chapter

2 分數的運算

Are You Ready？

+++ 因數與倍數

(1) 12 的因數有哪些？ 答：1、2、3、4、6、12。

(2) 50 以內，12 的倍數有哪些？

答：12、24、36、48。

+++ 判別 2、5、10 的倍數

下列四數 1564、2685、11115、95470 中，

哪些是 2 的倍數？答：1564、95470。

哪些是 5 的倍數？答：2685、11115、95470。

哪些是 10 的倍數？答：95470。

+++ 最大公因數與最小公倍數

利用短除法求 18 和 24 的最大公因數與最小公倍數。

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 18 & 24 \\ \hline 3 & 9 & 12 \\ \hline & 3 & 4 \end{array}$$

$(18, 24)=2\times3=6$

$[18, 24]=2\times3\times3\times4=72$

+++ 質數與合數

(1) 判斷 6 是質數還是合數？答：合數。

(2) 判斷 7 是質數還是合數？答：質數。

+++ 分數的四則運算

(1) $\frac{11}{2}\times\frac{4}{33}+\frac{1}{3}=$ 1。

(2) $\frac{5}{6}-\frac{7}{3}\div7=$ $\frac{1}{2}$。

你曾留意過花瓣的數量嗎？試著找些不同的花種數數看它們的花瓣，你會發現有些花的花瓣是 3 的倍數，像是百合花、含笑花；有些花的花瓣則是 4 或 5 的倍數，像是杜鵑、櫻花、大波斯菊。而每年 7～9 月，花蓮的六十石山都會綻放美麗的金針花海，你知道金針花的花瓣是幾的倍數嗎？

2-1 因數與倍數

1 因數與倍數　　2 常用倍數判別法

3 質數與質因數分解

由於因數與倍數是學習分數的基礎知識，所以我們先來說明因數與倍數的關係。

主題 1 因數與倍數

我們知道一副撲克牌有四種花色共 52 張牌 (不含鬼牌)，每種花色各有 $52\div4=13$ 張牌。由 $52\div4=13$ 可知 52 可以被 4 整除，4 就是 52 的因數，52 就是 4 的倍數。當然，由 $52=4\times13$ 也可以知道 4、13 是 52 的因數，52 是 4、13 的倍數。因此，對於 a、b、c 三個正整數，若滿足 $a\div b=c$ 或 $a=b\times c$，則 b、c 是 a 的因數，a 是 b、c 的倍數。

隨堂練習

1. 判斷 84 是否為 13 的倍數？

   $84\div13=6\cdots6$
   所以 84 不是 13 的倍數

2. 判斷下列各數中，哪些是 93 的因數？

   1、6、8、31

   $93\div1=93$、$93\div6=15\cdots3$、$93\div8=11\cdots5$、$93\div31=3$
   所以 1、31 是 93 的因數

我們也可以將因數、倍數推廣到負整數。

一般而言，**對於 a、b、c 三個非零整數，若滿足 $a\div b=c$ 或 $a=b\times c$，則 b、c 是 a 的因數，a 是 b、c 的倍數**。

例如：$6=1\times6=2\times3=(-1)\times(-6)=(-2)\times(-3)$

$-6=1\times(-6)=2\times(-3)=(-1)\times6=(-2)\times3$

我們說 1、2、3、6 和 -1、-2、-3、-6 都是 6 的因數，同時也都是 -6 的因數。

由前面的例子我們發現，對於正整數 a：

(1) 若 b 是 a 的正因數，則 $-b$ 就是 a 的負因數。

(2) a 與 $-a$ 的因數相同。

在國中階段，如果沒有特別指明，因數是指正因數，倍數是指正倍數。

針對 1 和 0 這兩個數的因數與倍數，我們說明如下：

(1) 因為每一個整數 n 都可以寫成 $n=1\times n$，

所以 **1 是任何整數的因數，或任何整數都是 1 的倍數。**

(2) 因為 0 不能當除數，所以 **0 不是任何整數的因數**；

而 $0=1\times0=2\times0=\cdots\cdots=(-1)\times0=(-2)\times0=\cdots\cdots$，

所以 **0 是任意非零整數的倍數**。

例 1

對應學習內容 N-7-2

因數的應用

將 54 寫成 $a\times b$，其中 a、b 為正整數，並由小到大寫出 54 的所有因數。

解

$$\begin{aligned} & \quad a\times b \\ 54&=1\times54\\ &=2\times27\\ &=3\times18\\ &=6\times9\end{aligned}$$

所以 54 的因數有 1、2、3、6、9、18、27、54。

將例 1 中整數 54 的因數由小到大排列，就可觀察出其因數配對關係。

1、2、3、6、9、18、27、54

隨堂練習

將 36 寫成 $c\times d$，其中 c、d 為正整數，並由小到大寫出 36 的所有因數。

$$
\begin{aligned}
&\quad c\times d\\
36&=1\times36\\
&=2\times18\\
&=3\times12\\
&=4\times9\\
&=6\times6
\end{aligned}
$$

