

2-3

分數的四則運算

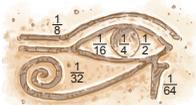
- 1 最簡分數 2 分數的加減 3 分數的乘法運算
4 分數的除法運算 5 數的四則運算

主題 1 最簡分數



你知道嗎？

分數起源於「分」，古埃及人曾用荷魯斯之眼的各部位表示分數來計數。



由第 56 頁，整數除法的運算規則可知 $(-7) \div 4 = -(7 \div 4)$ ，得到 $-\frac{7}{4} = -\frac{7}{4}$ ；同樣的， $7 \div (-4) = -(7 \div 4)$ ，得到 $\frac{7}{-4} = -\frac{7}{4}$ ，因此 $-\frac{7}{4} = \frac{7}{-4} = -\frac{7}{4}$ 。事實上，對於 a 、 b 兩個正整數， $-\frac{b}{a} = \frac{b}{-a} = -\frac{b}{a}$ 。

一般而言，我們將一個分數的分子和分母，同時乘以一個不為 0 的整數或同時除以它們的公因數，這個過程稱為**擴分**或**約分**，且擴分或約分後的分數和原來分數的值相等，稱為**等值分數**。

例如： $-\frac{3}{4} = -\frac{3 \times 2}{4 \times 2} = -\frac{6}{8}$ ， $-\frac{6}{8}$ 即為 $-\frac{3}{4}$ 的等值分數。

學習時光機

如果兩個整數的最大公因數為 1，我們就稱這兩個整數互質。

當一個分數的分子和分母互質，這個分數就稱為**最簡分數**，例如： $\frac{3}{4}$ 就是最簡分數。



將一個分數的分子和分母同時除以它們的最大公因數，所得到的分數是最簡分數嗎？說說你的看法。

是。將分數的分子和分母同時除以它們的最大公因數後，分子和分母的公因數只剩下 1，無法再約分，故為最簡分數。



隨堂練習

判斷下列各分數是否為最簡分數，如果不是，請化成最簡分數。

$$(1) \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

$$(2) -\frac{36}{96} = -\frac{3}{8}$$

$$(3) \frac{16}{-81} \text{ 是最簡分數}$$

$$(4) \frac{-21}{9} = -\frac{7}{3}$$

數

擲

好

好

玩

數字迷宮

從入口處通過與 $\frac{12}{18}$ 相等的分數走到出口，並請將走過的地方依序用線連接起來。

入口	$\frac{12}{18}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{20}{30}$	$\frac{30}{45}$	$\frac{4}{6}$
	$\frac{2}{3}$	$\frac{10}{15}$	$-\frac{4}{6}$	0	$-\frac{6}{9}$	$\frac{2}{8}$
	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{10}$	$-\frac{6}{9}$	$\frac{14}{21}$	$\frac{18}{27}$	$\frac{2}{-3}$
	$\frac{9}{15}$	$-\frac{12}{18}$	$\frac{42}{63}$	$-\frac{12}{18}$	$-\frac{28}{42}$	$-\frac{6}{9}$
	$\frac{7}{21}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{16}{24}$	$\frac{32}{48}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{40}{66}$
	$\frac{20}{36}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{75}$	$\frac{48}{72}$	$\frac{96}{144}$	$\frac{22}{33}$
						出口

分數的比較大小

若兩個分數的分母不同，則可以利用約分或擴分，把它們化為同分母的分數來比較分數的大小，而這樣化為同分母的過程稱為**通分**。除此之外，也可以把分子化為同分子的分數來比較分數的大小。

例 1

對應學習內容
N-7-5

正分數的比較大小

比較下列各組數的大小。

$$(1) \frac{2}{3}、\frac{3}{4}、\frac{5}{6}$$

$$(2) \frac{2}{7}、\frac{3}{13}、\frac{5}{23}$$

解

$$(1) [3, 4, 6] = 12,$$

$$\text{通分得 } \frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \frac{5}{6} = \frac{10}{12},$$

$$\text{因為 } \frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{10}{12},$$

$$\text{所以 } \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6}。$$

$$(2) [2, 3, 5] = 30,$$

將每個分子化為 30 得：

$$\frac{2}{7} = \frac{30}{105}, \frac{3}{13} = \frac{30}{130}, \frac{5}{23} = \frac{30}{138},$$

$$\text{因為 } \frac{30}{105} > \frac{30}{130} > \frac{30}{138},$$

$$\text{所以 } \frac{2}{7} > \frac{3}{13} > \frac{5}{23}。$$

Hint

- (1) 當分母相同時比較分子，若分子愈大，則該正分數愈大。
- (2) 當分子相同時比較分母，若分母愈大，則該正分數愈小。

隨堂練習

比較 $\frac{3}{5}$ 和 $\frac{9}{11}$ 的大小。

$$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$$

因為 $\frac{9}{11} > \frac{9}{15}$ ，所以 $\frac{9}{11} > \frac{3}{5}$

在整數中，絕對值愈大的負數，其值愈小，同樣的道理也適用於負分數的比較大小。

例 2

對應學習內容
N-7-5

負分數的比較大小

比較下列各組數的大小。

(1) $-\frac{2}{3}$ 、 $-\frac{3}{5}$

(2) $-1\frac{1}{2}$ 、 $-1\frac{2}{3}$ 、 $-1\frac{3}{4}$

解 (1) 先比較負分數的絕對值大小：

$$\left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} = \frac{10}{15}, \quad \left| -\frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5} = \frac{9}{15},$$

