

2-2

最大公因數與最小公倍數

基礎練習

1 互質 (5分)

p.103 隨堂練習

下列哪些數與 $2 \times 3^2 \times 5$ 互質？

$$27、77、2^2 \times 7 \times 11、7 \times 9、11 \times 13$$

兩數的最大公因數為 1，即稱兩數互質

所以與 $2 \times 3^2 \times 5$ 互質的數即是沒有 2、3、5 的因數

$$27 = 3^3、77 = 7 \times 11、7 \times 9 = 3^2 \times 7$$

因此與 $2 \times 3^2 \times 5$ 互質的數有 77、 11×13

2 求最大公因數 (5分)

p.105 隨堂練習

已知 a 為正整數，且 a 的所有因數是 1、2、3、4、6、8、12、24，則：

(1) a 之值為何？

(2) a 和 90 的最大公因數為多少？

(1) a 所有的因數有 1、2、3、4、6、8、12、24，所以 a 是 24

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 24 \ 90} \\ \underline{3 \ 12 \ 45} \\ 4 \ 15 \end{array}$$

$$(a, 90) = (24, 90) = 2 \times 3 = 6$$

● 類似題 (配合基礎第 1 題)

下列哪些數與 $2^5 \times 5^2 \times 11^3$ 互質？

- (A) 18 (B) 55
 (C) 63 (D) $2^3 \times 5^2 \times 13$
 (E) $3^2 \times 7^5 \times 13$ (F) $2^5 \times 5^2 \times 11^3$

答：(C)、(E)

● 類似題 (配合基礎第 2 題)

已知 a 為正整數，且 a 的所有因數是 1、3、5、7、15、21、35、105，求 a 和 245 的最大公因數為多少？

答：35

3 找出最大公因數 (每題5分, 共25分)

p.105 隨堂練習

p.108 例2

求下列各組數的最大公因數。

(1) 60、84

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 60 \ 84} \\ 2 \overline{) 30 \ 42} \\ 3 \overline{) 15 \ 21} \\ \quad 5 \ 7 \end{array}$$

$$(60, 84) = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

(2) 140、210、175

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 140 \ 210 \ 175} \\ 7 \overline{) 28 \ 42 \ 35} \\ \quad 4 \ 6 \ 5 \end{array}$$

$$(140, 210, 175) = 5 \times 7 = 35$$

(3) $2^3 \times 3 \times 11$ 、 $2^2 \times 5^3 \times 11^2$

$$(2^3 \times 3 \times 11, 2^2 \times 5^3 \times 11^2)$$

$$= 2^2 \times 11 \text{ (或 } 44)$$

(4) 48×12 、 16×15

$$48 \times 12 = 2^4 \times 3 \times 2^2 \times 3 = 2^6 \times 3^2$$

$$16 \times 15 = 2^4 \times 3 \times 5$$

$$(48 \times 12, 16 \times 15) = 2^4 \times 3 \text{ (或 } 48)$$

(5) $2 \times 3^2 \times 5^2$ 、 $2^2 \times 3^2 \times 7$ 、 $2^2 \times 5^3 \times 7$

$$(2 \times 3^2 \times 5^2, 2^2 \times 3^2 \times 7, 2^2 \times 5^3 \times 7)$$

$$= 2$$

4 求最小公倍數 (5分)

p.111 隨堂練習

從1到100的整數中，能同時被6和15整除的數有哪些？

能同時被6和15整除的數就是6和15的公倍數

$$\text{又 } [6, 15] = 30$$

所以1到100的整數中，能同時被6和15整除的數有30、60、90

● 類似題 (配合基礎第3題)

求出下列各組數的最大公因數。(不必乘開)

(1) 126、60

(2) 45、105、165

(3) $2^3 \times 3$ 、 2×3^3

(4) $2^7 \times 7^2 \times 11^6$ 、 $2^5 \times 11^4$ 、 $7^2 \times 11^8$

答：(1) 2×3 (2) 3×5 (3) 2×3 (4) 11^4

● 類似題 (配合基礎第4題)

300到500以內的數中，同時是24的倍數，也是60的倍數的數有哪些？

答：360、480

5 找出最小公倍數 (每題 6 分, 共 24 分) (每題 5 分, 共 20 分)

p.111 隨堂練習 p.114 例 4

求下列各組數的最小公倍數，並以標準分解式表示。

(1) 210、350

$$\begin{array}{l} 2 \overline{) \begin{array}{cc} 210 & 350 \end{array}} \quad [210, 350] \\ 5 \overline{) \begin{array}{cc} 105 & 175 \end{array}} = 2 \times 5 \times 7 \times 3 \times 5 \\ 7 \overline{) \begin{array}{cc} 21 & 35 \end{array}} = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \\ \quad \quad \quad 3 \quad 5 \end{array}$$

(2) 81、99、135

$$\begin{array}{l} 3 \overline{) \begin{array}{ccc} 81 & 99 & 135 \\ 27 & 33 & 45 \\ 9 & 11 & 15 \\ 3 & 11 & 5 \end{array}} \\ [81, 99, 135] = 3^4 \times 5 \times 11 \end{array}$$

(3) $7^2 \times 11$ 、 $5^4 \times 7$

$$\begin{aligned} & [7^2 \times 11, 5^4 \times 7] \\ & = 5^4 \times 7^2 \times 11 \end{aligned}$$