所以 36 的因數有 1、2、3、4、6、9、12、18、36

例 2　因數的應用

對應學習內容 N-7-2

有一正整數 M 的所有因數由小到大排列為 1、2、3、a、6、b、15、M，則 a、b 之值為何？

解　1、2、3、a、6、b、15、M

由 2 與 15 得知 $M=2\times15=30$，

而 $30=1\times30=2\times15=3\times10=5\times6$，

得 $a=5$、$b=10$。

隨堂練習

有一正整數 N 的所有因數由小到大排列為 1、2、c、8、N，則 c、N 之值為何？

1、2、c、8、N

由 2 與 8 得知 $N=2\times8=16$

而 $16=1\times16=2\times8=4\times4$

得 $c=4$、$N=16$

主題 2 常用倍數判別法

2、5 的倍數判別法

我們已學過：

(1) 若一個整數的個位數字是 0、2、4、6、8，
則這個數一定是 2 的倍數；否則就不是 2 的倍數。

(2) 若一個整數的個位數字是 0 或 5，
則這個數一定是 5 的倍數；否則就不是 5 的倍數。

Hint
整數中，2 的倍數稱為偶數；不是 2 的倍數稱為奇數。

例 3 判別 2、5 的倍數

對應學習內容 *N*-7-2

已知五位數 1234□是 2 的倍數，也是 5 的倍數，則□中可填入的數為何？

解 1234□是 2 的倍數，得□中可填入的數為 0、2、4、6、8；
1234□是 5 的倍數，得□中可填入的數為 0、5；
因為 1234□是 2 的倍數，也是 5 的倍數，所以□中可填入 0。

隨堂練習

設 A 是五位數 9176□，請回答下列問題：

(1) 若 A 是 5 的倍數，也是 2 的倍數，則□中可填入的數為何？
□可填入 0

(2) 若 A 是 5 的倍數，但不是 2 的倍數，則□中可填入的數為何？
□可填入 5

動動腦

如果一個整數是 10 的倍數，則此數是否一定是 2 和 5 的倍數？
是，因為一個整數是 10 的倍數時，它的個位數字一定是 0
所以當一個數是 10 的倍數時，也一定是 2 和 5 的倍數

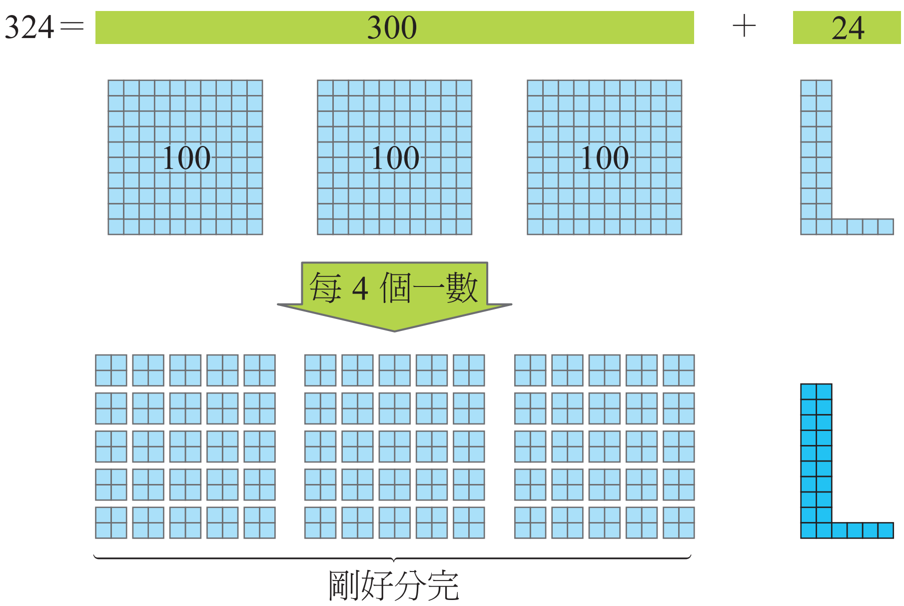
我們在第 1 章學過乘法對加法的分配律 $a\times c+b\times c=(a+b)\times c$，當甲 $=a\times c$、乙 $=b\times c$，即甲、乙皆為 c 的倍數，由下圖可知，若甲、乙皆為 c 的倍數時，則甲＋乙也為 c 的倍數。

$$\underset{c\text{ 的倍數}}{\overset{甲}{a\times c}} + \underset{c\text{ 的倍數}}{\overset{乙}{b\times c}} = \underset{c\text{ 的倍數}}{\overset{甲+乙}{\underbrace{(a+b)\times c}}}$$

