1-2 配方法與二次函數

教學時數

- 8 小時

活動 1 利用配方法，將形如 $y=ax^2+bx+c$，$a\neq 0$ 的二次函數，轉變成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

教學眉批

- 解一元二次方程式的配方法與二次函數多項式的配方法有些差異。
- 教師講解例題 1 時，不妨對照方程式 $x^2-6x+8=0$ 的配方法，讓學生複習與比較。
- 形如 $y=x^2-5x+6$ 的題型，在配方過程中出現分數的形式，對學生難度較高，教師可視學生程度，適時增加練習與教學，本書在例題 3 才加入 x 項係數爲奇數之題型（配方過程中出現分數的形式）。

1 配方法

對應能力指標 9-a-02

如何描繪二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形呢？

我們可以先將 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，就可以利用前面學過的方法描繪出 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形，而將 $y=ax^2+bx+c$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的過程，稱為**配方法**。接下來，我們以一些例子說明。

例 1 配方法（x^2 項係數為 1）

搭配習作 P9 基礎題 1(1)

將二次函數 $y=x^2-6x+8$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

解

$y=x^2-6x+8$

$=x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2+8$ ← 將 x^2-6x 加上 3^2 配成完全平方式，再減去 3^2 使得原函數不變

$=(x-3)^2-1$

隨堂練習

將二次函數 $y=x^2+4x+5$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$y=x^2+4x+5$

$=x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2+5$

$=(x+2)^2+1$

備課教學資源

- 補救教學．計算 Basic 1-2
- 免試加強類題本 1-2

會考觀測站－加強演練題 搭配例 1

- 將二次函數 $y=x^2+8x+5$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，求 $a+h-k$ 的值。

8

例 2 配方法（x^2 項係數不為 1）

將二次函數 $y=2x^2+4x-1$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

解

$y=2x^2+4x-1$

$=2(x^2+2x)-1$ ← 將 x^2 項和 x 項括在一起，並提出 x^2 項的係數 2

$=2(x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2)-1$ ← 將 x^2+2x 配成完全平方式

$=2[(x+1)^2-1]-1$

$=2(x+1)^2-2-1$

$=2(x+1)^2-3$

隨堂練習

1. 若 $y=a(x-h)^2+k$ 是由二次函數 $y=4x^2+8x-1$ 經由配方而得，則 $a=$？(D)

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

$y=4x^2+8x-1$

$=4(x^2+2x)-1$

$=4(x^2+2\cdot x\cdot 1+1^2-1^2)-1$

$=4[(x+1)^2-1]-1$

$=4(x+1)^2-4-1$

$=4(x+1)^2-5$

故 $a=4$，選 (D)。

〈另解〉

a 的值即為 x^2 項的係數，故 $a=4$，選 (D)。

2. 將二次函數 $y=3x^2+12x+2$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

$y=3x^2+12x+2$

$=3(x^2+4x)+2$

$=3(x^2+2\cdot x\cdot 2+2^2-2^2)+2$

$=3[(x+2)^2-4]+2$

$=3(x+2)^2-12+2$

$=3(x+2)^2-10$

基會試題

- 90 基測 II 第 13 題
- 93 基測 I 第 18 題
- 93 基測 II 第 23 題
- 93 基測 II 第 24 題
- 100 聯測第 6 題

教學眉批

- 例題 1 是 x^2 項係數為 1 的配方，而例題 2 是 x^2 項係數不為 1 的配方。
- 形如 $y=2x^2+5x+4$ 的題型，比例題 3 難度高，教師勿急於此處讓學生練習，可在例題 3 之後視學生程度補充。
- 隨堂 1，教師也可以讓學生練習寫出完整的配方過程。

課轉Q 關鍵提問

- 隨堂 1，h、k 的值為何？

答：$h=-1$，$k=-5$。

93 基測 II 第 23 題　搭配例 2

- (D) 下列哪一個二次函數，其圖形和 $y=4x^2-8x$ 的圖形有相同的頂點？

(A) $y=2x^2-4x$ (B) $y=-2(x+1)^2$

(C) $y=2(x+1)^2+4$ (D) $y=-2(x-1)^2-4$

教學眉批

- 教師可讓學生多加練習 x^2 項係數爲正整數的配方，待學生熟練後，再教學 x^2 項係數爲負整數、分數的題型。
- 教師講解例題 3 時，宜對照方程式 $-x^2+5x-1=0$ 的配方法，讓學生比較其差異。

基會試題

- 91 基測 I 第 8 題
- 98 基測 II 第 18 題
- 100 基測 II 第 16 題
- 101 基測第 18 題
- 102 基測第 8 題