因為 $\frac{10}{15} > \frac{9}{15}$ ，即 $\left| -\frac{2}{3} \right| > \left| -\frac{3}{5} \right|$ ，所以 $-\frac{2}{3} < -\frac{3}{5}$ 。

(2) 先比較負分數的絕對值大小：

$$\left| -1\frac{1}{2} \right| = 1\frac{1}{2} = 1\frac{6}{12}$$

$$\left| -1\frac{2}{3} \right| = 1\frac{2}{3} = 1\frac{8}{12}$$

$$\left| -1\frac{3}{4} \right| = 1\frac{3}{4} = 1\frac{9}{12}$$

因為 $1\frac{6}{12} < 1\frac{8}{12} < 1\frac{9}{12}$ ，即 $\left| -1\frac{1}{2} \right| < \left| -1\frac{2}{3} \right| < \left| -1\frac{3}{4} \right|$ ，

所以 $-1\frac{1}{2} > -1\frac{2}{3} > -1\frac{3}{4}$ 。

Hint

也可以先把三個帶分數化成假分數，通分後再比較大小。



隨堂練習

比較下列各組數的大小

(1) $-\frac{2}{3}$ 、 $-\frac{3}{4}$ 、 $-\frac{5}{6}$

$$\left| -\frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \quad \left| -\frac{3}{4} \right| = \frac{3}{4} = \frac{9}{12}$$

$$\left| -\frac{5}{6} \right| = \frac{5}{6} = \frac{10}{12}$$

因為 $\frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{10}{12}$

即 $\left| -\frac{2}{3} \right| < \left| -\frac{3}{4} \right| < \left| -\frac{5}{6} \right|$

所以 $-\frac{2}{3} > -\frac{3}{4} > -\frac{5}{6}$

(2) $-2\frac{5}{7}$ 、 $-2\frac{2}{3}$

$$\left| -2\frac{5}{7} \right| = 2\frac{5}{7} = 2\frac{15}{21}$$

$$\left| -2\frac{2}{3} \right| = 2\frac{2}{3} = 2\frac{14}{21}$$

因為 $2\frac{15}{21} > 2\frac{14}{21}$

即 $\left| -2\frac{5}{7} \right| > \left| -2\frac{2}{3} \right|$

所以 $-2\frac{5}{7} < -2\frac{2}{3}$

主題 2 分數的加減

國小時我們學過正分數的加減運算規則：

(1) 若分母相同，則分母不變，分子直接相加或相減。

$$\text{例如：} \frac{5}{11} + \frac{4}{11} = \frac{5+4}{11} = \frac{9}{11}。$$

(2) 若分母不同，則先通分化成相同分母後，分子再相加或相減。

$$\text{例如：} \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}。$$

事實上，我們也可以將此運算規則，與在第 1 章學過的整數的加減運算規則，運用在負分數的加減運算。

例 3

對應學習內容
N-7-3

同分母的分數加減

計算下列各式的值。

$$(1) \left(-\frac{7}{5}\right) + \left(-\frac{9}{5}\right)$$

$$(2) \left(-\frac{7}{8}\right) - \left(-\frac{3}{8}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{解 1 } (1) \left(-\frac{7}{5}\right) + \left(-\frac{9}{5}\right) &= \left(-\frac{7}{5}\right) + \left(-\frac{9}{5}\right) = \frac{(-7) + (-9)}{5} \\ &= -\frac{16}{5} \text{ (或 } -3\frac{1}{5}\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \left(-\frac{7}{8}\right) - \left(-\frac{3}{8}\right) &= \left(-\frac{7}{8}\right) - \left(-\frac{3}{8}\right) = \frac{(-7) - (-3)}{8} \\ &= \frac{(-7) + 3}{8} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{解 2 } (1) \left(-\frac{7}{5}\right) + \left(-\frac{9}{5}\right) = -\left(\frac{7}{5} + \frac{9}{5}\right) = -\frac{16}{5} \text{ (或 } -3\frac{1}{5}\text{)}$$

$$(2) \left(-\frac{7}{8}\right) - \left(-\frac{3}{8}\right) = \left(-\frac{7}{8}\right) + \frac{3}{8} = -\left(\frac{7}{8} - \frac{3}{8}\right) = -\frac{4}{8} = -\frac{1}{2}$$



隨堂練習

計算下列各式的值。

$$(1) \left(-\frac{7}{3}\right) + \frac{2}{3}$$

$$(2) \frac{9}{4} - \left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$= \frac{(-7) + 2}{3} = -\frac{5}{3} \text{ (或 } -1\frac{2}{3}\text{)}$$

$$= \frac{9 - (-3)}{4} = \frac{9 + 3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

例 4

對應學習內容
N-7-3

異分母的分數加減

計算下列各式的值。

$$(1) \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{3} \quad (2) \left(-\frac{5}{6}\right) - \frac{11}{8} \quad (3) \frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right)$$

你知道嗎？

古埃及人用分東西的想法，將所有分數都記成分子為 1 的相異單位分數之和。例如：

$$\frac{3}{4} \text{ 記成 } \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{7} \text{ 記成 } \frac{1}{3} + \frac{1}{12} + \frac{1}{84}$$