利用上述性質，我們來進行下列各倍數的判別法。

4 的倍數判別法

將 100 個積木，每 4 個一堆，剛好分成 25 堆，所以一個整數只要是 100 的倍數，那麼每 4 個一數，都不會有剩餘。透過這個的想法，我們來判斷一個數是否為 4 的倍數。例如：324 是否為 4 的倍數？



因為 300 是 100 的倍數，每 4 個一數剛好分完，所以 324 能不能被 4 整除，只要看 24 能不能被 4 整除即可，而 $24\div4=6$，所以 324 是 4 的倍數。

如果換成 326，而 $326=300+26$，雖然 300 是 4 的倍數，但 26 不是 4 的倍數，所以 326 不是 4 的倍數。

Hint

$$\begin{aligned}324&=300&&+24\\&=3\times100&&+24\\&=\underbrace{3\times25\times4}_{4\text{ 的倍數}}&&+24\end{aligned}$$

從上頁的過程，可以得到：

Key point

4 的倍數判別法

如果一個整數的末兩位數是「00」或 4 的倍數，
那麼這個整數就是 4 的倍數；否則就不是 4 的倍數。

例 4 對應學習內容 *N-7-2*

判別 4 的倍數

(1) 判斷 201798 是不是 4 的倍數？

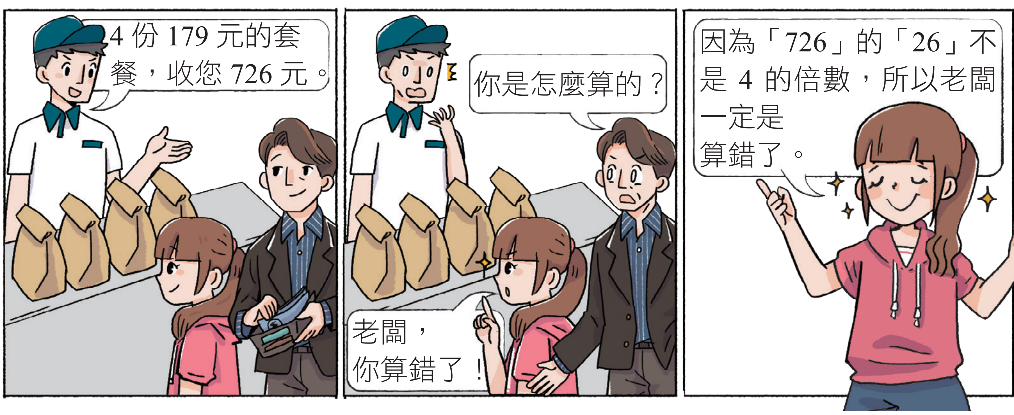
(2) 已知五位數 9176□是 4 的倍數，則□中可填入的數為何？

解 (1) 201798 的末兩位數為 98，而 $98 \div 4 = 24 \cdots 2$，
因此 201798 不是 4 的倍數。

(2) 因為 9176□是 4 的倍數，所以 6□是 4 的倍數，
由於 60、64、68 是 4 的倍數，
因此□中可填入 0、4、8。

隨堂練習

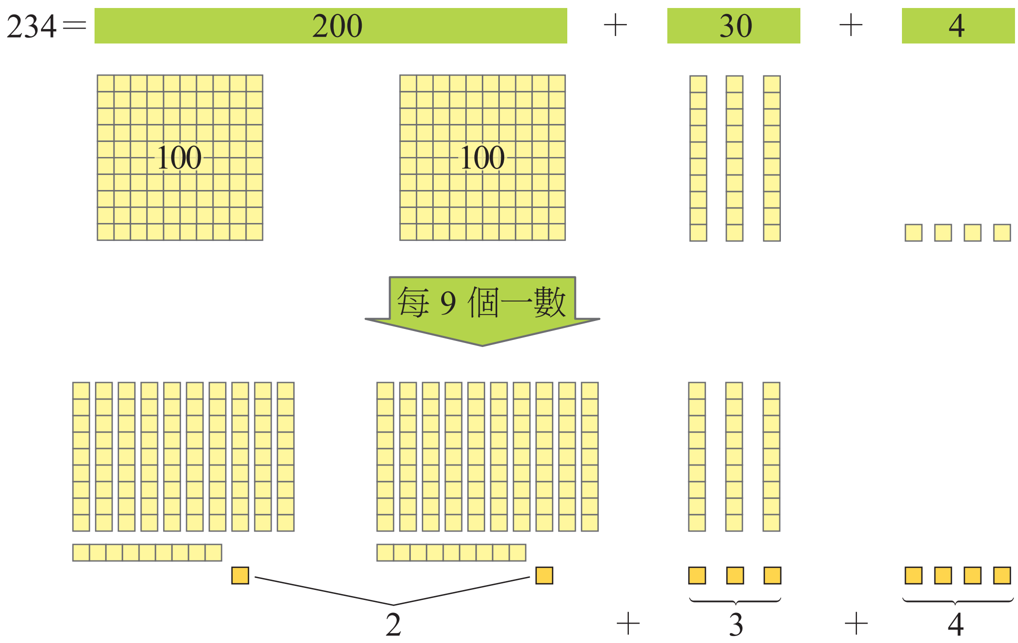
1. 判斷 5566 和 1314520 是不是 4 的倍數？
   5566 的末兩位數為 66，$66 \div 4 = 16 \cdots 2$，因此 5566 不是 4 的倍數
   1314520 的末兩位數為 20，$20 \div 4 = 5$，因此 1314520 是 4 的倍數
2. 已知六位數 8654□2 是 4 的倍數，則□中可填入的數為何？
   □2 是 4 的倍數，因此□中可填入 1、3、5、7、9