例 3 $y=ax^2+bx+c$ 圖形的頂點

搭配習作 P9 基礎題 1(2)

將二次函數 $y=-x^2+5x-1$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，並求此函數圖形的頂點為何？

解

$y=-x^2+5x-1$

$=-(x^2-5x)-1$ ⟵ 將 x^2 項和 x 項括在一起，並提出 x^2 項的係數 -1

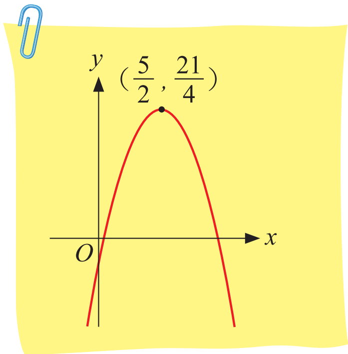
$=-[x^2-2\cdot x\cdot\frac{5}{2}+(\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2]-1$ ⟵ 將 x^2-5x 配成完全平方式

$=-[(x-\frac{5}{2})^2-\frac{25}{4}]-1$

$=-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{25}{4}-1$

$=-(x-\frac{5}{2})^2+\frac{21}{4}$

故函數圖形的頂點為 $(\frac{5}{2},\frac{21}{4})$。



隨堂練習

將二次函數 $y=-x^2-3x+2$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，並求此函數圖形的頂點為何？

$y=-x^2-3x+2$

$=-(x^2+3x)+2$

$=-[x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+(\frac{3}{2})^2-(\frac{3}{2})^2]+2$

$=-[(x+\frac{3}{2})^2-\frac{9}{4}]+2$

$=-(x+\frac{3}{2})^2+\frac{9}{4}+2$

$=-(x+\frac{3}{2})^2+\frac{17}{4}$

故函數圖形的頂點為 $(-\frac{3}{2},\frac{17}{4})$。

101 基測第 18 題 搭配例 3

- ((D)) 判斷下列哪一個組的 a、b、c，可使二次函數 $y=ax^2+bx+c-5x^2-3x+7$ 在坐標平面上的圖形有最低點？
  (A) $a=0$，$b=4$，$c=8$ (B) $a=2$，$b=4$，$c=-8$
  (C) $a=4$，$b=-4$，$c=8$ (D) $a=6$，$b=-4$，$c=-8$

例 4 $y=ax^2+bx+c$ 圖形的最高點或最低點　搭配習作 P9 基礎題 2

將二次函數 $y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{3}{2}$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，並求此函數圖形的頂點？此頂點為最高點或最低點？

解

$y=\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{2}(x^2-6x)+\frac{3}{2}$ ← $\frac{1}{2}x^2-3x=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\cdot 6x=\frac{1}{2}(x^2-6x)$

$=\frac{1}{2}(x^2-2\cdot x\cdot 3+3^2-3^2)+\frac{3}{2}$ ← 將 x^2-6x 配成完全平方式

$=\frac{1}{2}[(x-3)^2-9]+\frac{3}{2}$

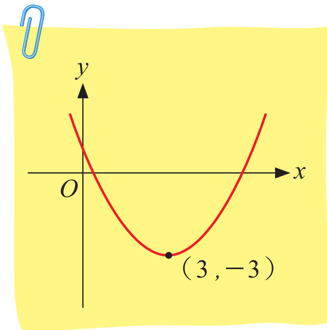
$=\frac{1}{2}(x-3)^2-\frac{9}{2}+\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{2}(x-3)^2-3$

可得函數圖形的頂點為 $(3,-3)$。

$\because a>0$，$\therefore$ 圖形的開口向上，

故函數圖形的頂點為最低點。



隨堂練習

求下列二次函數圖形的頂點？此頂點為最高點或最低點？

(1) $y=-2x^2+8x-3$

$y=-2x^2+8x-3$

$=-2(x^2-4x+4-4)-3$

$=-2(x-2)^2+5$

可得函數圖形的頂點為 $(2,5)$，

又圖形的開口向下，

故函數圖形的頂點為最高點。

(2) $y=\frac{1}{2}x^2+2x+3$

$y=\frac{1}{2}x^2+2x+3$

$=\frac{1}{2}(x^2+4x+4-4)+3$

$=\frac{1}{2}(x+2)^2+1$

可得函數圖形的頂點為 $(-2,1)$，

又圖形的開口向上，

故函數圖形的頂點為最低點。

若二次函數的圖形開口向上，則頂點是最低點；若圖形開口向下，則頂點是最高點。

教學眉批

- 教師講解例題 4 時，宜對照方程式 $\frac{1}{2}x^2-3x+\frac{3}{2}=0$ 的配方法，讓學生比較其差異。
- 當 x^2 項係數不為 1 時，解方程式一般會用等量公理使係數變為 1，而二次函數是以提出係數的方式處理，因舊經驗的關係，學生在二次函數的配方時，會有將 x^2 項係數直接變成 1 的錯誤，例如：$y=2x^2+4x=x^2+2x=\cdots\cdots$ 因此建議教師講解時，能與方程式對照比較，以釐清觀念。