(4) $2^2 \times 3 \times 7^2$ 、 $3^3 \times 5 \times 7$ 、 $2 \times 3^2 \times 11$

$$\begin{aligned} & [2^2 \times 3 \times 7^2, 3^3 \times 5 \times 7, 2 \times 3^2 \times 11] \\ & = 2^2 \times 3^3 \times 5 \times 7^2 \times 11 \end{aligned}$$

6 最小公倍數與公倍數的關係 (每題 6 分, 共 12 分) (每題 5 分, 共 10 分)

p.114 例 4

設 $a=2^2 \times 3 \times 5$ ， $b=350$ ，回答下列問題：

(1) a 、 b 兩數的最小公倍數是多少？

$$\text{因為 } b=350=2 \times 5^2 \times 7$$

$$\text{所以 } [a, b]=2^2 \times 3 \times 5^2 \times 7 \text{ (或 } 2100)$$

(2) a 、 b 兩數的公倍數中，最接近 10000 的數是多少？

$$\text{因為 } 10000 \div 2100 = 4 \cdots 1600, \text{ 又 } 2100 \times 4 = 8400, 2100 \times 5 = 10500$$

$$\text{所以 } a、b \text{ 兩數的公倍數中，最接近 } 10000 \text{ 的數是 } 10500$$

類似題 (配合基礎第 5 題)

求出下列各組數的最小公倍數，並以標準分解式表示。

(1) 84, 60

(2) 45, 105, 180

(3) $2^3 \times 3$, 2×3^3

(4) $2^7 \times 7^2 \times 11^6$, $2^5 \times 11^4$, $7^2 \times 11^8$

答：(1) $2^2 \times 3 \times 5 \times 7$

(2) $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$

(3) $2^3 \times 3^3$

(4) $2^7 \times 7^2 \times 11^8$

類似題 (配合基礎第 6 題)

設 $a=495$ ， $b=2^2 \times 3 \times 5^2$ ，則：

(1) a 、 b 兩數的最小公倍數是多少？

(2) a 、 b 兩數的公倍數中，最接近 30000 的數是多少？

答：(1) $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 11$ (或 9900)

(2) 29700

7 最小公倍數的應用問題 (每題7分, 共14分)

p.117 例6

大姐每4天回家一趟，二姐每9天回家一趟，妹妹每6天回家一趟，則：

(1) 已知1月1日三人同時回家，下一次三人同時回家是幾月幾日？

$$[4, 9, 6] = 2^2 \times 3^2 = 36$$

表示36天後三人會同時回家

所以下一次三人同時回家是2月6日

(2) 如果三人某次同時回家時正好是星期六，那麼下次同時星期六回家是幾天之後？

$$[36, 7] = 36 \times 7 = 252$$

所以下次同時星期六回家是252天之後

8 最大公因數的應用問題 (10分)

p.119 例8

佳儒為了布置教室，買了三條緞帶分別長147公分、189公分、126公分，要將緞帶分成每條等長（長度為整數），最少可分成幾條？每條長度為多少公分？

$$\begin{array}{r|l} 3 & 147 \quad 189 \quad 126 \\ \hline 7 & 49 \quad 63 \quad 42 \\ & 7 \quad 9 \quad 6 \end{array}$$

$$(147, 189, 126) = 3 \times 7 = 21$$

所以最少可分成 $7+9+6=22$ 條，每條長度為21公分

● 類似題 (配合基礎第7題)

小倩將甲、乙、丙三臺電腦設定自動執行掃毒程式，其中甲電腦每3天掃毒一次，乙電腦每6天掃毒一次，丙電腦每7天掃毒一次，已知8月15日三臺電腦同時掃毒，求下一次同時掃毒是幾月幾日？

答：9月26日

● 類似題 (配合基礎第8題)

將一個長36公分、寬126公分、高210公分的長方體積木切割成數個相同的正方體，且沒有剩下，則這樣的正方體邊長最長是幾公分？

答：6公分

精熟練習

1 標準分解式的倍數 (6分)

已知 $a=2^{\square} \times 3 \times 7$ ，其中 a 是 28 的倍數，但不是 24 的倍數，那麼 $\square = ?$

因為 $28=2^2 \times 7$ ， $24=2^3 \times 3$

所以 $a=2^2 \times 3 \times 7$

即 $\square = 2$

2 最大公因數的應用問題 (6分)

老師將鉛筆 128 枝、橡皮擦 89 個，分給全班同學，每人得到的鉛筆和橡皮擦的數量都相同，最後剩下 2 枝鉛筆、5 個橡皮擦。請問全班最多有幾位同學？

$$128 - 2 = 126, 89 - 5 = 84$$

$$(126, 84) = 2 \times 3 \times 7 = 42$$

所以全班最多有 42 位同學

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 126 & 84 \\ \hline 3 & 63 & 42 \\ \hline 7 & 21 & 14 \\ \hline & 3 & 2 \end{array}$$

類似題 (配合精熟第 1 題)

- (1) 已知甲 $= 2^3 \times 3^a \times 7^4$ ，若甲為 63 的倍數，但不為 162 的倍數，則 $a =$ 2 或 3。
- (2) 已知乙 $= 4 \times 5^b \times 6$ ，若 40 為乙的因數，但 75 不為乙的因數，則 $b =$ 1。

類似題 (配合精熟第 2 題)

導遊將 93 瓶水、140 塊麵包，分給旅遊團的人，每人得到的水和麵包數量都相同，最後剩下 1 瓶水和 2 塊麵包。請問旅遊團最多有幾人？

答：46 人