

2-2

解二元一次聯立方程式

1 二元一次聯立方程式

2 代入消去法

3 加減消去法

主題 1 二元一次聯立方程式

列二元一次聯立方程式

延續第 38 頁動物園旅遊的情境，已知全票每張 x 元、優待票每張 y 元，



：買 5 張全票和 2 張優待票，共花了 360 元，

可列出方程式： $5x + 2y = 360$ ；



：買 3 張全票和 1 張優待票，共花了 210 元，

可列出方程式： $3x + y = 210$ 。

當用到兩個二元一次方程式表達題目中的數量關係時，可以把這兩個二元一次方程式並列，寫成如右的形式： $\begin{cases} 5x + 2y = 360 \\ 3x + y = 210 \end{cases}$ 。像這樣並列在一起的二元一次方程式，就稱為二元一次聯立方程式或二元一次方程組。

二元一次聯立方程式的解

像上面兩個二元一次方程式 $5x + 2y = 360$ 和 $3x + y = 210$ ，雖然各自有解，但是當聯立在一起時，能同時讓兩個方程式等號都成立的 x 、 y 值，就是這兩個方程式的一組共同解，這時稱 x 、 y 值為此聯立方程式的解。

例如： $x = 60$ 、 $y = 30$ 是 $5x + 2y = 360$ 和 $3x + y = 210$ 的共同解，

也就是說 $x = 60$ 、 $y = 30$ 這一組數是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 5x + 2y = 360 \\ 3x + y = 210 \end{cases}$

的解，這組解亦可記為 $\begin{cases} x = 60 \\ y = 30 \end{cases}$ 。

Key point

二元一次聯立方程式的解

能同時讓二元一次聯立方程式裡，兩個方程式等號都成立的 x 、 y 值，就是此二元一次聯立方程式的解。

例 1

判斷二元一次聯立方程式的解 學習內容 A-7-5

下列各組數中，哪些是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ 的解？

(1) $x=-1$ 、 $y=2$

(2) $x=3$ 、 $y=3$

(3) $x=2$ 、 $y=1$

解 為了方便觀察，我們可以列表來表示將 x 、 y 代入後等號是否成立：

	x	y	$x+3y=5$	$2x-y=3$
(1)	-1	2	是	否
(2)	3	3	否	是
(3)	2	1	是	是

從表中可以看出 $x=2$ 、 $y=1$ 這組數是兩個方程式的共同解，

所以 $x=2$ 、 $y=1$ 這組數是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+3y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ 的解。



隨堂練習

下列各組數中，哪些是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$ 的解？

(1) $x=2$ 、 $y=1$

(2) $x=2$ 、 $y=-1$

(3) $x=1$ 、 $y=-2$

	x	y	$2x+3y=1$	$x-y=3$
(1)	2	1	否	否
(2)	2	-1	是	是
(3)	1	-2	否	是

所以 $x=2$ 、 $y=-1$ 這組數是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$ 的解

主題 2 代入消去法



例 2

代入消去法解二元一次聯立方程式 學習內容 A-7-5

解二元一次聯立方程式
$$\begin{cases} x=2y \\ x+y=27 \end{cases}。$$

解 為了方便說明，把原方程式標上序號，得到
$$\begin{cases} x=2y & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ x+y=27 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

第一步：觀察①式得知 $x=2y$ ，可以將②式中的 x 用 $2y$ 取代，

$$\text{得 } 2y+y=27$$

$$3y=27$$

$$y=9$$

第二步：將 $y=9$ 代入①式，得 $x=2 \times 9=18$ 。

驗算 用 $x=18$ 、 $y=9$ 代入兩個方程式，即 $18=2 \times 9$ 且 $18+9=27$ ，

等號都成立，所以
$$\begin{cases} x=18 \\ y=9 \end{cases}$$
 是此二元一次聯立方程式
$$\begin{cases} x=2y \\ x+y=27 \end{cases}$$
 的解。

Hint

$$\begin{cases} x=2y & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ x+y=27 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