會考觀測站－基礎演練題　搭配例 4

- 將二次函數 $y=\frac{2}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{8}{3}$ 配方成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，則此函數圖形有最高點或最低點為何？

有最低點 $(-1,2)$

活化體驗站
趣味數學

- $1\sim10$ 公克的砝碼中，用哪三個砝碼就能秤出 1 到 13 公克之間的所有物品？（砝碼與物重皆爲整數）
1、3、9 公克。

教學眉批

- 例題 5 另解：（利用頂點的 x 坐標公式）令 $a=-2$，
∴頂點的 x 坐標爲
$-\dfrac{b}{2a}$
$=-\dfrac{b}{2\times(-2)}$
$=-1$
因此 $b=-4$，
將 $(-1,1)$ 代入函數 $y=-2x^2-4x+c$ 得 $c=-1$。

關鍵提問

- 二次函數圖形有最低點時，表示圖形開口方向為何？有最高點時，表示圖形開口方向為何？
答：開口向上；
開口向下。

例 5 $y=ax^2+bx+c$ 的應用

搭配習作 P10 基礎題 3

若二次函數 $y=-2x^2+bx+c$ 的最高點為 $(-1,1)$，求 b 及 c 的值。

思路分析

1. 由最高點 (h,k) 及 x^2 項的係數 a，可知二次函數 $y=a(x-h)^2+k$。
2. 將 $y=a(x-h)^2+k$ 展開後，與 $y=ax^2+bx+c$ 比較，即可求得 b、c 的值。

解

∵ $y=-2x^2+bx+c$ 的最高點為 $(-1,1)$，

x^2 項的係數為 -2，

∴可令 $y=-2(x+1)^2+1$

$=-2(x^2+2x+1)+1$

$=-2x^2-4x-2+1$

$=-2x^2-4x-1$

故對照原二次函數的係數可得 $b=-4$、$c=-1$。

隨堂練習

1. 若二次函數 $y=2x^2+bx+c$ 的最低點為 $(-2,1)$，求 b 及 c 的值。

∵ $y=2x^2+bx+c$ 的最低點為 $(-2,1)$，

且 x^2 的係數為 2，

∴可令 $y=2(x+2)^2+1$

$=2(x^2+4x+4)+1$

$=2x^2+8x+8+1$

$=2x^2+8x+9$

故對照原二次函數的係數可得 $b=8$、$c=9$。

會考觀測站－基礎演練題 搭配例 5

- 已知二次函數 $y=-2x^2+x+a$ 的最高點爲 $(b,1)$，求 a、b 的值。
$a=\dfrac{7}{8}$，$b=\dfrac{1}{4}$

隨堂練習

2. 已知某二次函數圖形的頂點為$(2,3)$，將此圖形平移後，會和 $y=3x^2-x-2$ 的圖形完全疊合，求此二次函數。

設二次函數為 $y=a(x-h)^2+k$，
$\because y=a(x-h)^2+k$ 的圖形可與 $y=3x^2-x-2$ 的圖形完全疊合，
$\therefore a=3$，
又圖形的頂點為$(2,3)$，
故二次函數為 $y=3(x-2)^2+3$。

補給站 $y=ax^2+bx+c$ 的頂點坐標與對稱軸

若將 $y=ax^2+bx+c$，$a\neq 0$ 化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，即可找到它的頂點與對稱軸。下面是利用配方法推導的過程：

$$\begin{aligned}
y&=ax^2+bx+c\\
&=a(x^2+\frac{b}{a}x)+c\\
&=a[x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2]+c\\
&=a[(x+\frac{b}{2a})^2-(\frac{b}{2a})^2]+c\\
&=a(x+\frac{b}{2a})^2-a(\frac{b}{2a})^2+c\\
&=a(x+\frac{b}{2a})^2+(\frac{-b^2+4ac}{4a})\\
&=a[x-(-\frac{b}{2a})]^2+(-\frac{b^2-4ac}{4a})
\end{aligned}$$