9 的倍數判別法

如何判斷一個整數是否為 9 的倍數呢？

例如：234 是否為 9 的倍數？



由上圖的分法可知剩下 2＋3＋4＝9 個，9 是 9 的倍數，所以 234 是 9 的倍數。因此，只要判斷各個數字和是不是 9 的倍數。

Hint

$$
\begin{aligned}
234 &= 200 + 30 + 4 \\
&= 2\times 99 + 2 + 3\times 9 + 3 + 4 \\
&= \underbrace{(2\times 99 + 3\times 9)}_{9\text{ 的倍數}} + (2+3+4)
\end{aligned}
$$

如果換成 318，而 318 的各個數字和為 3＋1＋8＝12，但 12 不是 9 的倍數，所以 318 不是 9 的倍數。

從上面的過程，可以得到：

Key point

9 的倍數判別法

如果一個整數的各個數字和是 9 的倍數，那麼這個整數就是 9 的倍數；否則就不是 9 的倍數。

例 5 判別 9 的倍數

對應學習內容
N-7-2

(1) 判斷 3333999 是不是 9 的倍數？

(2) 已知六位數 24□005 是 9 的倍數，則□中可填入的數為何？

解 (1) 3333999 的各個數字和是 3＋3＋3＋3＋9＋9＋9＝39，
因為 39 不是 9 的倍數，
所以 3333999 不是 9 的倍數。

(2) 24□005 的各個數字和是 2＋4＋□＋0＋0＋5＝11＋□，
因為 24□005 是 9 的倍數，
所以 11＋□也是 9 的倍數，
因此□中可填入 7。