將解出的 x 、 y 值代入原方程式驗算時，可利用計算機輔助計算，以確認兩個方程式等號是否成立！



驗算的過程在解聯立方程式時，可以用來檢驗計算是否正確，但在實際解題時，並不一定要將驗算過程寫出。



在例 2 的求解過程中，若改成將 $y=9$ 代入②式 $x+y=27$ ，所求得的 x 值也會相同嗎？

會。

$$x+9=27, x=18$$

因為聯立方程式的解是共同解，所以不論代入哪個方程式，結果都會一樣

學習時光機

等量公理

等號兩邊同「+、-、×、÷」一個數，等號維持相等。

移項法則

某項移到等號另一邊，「+變-、-變+、×變÷、÷變×」。

當我們把二元一次聯立方程式的其中一個方程式，變成只有一個未知數的一元一次方程式，就可以用等量公理或移項法則解此方程式，再將所得的解，代入方程式中求另一個未知數的解。而求出聯立方程式的解的過程，就叫做**解聯立方程式**。

而像例 2 這種利用代入另一個方程式，消去聯立方程式其中一個未知數的方法，稱為**代入消去法**。



隨堂練習

解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} x=4y & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ x+y=10 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{將}\textcircled{1}\text{式代入}\textcircled{2}\text{式，得 } 4y+y &= 10 \\ 5y &= 10 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$\text{將 } y=2 \text{ 代入}\textcircled{1}\text{式，得 } x=4 \times 2=8$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}$$

是此二元一次聯立方程式的解

$$(2) \begin{cases} x+3y=10 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ y=-2x & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{將}\textcircled{2}\text{式代入}\textcircled{1}\text{式，得 } x+3(-2x) &= 10 \\ -5x &= 10 \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$\text{將 } x=-2 \text{ 代入}\textcircled{2}\text{式}$$

$$\text{得 } y=(-2) \times (-2)=4$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x=-2 \\ y=4 \end{cases}$$

是此二元一次聯立方程式的解

例 3

代入消去法解二元一次聯立方程式 學習內容 A-7-5

$$\text{解二元一次聯立方程式 } \begin{cases} y=3-9x \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 3x+2y=6 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}。$$

解 可將②式中的 y 用 $(3-9x)$ 取代，

$$\text{得 } 3x+2(3-9x)=6$$

$$3x+6-18x=6$$

$$-15x=0$$

$$x=0$$

將 $x=0$ 代入①式，得 $y=3-9\times 0=3$ ，

所以 $\begin{cases} x=0 \\ y=3 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解。

Hint

$$\begin{cases} y=3-9x \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 3x+2y=6 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

隨堂練習

解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 2x+5y=36 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ x=3y-4 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

將②式代入①式

$$\text{得 } 2(3y-4)+5y=36$$

$$6y-8+5y=36$$

$$11y=44$$

$$y=4$$

將 $y=4$ 代入②式

$$\text{得 } x=3\times 4-4=8$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x=8 \\ y=4 \end{cases}$$

是此二元一次聯立方程式的解

$$(2) \begin{cases} y=-2x+1 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 4x-3y=17 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

將①式代入②式

$$\text{得 } 4x-3(-2x+1)=17$$

$$4x+6x-3=17$$

$$10x=20$$

$$x=2$$

將 $x=2$ 代入①式

$$\text{得 } y=-2\times 2+1=-3$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

是此二元一次聯立方程式的解

解二元一次聯立方程式時，一般我們希望能像例 2 中用 $x=2y$ ，或例 3 中用 $y=3-9x$ 直接代入另一個方程式而得到一元一次方程式來求解；但若不是這樣，此時可以將其中一個方程式先整理成 $x=cy+d$ 或 $y=ax+b$ 的樣子，再以代入消去法求聯立方程式的解。接下來說明這種求解的過程。

例 4

代入消去法解二元一次聯立方程式 學習內容 A-7-5

$$\text{解二元一次聯立方程式 } \begin{cases} x+4y=-1 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 5x-y=16 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}。$$