解

$$(1) \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{1}{3} = \left(-\frac{9}{12}\right) + \frac{4}{12} \quad \text{通分，將分母化成 } [4, 3] = 12$$

$$= \frac{(-9) + 4}{12}$$

$$= -\frac{5}{12}$$

$$(2) \left(-\frac{5}{6}\right) - \frac{11}{8} = \left(-\frac{20}{24}\right) - \frac{33}{24} \quad \text{通分，將分母化成 } [6, 8] = 24$$

$$= \frac{(-20) - 33}{24}$$

$$= -\frac{53}{24} \quad \left(\text{或 } -2\frac{5}{24}\right)$$

$$(3) \frac{3}{5} - \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{36}{60} + \frac{45}{60} - \frac{10}{60} \quad \text{通分，將分母化成 } [5, 4, 6] = 60$$

$$= \frac{36 + 45 - 10}{60}$$

$$= \frac{71}{60} \quad \left(\text{或 } 1\frac{11}{60}\right)$$



隨堂練習

計算下列各式的值。

$$(1) \left(-\frac{7}{12}\right) + \frac{3}{8}$$

$$= \left(-\frac{14}{24}\right) + \frac{9}{24}$$

$$= \frac{(-14) + 9}{24}$$

$$= -\frac{5}{24}$$

$$(2) \frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{20}{30} - \frac{18}{30} - \frac{5}{30}$$

$$= \frac{20 - 18 - 5}{30}$$

$$= \frac{-3}{30}$$

$$= -\frac{1}{10}$$

在第 33 頁中，我們知道整數的加法具有交換律和結合律，事實上，分數的加法也具有交換律和結合律。也就是說， a 、 b 、 c 三數具有以下性質：(1) $a+b=b+a$ (2) $(a+b)+c=a+(b+c)$

例 5

對應學習內容
N-7-4

加法的交換律與結合律

計算下列各式的值。

$$(1) \frac{13}{19} + [(-\frac{10}{13}) + \frac{6}{19}]$$

$$(2) [(-\frac{7}{2}) + \frac{6}{7}] + (-\frac{1}{2})$$

解

$$\begin{aligned} (1) & \frac{13}{19} + [(-\frac{10}{13}) + \frac{6}{19}] \\ &= \frac{13}{19} + [\frac{6}{19} + (-\frac{10}{13})] \quad \left. \begin{array}{l} \text{交換律} \\ \text{結合律} \end{array} \right\} \\ &= (\frac{13}{19} + \frac{6}{19}) + (-\frac{10}{13}) \\ &= 1 + (-\frac{10}{13}) \\ &= \frac{3}{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & [(-\frac{7}{2}) + \frac{6}{7}] + (-\frac{1}{2}) \\ &= [\frac{6}{7} + (-\frac{7}{2})] + (-\frac{1}{2}) \quad \left. \begin{array}{l} \text{交換律} \\ \text{結合律} \end{array} \right\} \\ &= \frac{6}{7} + [(-\frac{7}{2}) + (-\frac{1}{2})] \\ &= \frac{6}{7} + (-4) \\ &= -3\frac{1}{7} \end{aligned}$$



隨堂練習

計算下列各式的值。

$$\begin{aligned} (1) & \frac{37}{10} + [(-\frac{19}{13}) + (-\frac{37}{10})] \\ &= \frac{37}{10} + [(-\frac{37}{10}) + (-\frac{19}{13})] \\ &= [\frac{37}{10} + (-\frac{37}{10})] + (-\frac{19}{13}) \\ &= 0 + (-\frac{19}{13}) \\ &= -\frac{19}{13} \text{ (或 } -1\frac{6}{13} \text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & (-\frac{49}{9}) + \frac{11}{4} + \frac{22}{9} \\ &= \frac{11}{4} + (-\frac{49}{9}) + \frac{22}{9} \\ &= \frac{11}{4} + [(-\frac{49}{9}) + \frac{22}{9}] \\ &= \frac{11}{4} + (-\frac{27}{9}) \\ &= \frac{11}{4} - 3 \\ &= -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

在第 41 頁中，我們學過整數的去括號規則：

- (1) 若括號前面是「+」號，去括號後原來括號內的+、-不變。
 - (2) 若括號前面是「-」號，去括號後原來括號內的+變-、-變+。
- 同樣的，去括號規則也可以推廣到分數的運算。

例 6

對應學習內容
N-7-3

去括號規則

計算下列各式的值。

$$(1) \frac{1}{7} + \left(-\frac{1}{7} - \frac{2}{9}\right)$$

$$(2) \left(-\frac{28}{29}\right) - \left(-\frac{32}{31} + \frac{1}{29}\right)$$

解

$$\begin{aligned} (1) \frac{1}{7} + \left(-\frac{1}{7} - \frac{2}{9}\right) \\ &= \frac{1}{7} - \frac{1}{7} - \frac{2}{9} \\ &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \left(-\frac{28}{29}\right) - \left(-\frac{32}{31} + \frac{1}{29}\right) \\ &= \left(-\frac{28}{29}\right) + \frac{32}{31} - \frac{1}{29} \\ &= \left(-\frac{28}{29}\right) - \frac{1}{29} + \frac{32}{31} \\ &= (-1) + \frac{32}{31} \\ &= \frac{1}{31} \end{aligned}$$



隨堂練習

計算下列各式的值。

$$(1) \frac{15}{91} + \left(-\frac{8}{91} - \frac{12}{13}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{15}{91} - \frac{8}{91} - \frac{12}{13} \\ &= \frac{7}{91} - \frac{12}{13} \\ &= \frac{1}{13} - \frac{12}{13} \\ &= -\frac{11}{13} \end{aligned}$$

$$(2) \frac{34}{99} - \left(\frac{7}{99} - \frac{17}{22}\right)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{34}{99} - \frac{7}{99} + \frac{17}{22} \\ &= \frac{27}{99} + \frac{17}{22} \\ &= \frac{3}{11} + \frac{17}{22} \\ &= \frac{6}{22} + \frac{17}{22} \\ &= \frac{23}{22} \text{ (或 } 1\frac{1}{22}\text{)} \end{aligned}$$