二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形，其頂點坐標為$(-\frac{b}{2a},-\frac{b^2-4ac}{4a})$，**對稱軸為直線** $x=-\frac{b}{2a}$。

關鍵提問

- 二次函數圖形向左、向右、向上、向下平移時，圖形的開口大小、方向會如何改變？
答：開口大小、方向都不變。

教學眉批

- $y=ax^2+bx+c$ 的配方過程，教師可同時以例題 4 的配方過程來對照說明。
- 雖然導出一般式的頂點公式，但建議教師要求學生盡量用配方法來解題，而公式方面，因為可將 x 坐標代入函數求得 y 坐標，因此可建議學生背 x 坐標即可。

會考觀測站－基礎演練題 搭配隨堂

- 將二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形向右平移 3 個單位，再向下平移 5 個單位後，可得新圖形的二次函數為 $y=2x^2-1$，求 a、b、c 的值。
$a=2$、$b=12$、$c=22$

備課教學資源

- 隨堂輕鬆考第 6 回

活動 2 能利用圖形觀察的方式，找出形如 $y=a(x-h)^2+k$ 函數圖形的最高點或最低點，進而得到此函數的最大值或最小值。

活動 3 能利用配方法，將形如 $y=ax^2+bx+c$ 的二次函數，轉化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，並利用不等式來找最大值或最小值。

教學眉批

- 利用函數圖形的最高點或最低點來尋找函數的最大值或最小值，對學生來說比較容易，教師可建議學生熟練此種方法。

2 二次函數的最大值或最小值

對應能力指標 9-a-03

從前面的討論可知，二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 均可利用配方法轉化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，進而由函數圖形的最高點或最低點得到此函數的最大值或最小值。

例如：$y=2x^2-4x-1=2(x-1)^2-3$

由圖 1-7 可知，圖形的最低點為 $(1,-3)$，

所以在 $x=1$ 時，函數 y 有最小值 -3。

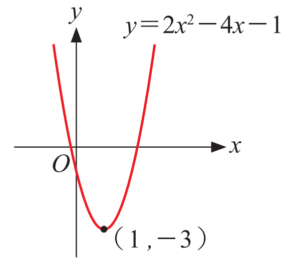


圖 1-7

就另一觀點而言，二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 轉化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式後，也可以利用任意完全平方式均大於或等於零的概念，推得此函數的最大值或最小值。

例如：$y=2x^2-4x-1=2(x-1)^2-3$

$\because (x-1)^2\geq 0$

$2(x-1)^2\geq 0$

$2(x-1)^2-3\geq -3$

$\therefore y\geq -3$

故在 $x=1$ 時，函數 y 有最小值 -3。

例 6 二次函數的最大值或最小值

搭配習作 P10 基礎題 4

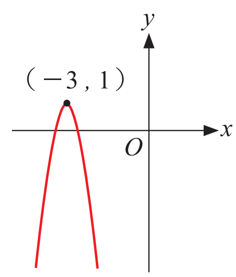
判別二次函數 $y=-5(x+3)^2+1$ 是否有最大值或最小值，並求出其值。

解一

$\because y=-5(x+3)^2+1$ 的圖形開口向下，

頂點 $(-3,1)$ 為最高點。

$\therefore$ 在 $x=-3$ 時，函數 y 有最大值 1。



會考觀測站－基礎演練題 搭配例 6

1. ((C)) 已知 a、b 爲常數，且 $y=a(x-5)^2+b$ 有最小值 -1，則下列敘述何者正確？
(A) $a<b$　(B) $a=b$　(C) $a>b$　(D) a、b 無法比較

2. 已知 $a>0$，則二次函數 $y=-\frac{a}{2}(x-\frac{2}{3})^2$ 的最大值或最小值爲何？

有最大值爲 0

解二 $\because (x+3)^2\geq 0$

$-(x+3)^2\leq 0$

$-5(x+3)^2\leq 0$

$-5(x+3)^2+1\leq 1$

$\therefore y\leq 1$

故在 $x=-3$ 時，函數 y 有最大值 1。

隨堂練習

1. 判別下列二次函數是否有最大值或最小值，並求出其值。

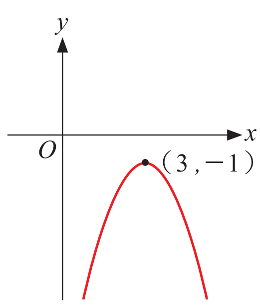
(1) $y=-3(x-1)^2+2$

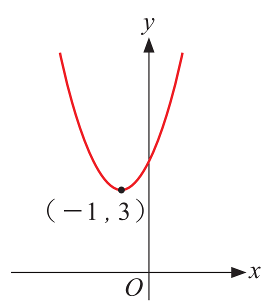
$\because$ 圖形的開口向下，
又頂點 $(1,2)$ 為最高點，
$\therefore$ 在 $x=1$ 時，
函數 y 有最大值 2。