解 先將①式整理成等號左邊只有 x ，

$$\text{即 } x=-1-4y \cdots\cdots\textcircled{3}$$

將③式代入②式，

$$\text{得 } 5(-1-4y)-y=16$$

$$-5-20y-y=16$$

$$-21y=21$$

$$y=-1$$

將 $y=-1$ 代入③式，得 $x=-1-4\times(-1)=3$ ，

所以 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解。

Hint

此題也可以由②式得 $y=5x-16$ 代入①式。



隨堂練習

$$\text{解二元一次聯立方程式 } \begin{cases} 2x-3y=0 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 3x+y=11 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}。$$

整理②式得 $y=11-3x \cdots\cdots\textcircled{3}$

將③式代入①式，得 $2x-3(11-3x)=0$

$$2x-33+9x=0$$

$$11x=33$$

$$x=3$$

將 $x=3$ 代入③式，得 $y=11-3\times 3=2$

所以 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解


主題 3 加減消去法




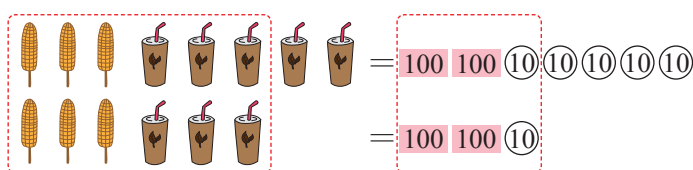
你知道除了用代入消去法解二元一次聯立方程式外，還有其他方法嗎？

仔細觀察第 59 頁漫畫的內容，可以發現：小妍比小翊多買了 2 杯古早味紅茶，且小妍多花 40 元。利用這個線索可以算出 1 杯古早味紅茶的價錢，並進一步求出 1 串烤玉米的價錢。

我們以圖示的方式呈現解題過程，並與解二元一次聯立方程式做對照：

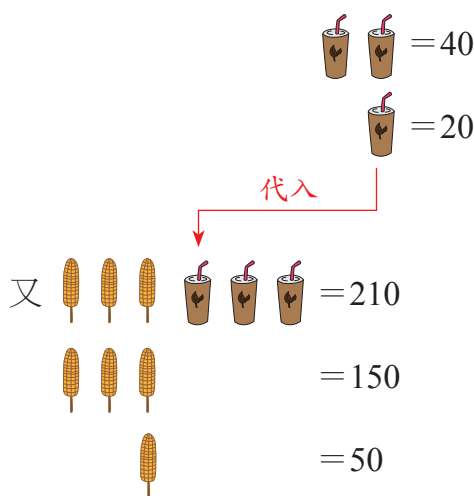
：烤玉米

：古早味紅茶



$$\begin{aligned} &= 100 + 100 + 10 + 10 + 10 + 10 \\ &= 100 + 100 + 10 \end{aligned}$$

上下兩圖相比



$$\begin{aligned} &= 40 \\ &= 20 \\ &\text{代入} \\ \text{又 } &= 210 \\ &= 150 \\ &= 50 \end{aligned}$$

所以 1 串烤玉米 50 元，1 杯古早味紅茶 20 元。

假設 1 串烤玉米 x 元

1 杯古早味紅茶 y 元

$$\begin{cases} 3x + 5y = 250 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 3y = 210 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 5y = 250 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 3y = 210 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①、②兩式相比，

即①－②得 可以寫成

$$\begin{array}{r} 3x + 5y = 250 \\ -) 3x + 3y = 210 \\ \hline 2y = 40 \end{array}$$

$$y = 20$$

將 $y = 20$ 代入②式

$$\text{得 } 3x + 3 \times 20 = 210$$

$$3x = 150$$

$$x = 50$$

從上面的解題過程可以發現，將聯立方程式的兩個二元一次方程式相減，剛好消去其中一個未知數，而使原聯立方程式簡化為一元一次方程式。

那麼如何將兩個二元一次方程式相加或相減後，消去一個未知數呢？
我們來看下面的問題探索。

問題探索 如何消去未知數？

1. 在下列 \square 中填入「+」或「-」使直式計算成立。

$$\begin{array}{r} (1) \quad -4x \\ \square +) \quad 4x \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (2) \quad 8y \\ \square +) \quad -8y \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (3) \quad 12x \\ \square -) \quad 12x \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (4) \quad -5y \\ \square -) \quad -5y \\ \hline 0 \end{array}$$