我們之前學過 $7\frac{2}{3}=7+\frac{2}{3}$ ，所以 $-7\frac{2}{3}=-(7\frac{2}{3})=-(7+\frac{2}{3})=-7-\frac{2}{3}$ 。

例 7

對應學習內容
N-7-3

帶分數的加減運算

計算 $(-2\frac{3}{4})+1\frac{2}{7}$ 的值。

解1 將帶分數化成假分數再做運算：

$$\begin{aligned} (-2\frac{3}{4})+1\frac{2}{7} &= (-\frac{11}{4})+\frac{9}{7} \\ &= \frac{(-77)+36}{28} \\ &= -\frac{41}{28} \text{ (或 } -1\frac{13}{28} \text{)} \end{aligned}$$

解2 將整數部分與分數部分先分別做運算，再合併：

$$\begin{aligned} (-2\frac{3}{4})+1\frac{2}{7} &= -(2+\frac{3}{4})+(1+\frac{2}{7}) \\ &= -2-\frac{3}{4}+1+\frac{2}{7} \\ &= (-2+1)+(-\frac{3}{4}+\frac{2}{7}) \\ &= (-1)+\frac{(-21)+8}{28} \\ &= (-1)-\frac{13}{28} = -1\frac{13}{28} \end{aligned}$$



隨堂練習

計算下列各式的值。

$$\begin{aligned} (1) \quad & -3\frac{1}{4}-5\frac{1}{2} \\ &= -(3+\frac{1}{4})-(5+\frac{1}{2}) \\ &= -3-\frac{1}{4}-5-\frac{1}{2} \\ &= -8-\frac{1}{4}-\frac{2}{4} \\ &= -8-\frac{3}{4} \\ &= -8\frac{3}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad & (-2\frac{1}{6})+1\frac{2}{9}-(-1\frac{1}{3}) \\ &= (-\frac{13}{6})+\frac{11}{9}+\frac{4}{3} \\ &= \frac{-39+22+24}{18} \\ &= \frac{7}{18} \end{aligned}$$

主題 3 分數的乘法運算

在國小時學過正分數的乘法，有下面的規則：

(1) 真、假分數相乘：

將分子相乘當作新分子，分母相乘當作新分母，所得到的新分數就是它們的乘積。

$$\text{例如：} \frac{9}{5} \times \frac{4}{7} = \frac{9 \times 4}{5 \times 7} = \frac{36}{35}$$

Hint

$$\frac{\text{分子}}{\text{分母}} \times \frac{\text{分子}}{\text{分母}} = \frac{\text{分子} \times \text{分子}}{\text{分母} \times \text{分母}}$$

(2) 含帶分數相乘：

先將帶分數化成假分數，再做乘法運算。

$$\text{例如：} \frac{1}{3} \times 2\frac{1}{2} = \frac{1}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{1 \times 5}{3 \times 2} = \frac{5}{6}$$

同樣的，分子或分母是負數的分數乘法也符合上面的規則，

$$\text{例如：(1)} \left(\frac{-9}{5}\right) \times \left(\frac{4}{-7}\right) = \frac{(-9) \times 4}{5 \times (-7)} = \frac{-36}{-35} = \frac{36}{35}$$

$$(2) \left(\frac{-1}{3}\right) \times 2\frac{1}{2} = \left(\frac{-1}{3}\right) \times \frac{5}{2} = \frac{(-1) \times 5}{3 \times 2} = \frac{-5}{6} = -\frac{5}{6}$$

另外，第1章整數乘法的符號運算規則在分數乘法運算時也成立，

$$\text{例如：(1)} \left(-\frac{9}{5}\right) \times \left(-\frac{4}{7}\right) = +\left(\frac{9}{5} \times \frac{4}{7}\right)$$

$$(2) \left(\frac{-1}{3}\right) \times 2\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{3}\right) \times \frac{5}{2} = -\left(\frac{1}{3} \times \frac{5}{2}\right)$$

因此，我們可以得知：

Key point

分數的乘法運算

1. 同號的兩分數相乘，其結果為正。
2. 異號的兩分數相乘，其結果為負。

例 8

對應學習內容
N-7-3

分數的乘法運算

計算下列各式的值。

(1) $(-\frac{3}{2}) \times \frac{1}{4}$

(2) $\frac{3}{7} \times (-\frac{14}{15})$

(3) $(-\frac{5}{3}) \times (-\frac{2}{3})$

解 (1) $(-\frac{3}{2}) \times \frac{1}{4} = -(\frac{3}{2} \times \frac{1}{4}) = -\frac{3}{8}$

(2) $\frac{3}{7} \times (-\frac{14}{15}) = -(\frac{3^1}{7_1} \times \frac{14^2}{15_5}) = -\frac{2}{5}$

(3) $(-\frac{5}{3}) \times (-\frac{2}{3}) = +(\frac{5}{3} \times \frac{2}{3}) = \frac{10}{9}$ (或 $1\frac{1}{9}$)

Hint

先乘再約分與先約分再乘，
其結果相同。

隨堂練習

計算下列各式的值。

(1) $\frac{8}{21} \times (-\frac{7}{4})$
 $= -(\frac{8^2}{21_3} \times \frac{7^1}{4_1})$
 $= -\frac{2}{3}$