隨堂練習

1. 判斷 111111111 是不是 9 的倍數？

1＋1＋1＋1＋1＋1＋1＋1＋1＝9
因為 9 是 9 的倍數
所以 111111111 是 9 的倍數

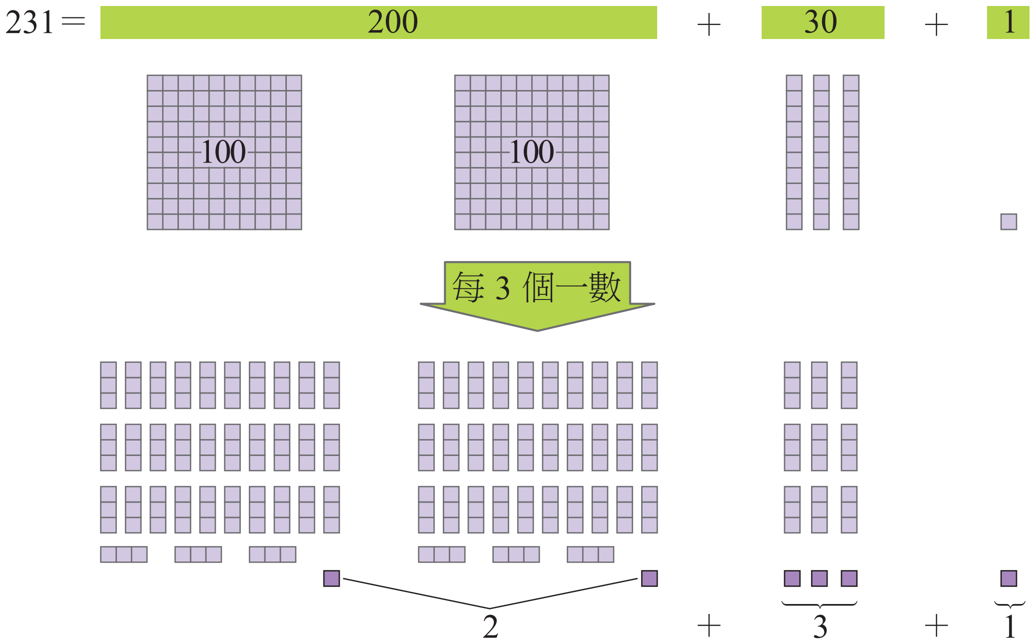
2. 已知六位數 283□32 是 9 的倍數，則□中可填入的數為何？

2＋8＋3＋□＋3＋2＝18＋□
18＋□是 9 的倍數
因此□中可填入 0、9

3 的倍數判別法

我們可以仿照 9 的倍數判別法來了解 3 的倍數判別法。

例如：231 是否為 3 的倍數？



由上圖的分法可知剩下 2＋3＋1＝6 個，6 是 3 的倍數，所以 231 是 3 的倍數。因此，只要判斷各個數字和是不是 3 的倍數。

Hint

$$\begin{aligned}231&=200&&+30&&+1\\&=2\times99+2&&+3\times9+3&&+1\\&=\underbrace{(2\times99+3\times9)}_{3\text{ 的倍數}}&&+(2+3+1)\end{aligned}$$

如果換成 412，而 412 的各個數字和為 4＋1＋2＝7，但 7 不是 3 的倍數，所以 412 不是 3 的倍數。

從上面的過程，可以得到：

Key point

3 的倍數判別法

如果一個整數的各個數字和是 3 的倍數，那麼這個整數就是 3 的倍數；否則就不是 3 的倍數。

例 6

對應學習內容
N-7-2

判別 3 的倍數

(1) 判斷 222233 是不是 3 的倍數？

(2) 已知六位數 30□010 是 3 的倍數，則□中可填入的數為何？

解 (1) 222233 的各個數字和是 2＋2＋2＋2＋3＋3＝14，
因為 14 不是 3 的倍數，
所以 222233 不是 3 的倍數。

(2) 30□010 的各個數字和是 3＋0＋□＋0＋1＋0＝4＋□，
因為 30□010 是 3 的倍數，
所以 4＋□也是 3 的倍數，
因此□中可填入 2、5、8。

隨堂練習

1. 下列哪些數是 3 的倍數？

528、825、852、258、582、285

因為 5＋2＋8＝15
所以 528、825、852、258、582、285 都是 3 的倍數

2. 已知四位數 4□32 是 3 的倍數，則□中可填入的數為何？

4＋□＋3＋2＝9＋□
9＋□是 3 的倍數
因此□中可填入 0、3、6、9

動動腦

如果一個整數是 3 的倍數，那麼它一定是 9 的倍數嗎？

當一個整數的各個數字和是 9 的倍數時，一定也是 3 的倍數
但一個數的各個數字和是 3 的倍數時，不一定是 9 的倍數
所以一個數是 3 的倍數時，它不一定是 9 的倍數

11 的倍數判別法

要檢查一個整數是否為 11 的倍數，判別方法如下：

Key point

11 的倍數判別法

如果一個整數的「奇數位數字和」與「偶數位數字和」的差是 11 的倍數或 0，那麼這個整數就是 11 的倍數；否則就不是 11 的倍數。

例如：25718 是否為 11 的倍數？

17

2 5 7 1 8

6

第 1、3、5 位 (奇數位) 的數字和 $=2+7+8=17$，

第 2、4 位 (偶數位) 的數字和 $=5+1=6$。

因為 $17-6=11$ 是 11 的倍數，

所以 25718 是 11 的倍數。

Hint

$$\begin{aligned}25718 &= 2\times10000 + 5\times1000 + 7\times100 + 1\times10 + 8\\ &= 2\times(9999+1) + 5\times(1001-1) + 7\times(99+1) + 1\times(11-1) + 8\\ &= \underbrace{2\times9999}_{11\text{ 的倍數}} + \underbrace{5\times1001}_{11\text{ 的倍數}} + \underbrace{7\times99}_{11\text{ 的倍數}} + \underbrace{1\times11}_{11\text{ 的倍數}} + (2-5+7-1+8)\end{aligned}$$