2. (1) 在下列 \square 中填入「+」或「-」使直式計算消去 x ，並寫出計算的結果。

$$\begin{array}{r} 2x - 8y \\ \square +) \quad -2x - 8y \\ \hline (\quad -16y \quad) \end{array}$$

(2) 在下列 \square 中填入「+」或「-」使直式計算消去 y ，並寫出計算的結果。

$$\begin{array}{r} 2x - 8y \\ \square -) \quad -2x - 8y \\ \hline (\quad 4x \quad) \end{array}$$

由問題探索可知，
若同類項的係數互為相反數時，則可用加法來消去此未知數；
若同類項的係數相同時，則可用減法來消去此未知數。
接下來我們來看下面例題。

例 5

加減消去法解二元一次聯立方程式 學習內容 A-7-5

$$\text{解二元一次聯立方程式 } \begin{cases} 2x+5y=1 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 2x-5y=11 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}。$$

解 觀察聯立方程式，想消去 y ，

$$\begin{array}{r} 2x+5y=1 \quad \cdots\cdots\textcircled{1} \\ +) 2x-5y=11 \quad \cdots\cdots\textcircled{2} \\ \hline 4x \quad = 12 \\ x \quad = 3 \end{array}$$

5y 與 -5y 相加，消去 y

將 $x=3$ 代入①式，得 $2 \times 3 + 5y = 1$

$$5y = 1 - 6$$

$$5y = -5$$

$$y = -1$$

所以 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解。

Hint

也可以利用
①-②
消去 x 。

像例 5 這種將兩個方程式以相加或相減，消去聯立方程式其中一個未知數的方法，稱為**加減消去法**。



隨堂練習

解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 3x+2y=18 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ -3x+y=-9 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ 得 } 3y = 9, y = 3$$

將 $y=3$ 代入①式，得 $x=4$

$$\text{所以 } \begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$$

是此二元一次聯立方程式的解

$$(2) \begin{cases} -5x+2y=1 & \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 2x+2y=1 & \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ 得 } 7x = 0, x = 0$$

將 $x=0$ 代入①式，得 $y = \frac{1}{2}$

$$\text{所以 } \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

是此二元一次聯立方程式的解

若聯立方程式直接相加或相減無法消去其中一個未知數時，又該用什麼方法呢？我們來看下面的例題。

例 6

加減消去法解二元一次聯立方程式 學習內容 A-7-5

$$\text{解二元一次聯立方程式 } \begin{cases} 5x - 2y = -4 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 4y = 8 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}。$$

解 觀察聯立方程式，想消去 y ，將係數化為相反數，

$$\begin{cases} 5x - 2y = -4 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 3x + 4y = 8 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

取 $[2, 4] = 4$

因此將①×2

$$\begin{array}{r} 10x - 4y = -8 \cdots \cdots \textcircled{1} \times 2 \\ +) \quad 3x + 4y = 8 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ \hline 13x \quad = 0 \\ x \quad = 0 \end{array}$$

-4y 與 4y 相加，消去 y

將 $x=0$ 代入②式，得 $3 \times 0 + 4y = 8$ ， $4y = 8$ ， $y = 2$ ，

所以 $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解。

Hint

也可以利用
②×5-①×3
消去 x 。

隨堂練習

解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 4x + 3y = -5 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x + y = -3 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

將②×2得 $4x + 2y = -6 \cdots \cdots \textcircled{3}$

①-③得 $y = 1$

將 $y = 1$ 代入②式，得 $x = -2$

所以 $\begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$

是此二元一次聯立方程式的解

$$(2) \begin{cases} 2x - 3y = 8 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ -5x + 6y = -11 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

將①×2得 $4x - 6y = 16 \cdots \cdots \textcircled{3}$

②+③得 $x = -5$

將 $x = -5$ 代入①式，得 $y = -6$

所以 $\begin{cases} x = -5 \\ y = -6 \end{cases}$

是此二元一次聯立方程式的解

例 7

加減消去法解二元一次聯立方程式 學習內容 A-7-5

$$\text{解二元一次聯立方程式 } \begin{cases} 3x+5y=8 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 4x+3y=7 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}。$$