(2) $(-\frac{16}{9}) \times (-\frac{27}{28})$
 $= \frac{16^4}{9_1} \times \frac{27^3}{28_7}$
 $= \frac{12}{7}$ (或 $1\frac{5}{7}$)

在第 54 頁中，我們知道整數的乘法具有交換律和結合律，事實上，分數的乘法也具有交換律和結合律。也就是說， a 、 b 、 c 三數具有以下性質：(1) $a \times b = b \times a$ (2) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$

當我們在計算 $\frac{2}{9} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{4}$ 時，就可以利用交換律與結合律幫助計算：

$$\begin{aligned} & \frac{2}{9} \times \frac{5}{7} \times \frac{3}{4} \\ &= \frac{5}{7} \times \frac{2}{9} \times \frac{3}{4} \quad \text{交換律} \\ &= \frac{5}{7} \times (\frac{2}{9} \times \frac{3}{4}) \quad \text{結合律} \\ &= \frac{5}{7} \times \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{42} \end{aligned}$$

在計算幾個分數連乘時，利用「**偶數個負數相乘，其乘積為正數；奇數個負數相乘，其乘積為負數**」的規則，可以先判斷乘積是正數還是負數，再做數字的運算。

例 9

對應學習內容
N-7-3

分數的連乘運算

計算下列各式的值。

$$(1) \left(-2\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{21}\right) \times \left(-1\frac{1}{5}\right) \quad (2) \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right)$$

解

$$\begin{aligned} (1) & \left(-2\frac{1}{3}\right) \times \left(-\frac{5}{21}\right) \times \left(-1\frac{1}{5}\right) \\ & = -\left(2\frac{1}{3} \times \frac{5}{21} \times 1\frac{1}{5}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{3 個負數相乘其值為負} \\ \end{array} \right\} \\ & = -\left(\frac{\cancel{7}^1}{\cancel{3}_1} \times \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{21}_3} \times \frac{\cancel{6}^2}{\cancel{5}_1}\right) \\ & = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) \times \left(\frac{-2}{3}\right) \\ & = +\left(\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{4 個負數相乘其值為正} \\ \end{array} \right\} \\ & = \frac{16}{81} \end{aligned}$$



隨堂練習

計算下列各式的值。

$$\begin{aligned} (1) & \left(-1\frac{2}{3}\right) \times \frac{1}{6} \times \left(-1\frac{4}{5}\right) \\ & = 1\frac{2}{3} \times \frac{1}{6} \times 1\frac{4}{5} \\ & = \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{3}_1} \times \frac{1}{\cancel{6}_2} \times \frac{\cancel{4}^3}{\cancel{5}_1} \\ & = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & \text{5 個 } \left(-\frac{1}{2}\right) \text{ 連乘} \\ & = -\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \\ & = -\frac{1}{32} \end{aligned}$$

主題 4 分數的除法運算

倒數

已知分數 $\frac{b}{a}$ ，其中 a 、 b 皆不為 0，將它的分子和分母對調，所得到新的分數 $\frac{a}{b}$ 稱為 $\frac{b}{a}$ 的**倒數**，我們也稱這兩個分數互為倒數，例如：

- (1) $\frac{2}{3}$ 的倒數為 $\frac{3}{2}$ ；
- (2) $4\frac{1}{3} = \frac{13}{3}$ ，所以 $4\frac{1}{3}$ 的倒數為 $\frac{3}{13}$ ；
- (3) $-\frac{7}{2}$ 的倒數為 $-\frac{2}{7}$ ，所以 $-\frac{7}{2}$ 的倒數為 $-\frac{2}{7}$ ；
- (4) $-2 = -\frac{2}{1}$ ，所以 -2 的倒數為 $-\frac{1}{2}$ ；
- (5) $1 = \frac{1}{1}$ ，所以 1 的倒數是 1；
- (6) 由於分數的分母不能為 0，所以 0 沒有倒數。

由上面可知：若 a 、 b 都是不為 0 的整數，因為 $\frac{b}{a} \times \frac{a}{b} = 1$ ，所以互為倒數的兩數相乘，其乘積為 1。

隨堂練習

寫出下列各數的倒數。

(1) $3\frac{2}{5}$

$\frac{5}{17}$

(2) $-\frac{4}{7}$

$-\frac{7}{4}$

(3) $-\frac{11}{4}$

$-\frac{4}{11}$

(4) -1

-1



分數的除法運算

國小時曾學過除以一个不為 0 的分數，就等於乘以這個分數的倒數。
如果有帶分數，則要先化為假分數再做運算。

$$\text{例如：} \frac{3}{5} \div 2\frac{1}{2} = \frac{3}{5} \div \frac{5}{2} = \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

而第 1 章整數除法的符號運算規則，在分數除法運算時也成立。

$$\text{例如：(1) } (-\frac{9}{5}) \div (-\frac{4}{7}) = +(\frac{9}{5} \div \frac{4}{7})$$

$$(2) (\frac{-3}{5}) \div 2\frac{1}{2} = (-\frac{3}{5}) \div \frac{5}{2} = -(\frac{3}{5} \div \frac{5}{2})$$