例 7 對應學習內容 N-7-2

判別 11 的倍數

已知六位數 20□082 是 11 的倍數，則□中可以填入的數為何？

解

10＋□

2 0 □ 0 8 2

2

20□082 的奇數位數字和 $=2+$□$+8=10+$□，

偶數位數字和 $=0+0+2=2$，

因為 (10＋□)－2 要為 0 或 11 的倍數，

因此□中可填入 3。

隨堂練習

判斷 345345 和 37195 是不是 11 的倍數？

$(3+5+4)-(4+3+5)=12-12=0$，因此 345345 是 11 的倍數

$(7+9)-(3+1+5)=16-9=7$，因此 37195 不是 11 的倍數

主題 3　質數與質因數分解

質數與合數

一個大於 1 的整數，

(1) 除了 1 和本身以外，沒有其他的因數，這樣的數稱為質數。

例如：2、11、17 等都是質數。

(2) 除了 1 和本身以外，還有其他的因數，這樣的數稱為合數。

例如：4、15、51 等都是合數。

而 **1 不是質數也不是合數，**

2 是最小的質數，也是質數中唯一的偶數。

因此，要判斷一個正整數是質數還是合數，要看小於它的正整數中，除了 1 以外，是否有其他的因數。

例 8　判斷質數與合數

對應學習內容 N-7-1

分別判斷 21 和 23 兩數是質數還是合數？

解 (1) 在小於 21、大於 1 的正整數 2、3、4、5、6、……、20 中，3 和 7 皆是 21 的因數，所以 21 是合數。

(2) 在小於 23、大於 1 的正整數中，

① 2 不是 23 的因數，所以 2 的倍數 4、6、8、10、12、14、16、18、20、22 也不是 23 的因數；

② 3 不是 23 的因數，所以 9、15、21 也不是 23 的因數；

③ 5、7、11、13、17、19 也不是 23 的因數。

因此，小於 23 的正整數中，除了 1 以外，再也找不到其他因數，所以 23 是質數。

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23		

由例 8 (2) 的步驟中，我們依序刪除由小到大質數的倍數，發現要判斷**一個正整數是否為質數，只要看小於這個數的質數是否為此數的因數即可**。

隨堂練習

分別判斷 31 和 39 兩數是質數還是合數？

(1) 在小於 31、大於 1 的質數中
2、3、5、7、11、13、17、19、23、29 皆不是 31 的因數
因此 31 是質數
(2) 在小於 39、大於 1 的質數中
3 是 39 的因數
因此 39 是合數

埃拉托賽尼
(*Eratosthenes*，西元前 276～194 年)主要的貢獻是計算地球的周長。

質數篩檢法

大約在兩千多年前，古希臘數學家埃拉托賽尼 (*Eratosthenes*) 就已利用篩檢法找出某個範圍內的質數，我們來看下面的問題探索。

問題探索　篩出與檢驗 1 到 100 中的質數

在下面的百數表中，依下列過程操作，並回答問題：

百數表

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

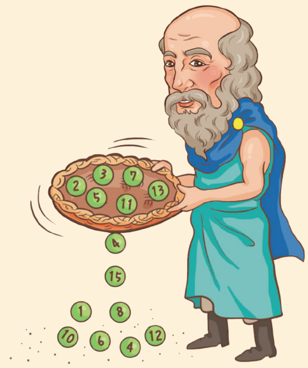
⑴ 1 不是質數，刪去 1。

⑵ 在所有 2 的倍數中，除了 2 是質數，其他都是合數，所以保留 2，再依序刪去 2 的倍數。

⑶ 仿照⑵，以同樣的方式，分別保留 3、5、7，再依序刪去 3、5、7 的倍數。

⑷ 保留 11，刪去 11 的倍數，此時你發現什麼？

11 的倍數都已經在刪去 2、3、5、7 的倍數時被刪去了



⑸ 保留 13，刪去 13 的倍數，此時你發現什麼？

13 的倍數都已經在刪去 2、3、5、7 的倍數時被刪去了

⑹ 列出到目前剩下的所有數，並檢驗它們是否為質數。

剩下的數有 2、3、5、7、11、13、17、19、23、29、31、37、41、43、47、53、59、61、67、71、73、79、83、89、97，共 25 個，它們都是質數

由問題探索的過程可以發現，在 1 到 100 的整數中，保留 2、3、5、7 並刪去 2、3、5、7 的倍數後，剩下的數都是質數。

數學好好玩 摩斯密碼

摩斯密碼（*Morse code*）是透過「・」、「—」的排列順序，來表達不同的英文字母、數字等的一種代碼。例如：我們規定質數表示「—」，合數表示「・」，那麼 ㉞㉙51 摩斯密碼為「・—・」，透過右表我們可以知道它代表的意思是「*R*」。