解 觀察聯立方程式，想消去 x ，將係數化為相同，

$$\begin{cases} 3x+5y=8 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 4x+3y=7 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases} \quad \text{取 } [3, 4] = 12$$

因此將 $\textcircled{1} \times 4$ 、 $\textcircled{2} \times 3$

$$\begin{array}{r} 12x+20y=32 \cdots\cdots\textcircled{1} \times 4 \\ -) \quad 12x+9y=21 \cdots\cdots\textcircled{2} \times 3 \\ \hline 11y=11 \\ y=1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{12x 與 12x 相減，消去 } x \end{array}$$

將 $y=1$ 代入 $\textcircled{1}$ 式，得 $3x+5 \times 1=8$ ， $3x=3$ ， $x=1$ ，

所以 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解。

Hint

也可以利用
 $\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \times 5$
消去 y 。



隨堂練習

解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} 2x+5y=-10 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 5x-3y=6 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

想消去 x

將 $\textcircled{1} \times 5$ 、 $\textcircled{2} \times 2$

$$\text{得 } \begin{cases} 10x+25y=-50 \cdots\cdots\textcircled{3} \\ 10x-6y=12 \cdots\cdots\textcircled{4} \end{cases}$$

$\textcircled{3} - \textcircled{4}$ 得 $31y = -62$ ， $y = -2$

將 $y = -2$ 代入 $\textcircled{2}$ 式，得 $x = 0$

$$\text{所以 } \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

是此二元一次聯立方程式的解

$$(2) \begin{cases} 5x-6y=-4 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 3x+4y=9 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$$

想消去 y

將 $\textcircled{1} \times 2$ 、 $\textcircled{2} \times 3$

$$\text{得 } \begin{cases} 10x-12y=-8 \cdots\cdots\textcircled{3} \\ 9x+12y=27 \cdots\cdots\textcircled{4} \end{cases}$$

$\textcircled{3} + \textcircled{4}$ 得 $19x = 19$ ， $x = 1$

將 $x = 1$ 代入 $\textcircled{2}$ 式，得 $y = \frac{3}{2}$

$$\text{所以 } \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{3}{2} \end{cases}$$

是此二元一次聯立方程式的解

例 8

加減消去法解二元一次聯立方程式 學習內容 A-7-5

$$\text{解二元一次聯立方程式 } \begin{cases} 3x = -1 + 2x - 2y \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 3x - 2y - 13 = 0 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}。$$

解 整理①、②兩個原方程式，

$$\text{可得 } \begin{cases} x + 2y = -1 \cdots\cdots\textcircled{3} \\ 3x - 2y = 13 \cdots\cdots\textcircled{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ 得 } 4x = 12$$

$$x = 3$$

將 $x = 3$ 代入③式，得 $3 + 2y = -1$

$$2y = -4$$

$$y = -2$$

所以 $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解。



隨堂練習

$$\text{解二元一次聯立方程式 } \begin{cases} 2x - 2 = 3y - 3x \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 3x + 2y - 22 = 2x - y \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}。$$

整理①、②兩個原方程式

$$\text{可得 } \begin{cases} 5x - 3y = 2 \cdots\cdots\textcircled{3} \\ x + 3y = 22 \cdots\cdots\textcircled{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ 得 } 6x = 24, x = 4$$

將 $x = 4$ 代入④式，得 $y = 6$

所以 $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解

例 9

加減消去法解二元一次聯立方程式 學習內容 A-7-5

$$\text{解二元一次聯立方程式 } \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 3 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ \frac{3x}{2} + y = 3 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases} .$$

解 先將式子中的分數化為整數，

$$\text{將 } \textcircled{1} \times 6、\textcircled{2} \times 2，\text{得 } \begin{cases} 3x - 2y = 18 \cdots \cdots \textcircled{3} \\ 3x + 2y = 6 \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