因此，我們可以得知：

Key point

分數的除法運算

1. 同號的兩分數相除，其結果為正。
2. 異號的兩分數相除，其結果為負。

例 10

對應學習內容
N-7-3

分數的除法運算

計算下列各式的值。

$$(1) \frac{5}{6} \div (-3\frac{1}{3})$$

$$(2) (-\frac{9}{8}) \div (-\frac{3}{4}) \div \frac{1}{3}$$

解

$$\begin{aligned} (1) \frac{5}{6} \div (-3\frac{1}{3}) &= \frac{5}{6} \div (-\frac{10}{3}) = -(\frac{5}{6} \div \frac{10}{3}) \\ &= -(\frac{\cancel{5}^1}{\cancel{6}_2} \times \frac{\cancel{3}^1}{10_2}) = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (-\frac{9}{8}) \div (-\frac{3}{4}) \div \frac{1}{3} &= \frac{9}{8} \div \frac{3}{4} \div \frac{1}{3} = \frac{\cancel{9}^1}{\cancel{8}_2} \times \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{3}_1} \times \frac{\cancel{3}^1}{1} \\ &= \frac{9}{2} \text{ (或 } 4\frac{1}{2}) \end{aligned}$$

隨堂練習

計算下列各式的值。

$$\begin{aligned} (1) (-\frac{2}{3}) \div 1\frac{3}{5} &= -(\frac{2}{3} \div \frac{8}{5}) = -(\frac{\cancel{2}^1}{3} \times \frac{5}{\cancel{8}_4}) \\ &= -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) (-\frac{3}{4}) \div (-1\frac{1}{6}) \div (-\frac{9}{4}) &= -(\frac{3}{4} \div \frac{7}{6} \div \frac{9}{4}) = -(\frac{\cancel{3}^1}{\cancel{4}_1} \times \frac{\cancel{6}^2}{7} \times \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{9}_3}) \\ &= -\frac{2}{7} \end{aligned}$$

主題 5 數的四則運算

我們在第 1 章學過整數四則運算的規則，也適用於數的四則運算。
接著我們來看下面的例題。

例 11

對應學習內容
N-7-3

數的四則運算

計算下列各式的值。

$$(1) 1.5 \div (-0.6) \times \left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{1}{6}$$

$$(2) 4\frac{1}{3} \div \left(-8\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{3}\right)$$

解

$$\begin{aligned} (1) & 1.5 \div (-0.6) \times \left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{1}{6} \\ &= \frac{3}{2} \div \left(-\frac{3}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{1}{6} \\ &= \frac{\cancel{3}^1}{2} \times \frac{5}{\cancel{3}_1} \times \frac{5}{3} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{25}{6} + \frac{1}{6} \\ &= \frac{\cancel{26}^{13}}{\cancel{6}_3} \\ &= \frac{13}{3} \text{ (或 } 4\frac{1}{3}\text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) & 4\frac{1}{3} \div \left(-8\frac{2}{3}\right) \times \left(\frac{5}{9} - \frac{1}{3}\right) \\ &= \frac{13}{3} \div \left(-\frac{26}{3}\right) \times \frac{5-3}{9} \\ &= \frac{13}{3} \times \left(-\frac{3}{26}\right) \times \frac{2}{9} \\ &= -\left(\frac{\cancel{13}^1}{\cancel{3}_1} \times \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{26}_2} \times \frac{\cancel{2}^1}{9}\right) \\ &= -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

隨堂練習

計算下列各式的值。

$$(1) \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{3}{5} + 1.5\right) \div (-1.75)$$

$$(2) \frac{1}{12} - \frac{1}{12} \times \frac{2}{3} \div \frac{5}{9}$$

$$\begin{aligned} &= \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{3}{5} + \frac{3}{2}\right) \div \left(-\frac{7}{4}\right) \\ &= \left(-\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{6+15}{10}\right) \times \left(-\frac{4}{7}\right) \\ &= \frac{\cancel{1}^1}{\cancel{3}_1} \times \frac{\cancel{21}^7}{\cancel{10}_5} \times \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{7}_1} \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{12} - \frac{1}{\cancel{12}_4} \times \frac{\cancel{2}^1}{\cancel{3}_1} \times \frac{\cancel{9}^3}{5} \\ &= \frac{1}{12} - \frac{1}{10} \\ &= -\frac{1}{60} \end{aligned}$$

我們在第1章學過，整數的乘法對加(減)法有分配律。事實上，分數的乘法對加(減)法也有分配律。我們來看下面的例題。

例 12

對應學習內容
N-7-4

分數乘法對加(減)法的分配律

計算下列各式的值。

$$(1) \left(-\frac{4}{11}\right) \times \left(33 + \frac{11}{12}\right)$$

$$(2) 3\frac{9}{11} \times (-57) - 1\frac{9}{11} \times (-57)$$

學習時光機

$$\textcircled{1} a \times (b+c) \\ = a \times b + a \times c$$

$$\textcircled{2} a \times (b-c) \\ = a \times b - a \times c$$

$$\textcircled{3} a \times b + a \times c \\ = a \times (b+c)$$

$$\textcircled{4} a \times b - a \times c \\ = a \times (b-c)$$

解

$$(1) \left(-\frac{4}{11}\right) \times \left(33 + \frac{11}{12}\right)$$

$$= \left(-\frac{4}{11}\right) \times 33 + \left(-\frac{4}{11}\right) \times \frac{11}{12}$$

$$= -12 - \frac{1}{3}$$

$$= -12\frac{1}{3}$$

$$(2) 3\frac{9}{11} \times (-57) - 1\frac{9}{11} \times (-57)$$

$$= \left(3\frac{9}{11} - 1\frac{9}{11}\right) \times (-57)$$

$$= 2 \times (-57)$$

$$= -114$$



隨堂練習

計算下列各式的值。

$$(1) \left(-\frac{2}{3}\right) \times \left[(-3) + \frac{3}{8}\right]$$

$$= \left(-\frac{2}{3}\right) \times (-3) + \left(-\frac{2}{3}\right) \times \frac{3}{8}$$