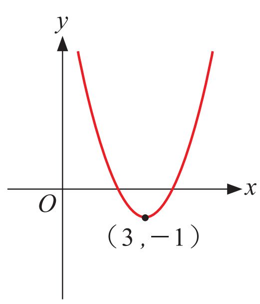
(2) $y=2(x+2)^2-4$

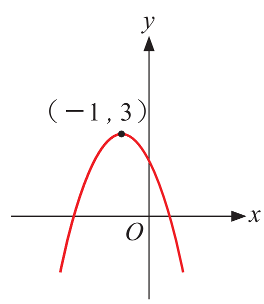
$\because$ 圖形的開口向上，
又頂點 $(-2,-4)$ 為最低點，
$\therefore$ 在 $x=-2$ 時，
函數 y 有最小值 -4。

2. 若 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形，在 $x=3$ 時，函數 y 有最小值 -1，則其圖形可能為下列何者？(C)

(A)


(B)


(C)


(D)


$\because$ 函數圖形有最小值，$\therefore$ 圖形的開口向上，
又頂點為 $(3,-1)$，故選 (C)。

教學眉批

- 直接對二次函數 $y=a(x-h)^2+k$，以不等式作形式化的說明。
- 以 $y=a(x-h)^2+k$，$a>0$ 時為例：
  $\because a(x-h)^2\geq 0$
  $a(x-h)^2+k\geq 0+k$
  $\therefore y=a(x-h)^2+k\geq k$
  又 $x=h$ 時，
  $y=k$，
  故在 $x=h$ 時，函數有最小值 $y=k$。

基會試題

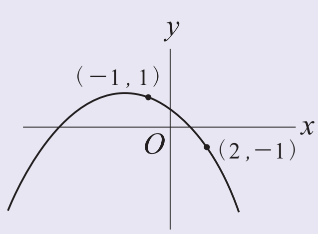
- 92 基測 I 第 6 題
- 100 基測 I 第 28 題

轉Q 關鍵提問

- 隨堂 2，若圖形在 $x=-1$ 時，函數 y 有最大值 3，則其圖形可能為哪一個？
  答：(D)。

100 基測 I 第 28 題 搭配隨堂

- ((D)) 右圖為坐標平面上二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形，且此圖形通過 $(-1,1)$、$(2,-1)$ 兩點。下列關於此二次函數的敘述，何者正確？
  (A) y 的最大值小於 0
  (B) 當 $x=0$ 時，y 的值大於 1
  (C) 當 $x=1$ 時，y 的值大於 1
  (D) 當 $x=3$ 時，y 的值小於 0



教學眉批

- 例題 7 是先經過配方，再利用不等式作形式化的說明。
- 教師可跟學生強調，只要是二次函數就一定會有最大值或最小值。
- 若學生先經過配方，再利用圖形的最高點或最低點找最大值或最小值，教師不宜算學生錯。

