說法是否正確，並說明你的理由。

「 $2x+7$  至少是 10」可以表示成  
 $10 \leq 2x+7$ 。



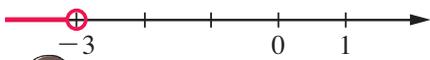
小妍

「 $3x-2$  不大於  $-5$ 」可以表示成  
 $3x-2 < -5$ 。



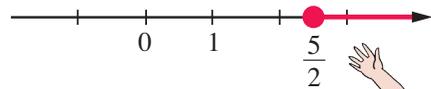
小翊

一元一次不等式  $x \leq -3$  解的圖示為



小美

一元一次不等式  $x \geq \frac{5}{2}$  解的圖示為



小安

小妍：正確 ；錯誤 ，

理由：\_\_\_\_\_。

小翊：正確 ；錯誤 ，

理由：不大於代表小於或等於，所以不等式為  $3x-2 \leq -5$ 。

小美：正確 ；錯誤 ，

理由：不等式  $x \leq -3$  解的圖示中，坐標為  $-3$  的點要用實心的圓圈表示。

小安：正確 ；錯誤 ，

理由：\_\_\_\_\_。