$$= 2 + \left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{7}{4} \text{ (或 } 1\frac{3}{4}\text{)}$$

$$(2) 9\frac{1}{5} \times 239 + 9\frac{1}{5} \times (-39)$$

$$= 9\frac{1}{5} \times [239 + (-39)]$$

$$= 9\frac{1}{5} \times 200$$

$$= \frac{46}{5} \times 200^{40}$$

$$= 1840$$

例 13

對應學習內容
N-7-3

分數運算的應用問題

某特製蠟燭只要點燃後都會以固定的速率燃燒，現有一枝長 20 公分的特製蠟燭直立在桌上，將其點燃 2 小時後吹熄，所剩長度為 $12\frac{1}{2}$ 公分，若繼續點燃後，請問還要幾小時幾分鐘，此蠟燭才會全部燃燒完畢？

解 因為燃燒掉的長度為 $20 - 12\frac{1}{2} = \frac{40}{2} - \frac{25}{2} = \frac{15}{2}$ (公分)，

所以此蠟燭每小時燃燒 $\frac{15}{2} \div 2 = \frac{15}{4}$ (公分)，

$$12\frac{1}{2} \div \frac{15}{4} = \frac{25^5}{2_1} \times \frac{4_2}{15_3} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3},$$

又 $3\frac{1}{3}$ 小時 = 3 小時 20 分鐘

故此蠟燭還要 3 小時 20 分鐘才能燃燒完畢。

Hint

蠟燭燃燒的時間
= 蠟燭長度 ÷ 燃燒速率



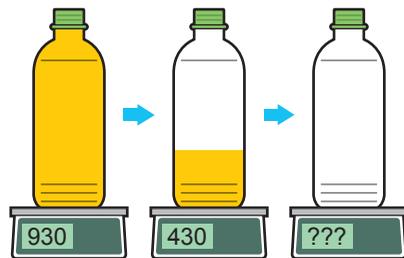
隨堂練習

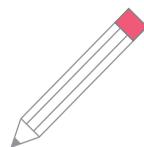
有一瓶果汁，連瓶子共重 930 公克，喝了 $\frac{2}{3}$ 瓶的果汁後，剩餘的果汁連瓶子共重 430 公克，求空瓶子重多少公克？

因為喝掉了 $930 - 430 = 500$ 公克的果汁，占果汁重量的 $\frac{2}{3}$

所以果汁原重 $500 \div \frac{2}{3} = 750$ (公克)

故空瓶重 $930 - 750 = 180$ (公克)





1 最簡分數

當一個分數的分子和分母互質時，這個分數稱為最簡分數，否則就不是最簡分數。

例 $-\frac{11}{15}$ 是最簡分數， $-\frac{12}{14}$ 不是最簡分數。

2 分數的比較大小

絕對值愈大的負分數，其值愈小。

例 因為 $|\frac{-2}{3}| > |\frac{-3}{5}|$ ，所以 $\frac{-2}{3} < \frac{-3}{5}$ 。

3 分數的加減

任意幾個分數做加減運算時，

(1) 若分母相同，則分母不變，分子直接相加或相減。

$$\text{例 } (-\frac{3}{10}) + \frac{4}{10} = \frac{(-3)+4}{10} = \frac{1}{10}。$$

(2) 若分母不同，則先通分化成相同分母後，分子再相加或相減。

$$\text{例 } (-\frac{1}{5}) - \frac{2}{3} = (-\frac{3}{15}) - \frac{10}{15} = \frac{(-3)-10}{15} = -\frac{13}{15}。$$

4 倒數

已知分數 $\frac{b}{a}$ ，其中 a 、 b 皆不為 0，將它的分子和分母對調，所得到的新分數 $\frac{a}{b}$ 稱為 $\frac{b}{a}$ 的倒數，我們也稱這兩個分數互為倒數，而互為倒數的兩數相乘，其乘積為 1。

例 $\frac{-2}{3}$ 的倒數是 $\frac{3}{-2}$ ，而 $(\frac{-2}{3}) \times (\frac{3}{-2}) = 1$ 。

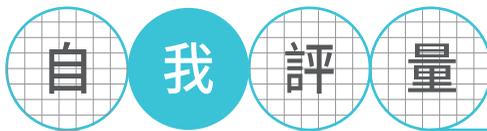
5 分數的乘除

(1) 幾個真分數或假分數相乘時，將分子相乘當作新分子，分母相乘當作新分母，所得到的新分數就是它們的乘積。

(2) 除以一個不為 0 的分數，就等於乘以這個分數的倒數。

(3) 同號的兩分數相乘(除)，其結果為正；異號的兩分數相乘(除)，其結果為負。

$$\text{例 } (-\frac{2}{3}) \times \frac{7}{5} = -(\frac{2 \times 7}{3 \times 5}) = -\frac{14}{15}, (-\frac{3}{5}) \div \frac{7}{2} = -(\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}) = -\frac{6}{35}。$$