例 7 利用配方法求二次函數的最大值或最小值 搭配習作 P10 基礎題 5

判別下列二次函數是否有最大值或最小值，並求出其值。

(1) $y=-3x^2+6x-5$　(2) $y=\frac{1}{2}x^2+x-2$

解

(1) $y=-3x^2+6x-5$

$=-3(x^2-2x)-5$

$=-3(x^2-2x+1-1)-5$

$=-3(x-1)^2-2$

$\because -3(x-1)^2-2\leq -2$，

$\therefore$ 在 $x=1$ 時，

函數 y 有最大值 -2。

(2) $y=\frac{1}{2}x^2+x-2$

$=\frac{1}{2}(x^2+2x)-2$

$=\frac{1}{2}(x^2+2x+1-1)-2$

$=\frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{5}{2}$

$\because \frac{1}{2}(x+1)^2-\frac{5}{2}\geq -\frac{5}{2}$，

$\therefore$ 在 $x=-1$ 時，

函數 y 有最小值 $-\frac{5}{2}$。

隨堂練習

判別下列二次函數是否有最大值或最小值，並求出其值。

(1) $y=3x^2-12x-1$

$y=3x^2-12x-1$

$=3(x-2)^2-13$

$\because 3(x-2)^2-13\geq -13$，

$\therefore$ 在 $x=2$ 時，

函數 y 有最小值 -13。

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+4x$

$y=-\frac{1}{2}x^2+4x$

$=-\frac{1}{2}(x-4)^2+8$

$\because -\frac{1}{2}(x-4)^2+8\leq 8$，

$\therefore$ 在 $x=4$ 時，

函數 y 有最大值 8。

最大值或最小值

形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的二次函數，有最大值或最小值：

(1) 當 $a>0$ 時，圖形開口向上，在 $x=h$ 時，函數 y 有最小值 k。

(2) 當 $a<0$ 時，圖形開口向下，在 $x=h$ 時，函數 y 有最大值 k。

備課教學資源

- 隨堂輕鬆考第 7 回

會考觀測站－基礎演練題 搭配例 7

- 求下列各二次函數的最大值或最小值：

(1) $y=x^2-x$　有最小值 $-\frac{1}{4}$

(2) $y=-x^2-3x+2$　有最大值 $\frac{17}{4}$

(3) $y=4x^2+6x+\frac{1}{4}$　有最小值 -2

3 圖形與兩軸的交點

對應能力指標 9-a-04

前面我們已經學過二次函數的畫圖，並知道二次函數圖形的頂點、對稱軸，接下來，我們探討二次函數的圖形與兩軸（x 軸、y 軸）的關係。

例 8 圖形與兩軸的交點坐標

搭配習作 P11 基礎題 6

求二次函數 $y=-x^2+6x-7$ 圖形與兩軸的交點坐標。

解 (1) 求圖形與 y 軸的交點坐標：

∵在 y 軸上的點，其 x 坐標為 0，

∴將 $x=0$ 代入函數得 $y=-7$，

故與 y 軸的交點坐標為 $(0,-7)$。

(2) 求圖形與 x 軸的交點坐標：

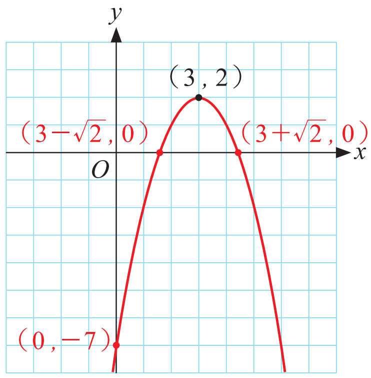
∵在 x 軸上的點，其 y 坐標為 0，

∴將 $y=0$ 代入函數得 $0=-x^2+6x-7$，

解方程式 $x^2-6x+7=0$

可得兩個解為 $x=3\pm\sqrt{2}$

故與 x 軸的交點坐標為 $(3+\sqrt{2}, 0)$ 與 $(3-\sqrt{2}, 0)$。



隨堂練習

求下列二次函數圖形與兩軸的交點坐標：

(1) $y=-x^2-x+6$

將 $x=0$ 代入函數得 $y=6$，

故圖形與 y 軸交於 $(0, 6)$。

將 $y=0$ 代入函數

得 $-x^2-x+6=0$

$(x+3)(-x+2)=0$

$x=-3$ 或 $x=2$

故圖形與 x 軸交於 $(-3, 0)$、$(2, 0)$。

(2) $y=4x^2-12x+9$

將 $x=0$ 代入函數得 $y=9$，

故圖形與 y 軸交於 $(0, 9)$。

將 $y=0$ 代入函數

得 $4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)^2=0$

$x=\frac{3}{2}$（重根）

故圖形與 x 軸交於 $(\frac{3}{2}, 0)$。

活動 4 了解二次函數的圖形與兩軸的相交關係，並知道其圖形與 x 軸的交點坐標，即為其對應的一元二次方程式的解。

教學眉批

- 例題 8 與隨堂練習目的在讓學生練習找出兩軸的交點坐標，所以只呈現了圖形與 x 軸交於兩點、交於一點的情形，而沒有交點的情形後面會說明。
- 解方程式 $x^2-6x+7=0$ 時，可利用配方法或公式解來解題。

基會試題

- 98 基測 II 第 30 題
- 101 基測第 30 題
- 104 會考第 21 題
- 105 會考（新店高中考場重考）第 22 題
- 107 會考第 21 題
- 108 會考第 26 題

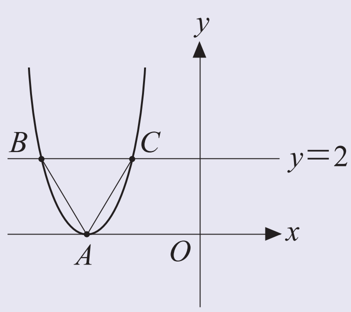
108 會考第 26 題

搭配例 8

- （(B)）如圖，坐標平面上有一頂點為 A 的拋物線，此拋物線與方程式 $y=2$ 的圖形交於 B、C 兩點，且 $\triangle ABC$ 為正三角形。若 A 點坐標為 $(-3, 0)$，則此拋物線與 y 軸的交點坐標為何？