你可以翻到書末 *P*.IV「摩斯密碼解鎖」，利用所學的質數、合數概念，一起挑戰解謎。

N	—・	1	・————
O	———	2	・・———
P	・——・	3	・・・——
Q	——・—	4	・・・・—
R	・—・	5	・・・・・
S	・・・	6	—・・・・

例 9

對應學習內容
N-7-1

質數與合數的應用

欲將 n 個邊長為 1 的小正方形緊密排列拼成矩形，且不會剩下任何小正方形，則：

(1) $n=12$ 時，可以拼出幾種不同形狀的矩形？

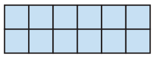
(2) $n=13$ 時，可以拼出幾種不同形狀的矩形？

解　矩形面積＝長×寬，所以將 n 分解成兩個因數的乘積就可以判斷。

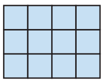
(1) $n=12$　　拼法：

$=1\times12$

$=2\times6$



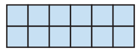
$=3\times4$



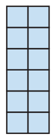
所以可以拼出 3 種矩形。

Hint

2×6



6×2



是一樣的。

(2) $n=13$　　拼法：

$=1\times13$

所以只可以拼出 1 種矩形。

隨堂練習

在例 9 中，若 $n=36$，可以拼出幾種不同形狀的矩形？

$n=36=1\times36=2\times18=3\times12=4\times9=6\times6$

所以可以拼出 5 種矩形

動動腦

在例 9 中，當 n 是質數時，可以拼出幾種不同形狀的矩形？

若 n 是質數，則 $n=1\times n$

只可以拼出 1 種矩形

質因數分解

如果一個整數的因數也是質數，我們稱此因數為這個整數的**質因數**。

例如：18 的因數有 1、2、3、6、9、18，

其中 2、3 是質數，所以 2、3 就是 18 的質因數；

其他的因數 1、6、9、18 都不是 18 的質因數。

我們曾經學過，利用短除法將一個合數分解，並寫成它的質因數連乘積。例如：

$$
\begin{array}{r|r}
2 & 72 \\ \hline
2 & 36 \\ \hline
2 & 18 \\ \hline
3 & 9 \\ \hline
 & 3
\end{array}
$$

$72=2\times2\times2\times3\times3$

表示 72 是 3 個質因數 2 和 2 個質因數 3 的連乘積。

事實上，每一個合數都可以分解成質因數的連乘積，這樣的過程稱為**質因數分解**；將質因數分解寫成指數的形式，並將相異質因數由小排到大，這樣的表示法就稱為**標準分解式**。

$$\underbrace{72=2\times2\times2\times3\times3}_{\text{質因數分解}}=\underbrace{2^3\times3^2}_{\text{標準分解式}}$$

例 10 標準分解式

對應學習內容 *N*-7-2

將 180 以標準分解式表示。

解

$$
\begin{array}{r|r}
2 & 180 \\ \hline
2 & 90 \\ \hline
3 & 45 \\ \hline
3 & 15 \\ \hline
 & 5
\end{array}
$$

$180=2\times2\times3\times3\times5$

$\quad=2^2\times3^2\times5$

隨堂練習

將下列各數以標準分解式表示。

(1) 105

$$\begin{array}{r|r} 3 & 105 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$105=3\times5\times7$

(2) 150

$$\begin{array}{r|r} 2 & 150 \\ \hline 3 & 75 \\ \hline 5 & 25 \\ \hline & 5 \end{array}$$

$150=2\times3\times5^2$

例 11　質因數分解的應用

對應學習內容
N-7-2

小翊設定手機解鎖的密碼為 *abcd* 四碼，若他是利用 2268 的標準分解式 $2^a\times b^c\times d$ 來設計密碼，請問此組密碼為何？

解

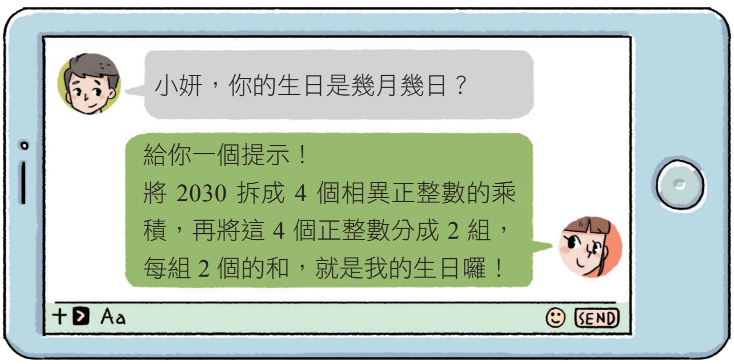
$$\begin{array}{r|r} 2 & 2268 \\ \hline 2 & 1134 \\ \hline 3 & 567 \\ \hline 3 & 189 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$2268=2^2\times3^4\times7$，

所以密碼為 2347。

隨堂練習

以下是小翊與小妍的對話過程：



根據上述對話，小妍的生日應為幾月幾日？

因為 $2030=2\times5\times7\times29$

小妍生日的日期可能為：$29+2=31$，$29+5=34$ (不合)，$29+7=36$ (不合)