1 將下列各分數化成最簡分數。

P.124 隨堂

$$(1) -\frac{14}{42}$$

$$= -\frac{1}{3}$$

$$(2) -\frac{75}{60}$$

$$= -\frac{5}{4}$$

2 比較下列各組數的大小。

P.126 例 2

$$(1) -\frac{4}{7}, -\frac{4}{5}$$

因為 $\frac{4}{7} < \frac{4}{5}$

所以 $-\frac{4}{7} > -\frac{4}{5}$

$$(2) -1\frac{2}{3}, -1\frac{5}{12}, -2\frac{5}{19}$$

$$1\frac{2}{3} = 1\frac{8}{12}$$

因為 $2\frac{5}{19} > 1\frac{8}{12} > 1\frac{5}{12}$

即 $2\frac{5}{19} > 1\frac{2}{3} > 1\frac{5}{12}$

所以 $-2\frac{5}{19} < -1\frac{2}{3} < -1\frac{5}{12}$

3 計算下列各式的值。

$$(1) (-\frac{7}{6}) + \frac{4}{3}$$

$$= -\frac{7}{6} + \frac{8}{6}$$

$$= \frac{1}{6}$$

P.128 例 4

$$(2) (-\frac{11}{20}) - (-\frac{5}{12})$$

$$= -\frac{11}{20} + \frac{5}{12}$$

$$= -\frac{33}{60} + \frac{25}{60}$$

$$= -\frac{8}{60}$$

$$= -\frac{2}{15}$$

P.128 例 4

$$(3) (5\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2}) - (5\frac{1}{3} - 3\frac{1}{2})$$

$$= 5\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2} - 5\frac{1}{3} + 3\frac{1}{2}$$

$$= (5\frac{1}{3} - 5\frac{1}{3}) + (3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{2})$$

$$= 0 + 7$$

$$= 7$$

P.130 例 6

$$(4) 3\frac{1}{2} - 1\frac{2}{3} + (-\frac{5}{6})$$

$$= \frac{7}{2} - \frac{5}{3} - \frac{5}{6}$$

$$= \frac{21}{6} - \frac{10}{6} - \frac{5}{6}$$

$$= \frac{6}{6}$$

$$= 1$$

P.131 例 7

4 如果 $\frac{5}{6}$ 的分母加上 18，那麼分子要加上多少，其值才不會變？

P.123 內文

$$6 + 18 = 24, \frac{5}{6} = \frac{20}{24}, 20 - 5 = 15$$

所以分子要加上 15，其值才不會變

5 寫出下列各數的倒數。

P.135 隨堂

(1) $\frac{5}{8}$

$$\frac{5}{8} \text{ 的倒數為 } \frac{8}{5}$$

(2) $-\frac{11}{12}$

$$-\frac{11}{12} \text{ 的倒數為 } -\frac{12}{11}$$

(3) -3

$$-3 \text{ 的倒數為 } -\frac{1}{3}$$

(4) $-2\frac{1}{5}$

$$-2\frac{1}{5} \text{ 的倒數為 } -\frac{5}{11}$$

6 計算下列各式的值。

(1) $\frac{1}{4} \div (-1\frac{1}{2}) \times \frac{4}{3}$

P.136 例 10

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} \div (-\frac{3}{2}) \times \frac{4}{3} \\ &= \frac{1}{4} \times (-\frac{2}{3}) \times \frac{4}{3} \\ &= -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

(2) $(-\frac{1}{2}) \div \frac{8}{5} \times (-2\frac{2}{5})$

P.136 例 10

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \div \frac{8}{5} \times 2\frac{2}{5} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5^1}{8_4} \times \frac{12^6_5}{5_1} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

(3) $6 - [(-15) \div (-0.6) - (-0.6) \times 15]$

P.137 例 11

$$\begin{aligned} &= 6 - [(-15) \div (-\frac{3}{5}) - (-\frac{3}{5}) \times 15] \\ &= 6 - (15^5 \times \frac{5}{3_1} + \frac{3}{5_1} \times 15^3) \\ &= 6 - (25 + 9) \\ &= -28 \end{aligned}$$

(4) $200\frac{1}{4} \times 423 - 200\frac{1}{4} \times 23$

P.138 例 12

$$\begin{aligned} &= 200\frac{1}{4} \times (423 - 23) \\ &= (200 + \frac{1}{4}) \times 400 \\ &= 80000 + 100 \\ &= 80100 \end{aligned}$$

挑錯題

小翊和小妍計算 $\frac{7}{2} - \frac{4}{15} \div [(-\frac{1}{3}) + \frac{2}{5}]$ 的過程如下。判斷他們的解法是否正確？

若不正確，請標出開始發生錯誤的部分，並寫出正確的解法。

小翊：	小妍：
$\frac{7}{2} - \frac{4}{15} \div [(-\frac{1}{3}) + \frac{2}{5}]$	$\frac{7}{2} - \frac{4}{15} \div [(-\frac{1}{3}) + \frac{2}{5}]$
$= \frac{7}{2} - \frac{4}{15} \div (-\frac{1}{3}) - \frac{4}{15} \div \frac{2}{5}$	$= \frac{105-8}{30} \div (\frac{-5+6}{15})$
$= \frac{7}{2} + \frac{4}{15} \times 3 - \frac{4}{15} \times \frac{5}{2}$	$= \frac{97}{30} \times 15$
$= \frac{7}{2} + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}$	$= \frac{97}{2}$
$= \frac{105+24-20}{30}$	
$= \frac{109}{30}$	

正確解法如下：

$$\begin{aligned}
 & \frac{7}{2} - \frac{4}{15} \div [(-\frac{1}{3}) + \frac{2}{5}] \\
 &= \frac{7}{2} - \frac{4}{15} \div (\frac{-5+6}{15}) \\
 &= \frac{7}{2} - \frac{4}{15} \times 15^1 \\
 &= \frac{7}{2} - 4 \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$