(A) $(0, \frac{9}{2})$　(B) $(0, \frac{27}{2})$

(C) $(0, 9)$　(D) $(0, 18)$



二次函數圖形與兩軸的關係如下：

二次函數圖形與 y 軸的交點

將 $x=0$ 代入二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 中，可得函數圖形與 y 軸交於 $(0, c)$。

二次函數圖形與 x 軸的交點

將 $y=0$ 代入二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 中，可得 $ax^2+bx+c=0$，也就是說二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與 x 軸的交點坐標，可由方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解求得。

1 當判別式 $b^2-4ac>0$：

搭配習作 P11 基礎題 7

方程式有兩個相異解，即二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與 x 軸交於 $\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$ 與 $\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$ 兩點，如圖 1-8。

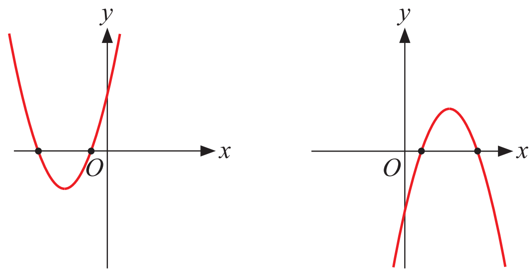


圖 1-8 與 x 軸交於兩點的拋物線

2 當判別式 $b^2-4ac=0$：

方程式恰有一解，即二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與 x 軸只交於一點，也就是頂點 $\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$，如圖 1-9。

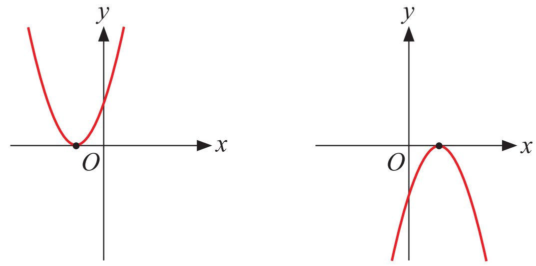


圖 1-9 與 x 軸只交於一點的拋物線

教學眉批

- 將判別式的三種情況與三種圖形對照，讓觀念與圖形整合，不僅學生較容易明白，也可以加深印象。

活化體驗站

趣味數學

- 弟弟考試得了 95 分，哥哥得分比弟弟多一點，為什麼還是被媽媽責罵？
因為哥哥考了 9.5 分。

會考觀測站－加強演練題 搭配課文

1. 二次函數 $y=x^2+11x+18$ 的圖形與 x 軸的交點為 ＿$(-2, 0)$、$(-9, 0)$＿，與 y 軸交點為 ＿$(0, 18)$＿。

2. 二次函數 $y=x^2+4x-12$ 的圖形與 x 軸交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB}=$？
8

③ 當判別式 $b^2-4ac<0$：

方程式沒有解，即二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與 x 軸沒有交點，如圖 1-10。

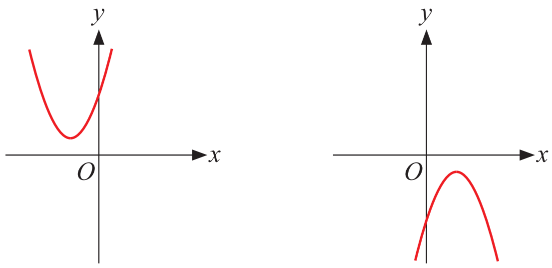


圖 1-10　與 x 軸沒有交點的拋物線

例 9 圖形與 x 軸的交點個數（未配方）

搭配習作 P11 基礎題 8

判別下列二次函數的圖形與 x 軸的交點個數：

(1) $y=x^2+x+1$　(2) $y=2x^2-x$　(3) $y=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}$

解

(1) $\because x^2+x+1=0$ 的判別式為 $1^2-4\times1\times1=-3<0$，
$\therefore$ 其圖形與 x 軸沒有交點。

(2) $\because 2x^2-x=0$ 的判別式為 $(-1)^2-4\times2\times0=1>0$，
$\therefore$ 其圖形與 x 軸有兩個交點。

(3) $\because -\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{2}=0$ 的判別式為 $1^2-4\times(-\frac{1}{2})\times(-\frac{1}{2})=0$，
$\therefore$ 其圖形與 x 軸恰有一個交點。