得月分為 $5+7=12$，所以小妍的生日為 12 月 31 日

重點整理

1 因數與倍數

對於 a、b、c 三個非零整數，若滿足 $a \div b = c$ 或 $a = b \times c$，則 b、c 是 a 的因數，a 是 b、c 的倍數。

註 (1) 1 是任何整數的因數；任何整數都是 1 的倍數。

(2) 0 不是任何整數的因數；0 是任意非零整數的倍數。

2 倍數判別法

(1) 2 的倍數判別法：個位數字為 0、2、4、6、8。

(2) 5 的倍數判別法：個位數字為 0 或 5。

(3) 4 的倍數判別法：末兩位數字為「00」或 4 的倍數。

(4) 9 的倍數判別法：各個數字和為 9 的倍數。

(5) 3 的倍數判別法：各個數字和為 3 的倍數。

(6) 11 的倍數判別法：「奇數位數字和」與「偶數位數字和」的差為 11 的倍數或 0。

3 質數與合數

(1) 一個大於 1 的整數，除了 1 和本身以外，沒有其他的因數，這個數稱為質數。

例 2、7、31、73、97。

(2) 一個大於 1 的整數，除了 1 和本身以外，還有其他的因數，這個數稱為合數。

例 4、25、87、91、143。

註 1 不是質數也不是合數。

4 質因數

如果一個整數的因數也是質數，則稱此因數為這個整數的質因數。

例 12 的因數有 1、2、3、4、6、12，所以 12 的質因數是 2、3。

5 質因數分解

每一個合數都可以分解成質因數的連乘積，這樣的過程稱為質因數分解。

6 標準分解式

將一個合數做質因數分解，並寫成指數的形式，將相異質因數由小排到大，這樣的表示法就稱為標準分解式。

例 因為 $180 = 2^2 \times 3^2 \times 5$，所以 $2^2 \times 3^2 \times 5$ 稱為 180 的標準分解式。

自我評量

1 有兩個正整數，若其乘積為 63，和為 16，則此兩正整數分別為多少？ P.83 例 1

63＝1×63＝3×21＝7×9
1＋63＝64（不合）
3＋21＝24（不合）
7＋9＝16
所以此兩個正整數分別為 7 和 9

2 已知 3415□是五位數，請回答下列問題。 P.85 例 3、P.87 例 4

(1) 若 3415□是 2 的倍數，則□中可填入哪些數？

□可填入 0、2、4、6、8

(2) 若 3415□是 5 的倍數，則□中可填入哪些數？

□可填入 0、5

(3) 若 3415□是 4 的倍數，則□中可填入哪些數？

5□是 4 的倍數，因此□可填入 2、6

3 已知 3□156 是五位數，請回答下列問題。 P.89 例 5、P.91 例 6、P.92 例 7

(1) 若 3□156 是 9 的倍數，則□中可填入哪些數？

3＋□＋1＋5＋6＝15＋□
15＋□是 9 的倍數，因此□可填入 3

(2) 若 3□156 是 3 的倍數，則□中可填入哪些數？

3＋□＋1＋5＋6＝15＋□
15＋□是 3 的倍數，因此□可填入 0、3、6、9

(3) 若 3□156 是 11 的倍數，則□中可填入哪些數？

(3＋1＋6)－(□＋5)＝5－□
5－□是 11 的倍數或 0，因此□可填入 5

4 下列 9 個數中，哪些是 459 的質因數？ P.97 內文

1、2、3、5、6、7、13、17、51

$$\begin{array}{r|l} 3 & 459 \\ \hline 3 & 153 \\ \hline 3 & 51 \\ \hline & 17 \end{array}$$

所以 3、17 是 459 的質因數

5 將下列各數以標準分解式表示。 P.97 例 10

(1) 175

$$\begin{array}{r|l} 5 & 175 \\ \hline 5 & 35 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$175=5^2\times7$

(2) 242

$$\begin{array}{r|l} 2 & 242 \\ \hline 11 & 121 \\ \hline & 11 \end{array}$$

$242=2\times11^2$

(3) 546

$$\begin{array}{r|l} 2 & 546 \\ \hline 3 & 273 \\ \hline 7 & 91 \\ \hline & 13 \end{array}$$

$546=2\times3\times7\times13$

6 將 12×3×57 做質因數分解，並以標準分解式表示。 P.97 例 10

$12\times3\times57$

$=(2\times2\times3)\times3\times(3\times19)$

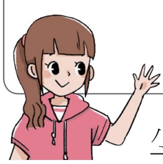
$=2\times2\times3\times3\times3\times19$

$=2^2\times3^3\times19$

挑錯題

小妍、小翊、小美對於「六位數 111999 是否為 9 的倍數」的說法如下。判斷他們的說法是否正確，並說明你的理由。

因為 111999÷9＝12444…3，所以 111999 不是 9 的倍數。



小妍

因為 1＋1＋1＋9＋9＋9＝30 為 3 的倍數，所以 111999 是 9 的倍數。

小翊

因為 111999 的末兩位數「99」為 9 的倍數，所以 111999 是 9 的倍數。

小美

小妍：正確 √；錯誤 □，理由：＿＿＿＿。

小翊：正確 □；錯誤 √，理由：各個數字和為 3 的倍數，不一定為 9 的倍數。

小美：正確 □；錯誤 √，理由：應將各個數字加總，再判斷是否為 9 的倍數。