再將 $\textcircled{3} - \textcircled{4}$ 得 $-4y = 12$

$$y = -3$$

將 $y = -3$ 代入 $\textcircled{4}$ 式，得 $3x + 2 \times (-3) = 6$

$$3x = 12$$

$$x = 4$$

所以 $\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解。

Hint

也可以利用
 $\textcircled{1} \times 3 + \textcircled{2}$
消去 y 。



隨堂練習

解下列各二元一次聯立方程式。

$$(1) \begin{cases} \frac{2x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{17}{6} \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x + 3y = 13 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

將 $\textcircled{1} \times 6$ 得 $4x + 3y = 17 \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{3} - \textcircled{2}$ 得 $2x = 4$ ， $x = 2$

將 $x = 2$ 代入 $\textcircled{2}$ 式，得 $y = 3$

$$\text{所以 } \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$$

是此二元一次聯立方程式的解

$$(2) \begin{cases} 0.3x - 0.2y = 2.5 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 5x + 2y = 15 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

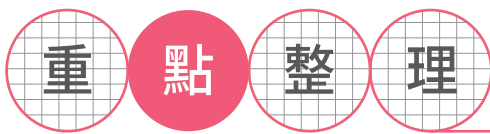
將 $\textcircled{1} \times 10$ 得 $3x - 2y = 25 \cdots \cdots \textcircled{3}$

$\textcircled{2} + \textcircled{3}$ 得 $8x = 40$ ， $x = 5$

將 $x = 5$ 代入 $\textcircled{2}$ 式，得 $y = -5$

$$\text{所以 } \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases}$$

是此二元一次聯立方程式的解



1 二元一次聯立方程式

將兩個二元一次方程式並列，來表達題目中的數量關係，這兩個並列的二元一次方程式，就稱為二元一次聯立方程式。

例 某次出遊到動物園，小翊買了5張全票和2張優待票，共花了360元；
小妍買了3張全票和1張優待票，共花了210元。

設全票每張 x 元、優待票每張 y 元，

則依題意可列出二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 5x+2y=360 \\ 3x+y=210 \end{cases}$ 。

2 二元一次聯立方程式的解

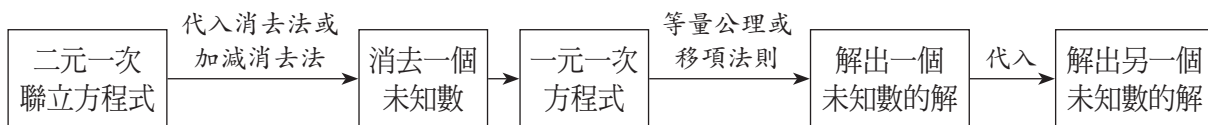
能同時讓二元一次聯立方程式裡，兩個方程式等號都成立的 x 、 y 值，就是此二元一次聯立方程式的解。

例 承上例，因為 $x=60$ 、 $y=30$ 能讓兩個方程式的等號成立，

所以 $\begin{cases} x=60 \\ y=30 \end{cases}$ 就是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 5x+2y=360 \\ 3x+y=210 \end{cases}$ 的解。

也就是說，動物園全票每張60元，優待票每張30元。

3 解二元一次聯立方程式





自我評量



- 1 下列各組數中，哪些是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x-3y=7 \end{cases}$ 的解？

P.54 例 1

- (1) $x=1$ 、 $y=2$ (2) $x=\frac{1}{2}$ 、 $y=-2$ (3) $x=2$ 、 $y=-1$

列表來表示將 x 、 y 代入後等號是否成立：

	x	y	$3x+y=5$	$2x-3y=7$
(1)	1	2	是	否
(2)	$\frac{1}{2}$	-2	否	是
(3)	2	-1	是	是

所以 $x=2$ 、 $y=-1$ 這組數是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x-3y=7 \end{cases}$ 的解

- 2 解下列各二元一次聯立方程式。

(1) $\begin{cases} x=3y & \dots\dots ① \\ 2x-5y=-2 & \dots\dots ② \end{cases}$ P.55 例 2

將①式代入②式，得 $2 \times 3y - 5y = -2$
 $y = -2$

將 $y = -2$ 代入①式，得 $x = -6$

所以 $\begin{cases} x = -6 \\ y = -2 \end{cases}$

是此二元一次聯立方程式的解

(2) $\begin{cases} x=3y-1 & \dots\dots ① \\ \frac{1}{3}x+5y=\frac{5}{3} & \dots\dots ② \end{cases}$ P.57 例 3

將①式代入②式，得 $\frac{1}{3}(3y-1)+5y=\frac{5}{3}$
 $y = \frac{1}{3}$

將 $y = \frac{1}{3}$ 代入①式，得 $x = 0$

所以 $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解

(3) $\begin{cases} 3x+y=13 & \dots\dots ① \\ 2x-y=-3 & \dots\dots ② \end{cases}$ P.58 例 4、P.62 例 5

將①+②得 $5x=10$

$x=2$

將 $x=2$ 代入①式，得 $y=7$

所以 $\begin{cases} x=2 \\ y=7 \end{cases}$

是此二元一次聯立方程式的解

(4) $\begin{cases} 2x+3y=-16 & \dots\dots ① \\ 3x-2y=2 & \dots\dots ② \end{cases}$ P.64 例 7

想消去 y

將① $\times 2$ 、② $\times 3$ 得 $\begin{cases} 4x+6y=-32 & \dots\dots ③ \\ 9x-6y=6 & \dots\dots ④ \end{cases}$

③+④得 $13x=-26$

$x=-2$

將 $x=-2$ 代入①式，得 $y=-4$

所以 $\begin{cases} x=-2 \\ y=-4 \end{cases}$ 是此二元一次聯立方程式的解

$$(5) \begin{cases} x+10y=-2x+8y+5 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 2x-1=-x+y+1 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases} \quad \text{P.65 例 8}$$

整理原方程式

$$\text{得} \begin{cases} 3x+2y=5 \cdots\cdots\textcircled{3} \\ 3x-y=2 \cdots\cdots\textcircled{4} \end{cases}$$

$$\textcircled{3}-\textcircled{4} \text{ 得 } 3y=3$$

$$y=1$$

將 $y=1$ 代入 $\textcircled{4}$ 式，得 $x=1$

$$\text{所以} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

是此二元一次聯立方程式的解

$$(6) \begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{6}=\frac{1}{3} \cdots\cdots\textcircled{1} \\ -5x+2y=-1 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases} \quad \text{P.66 例 9}$$

將 $\textcircled{1} \times 6$ 得 $3x-y=2 \cdots\cdots\textcircled{3}$

$\textcircled{3} \times 2$ 得 $6x-2y=4 \cdots\cdots\textcircled{4}$

$\textcircled{2} + \textcircled{4}$ 得 $x=3$

將 $x=3$ 代入 $\textcircled{3}$ 式，得 $y=7$

$$\text{所以} \begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$$

是此二元一次聯立方程式的解

挑錯題

小妍、小翊和小美三人對於「解二元一次聯立方程式 $\begin{cases} 2x-3y=1 \cdots\cdots\textcircled{1} \\ 3x+2y=8 \cdots\cdots\textcircled{2} \end{cases}$ 」的說法如下。判斷他們的說法是否正確，並說明你的理由。

利用 $\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \times 3$
消去 y 。



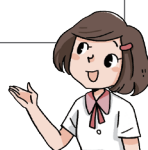
小妍

利用 $\textcircled{1} \times 3 - \textcircled{2} \times 2$
消去 x 。



小翊

由 $\textcircled{1}$ 式可得 $x = \frac{1-3y}{2}$ ，
並代入 $\textcircled{2}$ 式。



小美

小妍：正確 ；錯誤 ，

理由： $\textcircled{1} \times 2$ 和 $\textcircled{2} \times 3$ 應相加才能消去 y ，得 $13x=26$ 。

小翊：正確 ；錯誤 ，

理由：_____。

小美：正確 ；錯誤 ，

理由：由 $\textcircled{1}$ 可得 $x = \frac{1+3y}{2}$ 。