教學眉批

- 教師亦可先配方，再利用圖形的特性作判別，藉此讓學生明白，此步驟的繁瑣，來說明這樣的方法在某些題型上比較不適合。

基會試題

- 99 基測 II 第 17 題
- 100 基測 I 第 19 題

隨堂練習

下列哪些二次函數的圖形與 x 軸恰有一個交點？一一檢查後並勾選。

☐ (1) $y=x^2-2x+4$　☐ (2) $y=x^2+5x$

☑ (3) $y=9x^2+6x+1$　☑ (4) $y=-2x^2-3x-\frac{9}{8}$

(1) $\because x^2-2x+4=0$ 的判別式為
$(-2)^2-4\times1\times4=-12<0$，
$\therefore$ 圖形與 x 軸沒有交點。

(2) $\because x^2+5x=0$ 的判別式為
$5^2-4\times1\times0=25>0$，
$\therefore$ 圖形與 x 軸有 2 個交點。

(3) $\because 9x^2+6x+1=0$ 的判別式為
$6^2-4\times9\times1=0$，
$\therefore$ 圖形與 x 軸恰有 1 個交點。

(4) $\because -2x^2-3x-\frac{9}{8}=0$ 的判別式為
$(-3)^2-4\times(-2)\times(-\frac{9}{8})=0$，
$\therefore$ 圖形與 x 軸恰有 1 個交點。

100 基測 I 第 19 題　搭配例 9

- ((D)) 坐標平面上，二次函數 $y=x^2-6x+3$ 的圖形與下列哪一個方程式的圖形沒有交點？
(A) $x=50$　(B) $x=-50$　(C) $y=50$　(D) $y=-50$

教學眉批

- 例題 10 雖然可展開平方式後用判別式來判別，但還是利用圖形的特性作判別較適宜，尤其像第 (2)、(3) 小題有分數時更不適合用判別式。
- 本教材於此強調利用圖形特性來解題的概念，是希望強化學生對於二次函數與其圖形間的關聯。
- 隨堂練習第 1 題中，若要用判別式作判別，可先求出 b、c 的值，再算判別式，但因題目不求 b、c 的值，還是以圖形的特性作判別較適合。

基會試題

- 98 基測 I 第 31 題
- 100 聯測第 32 題

轉Q 關鍵提問

- 隨堂 1，b、c 的值為何？
  答：$b=8$、$c=-5$。

二次函數圖形與 x 軸的相交情形，除了可用判別式來判別外，當可以確定圖形頂點與開口方向時，也可利用其圖形的特性來判別。

例 10 圖形與 x 軸的交點個數（已配方）

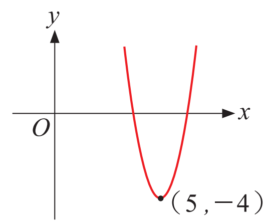
搭配習作 P11 基礎題 8

判別下列二次函數的圖形與 x 軸的交點個數：

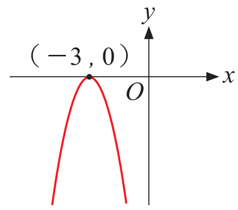
(1) $y=2(x-5)^2-4$　(2) $y=-\frac{3}{2}(x+3)^2$　(3) $y=-\frac{3}{4}(x+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}$

解

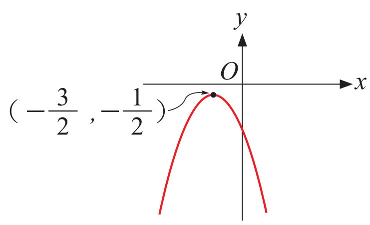
(1) $y=2(x-5)^2-4$ 圖形的頂點 $(5,-4)$ 在 x 軸下方，開口向上，因此其圖形與 x 軸會有兩個交點。



(2) $y=-\frac{3}{2}(x+3)^2$ 圖形的頂點 $(-3,0)$ 恰在 x 軸上，因此其圖形與 x 軸恰有一個交點。



(3) $y=-\frac{3}{4}(x+\frac{3}{2})^2-\frac{1}{2}$ 圖形的頂點 $(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2})$ 在 x 軸下方，開口向下，因此其圖形與 x 軸沒有交點。



隨堂練習

1. 已知二次函數 $y=-2(x+a)^2+b$ 的頂點為 $(2,3)$，求其圖形與 x 軸的交點個數。
   ∵圖形的開口向下，且頂點 $(2,3)$ 在 x 軸上方，
   因此圖形與 x 軸有 2 個交點。
2. 求二次函數 $y=3(x-h)^2$ 的圖形與 x 軸的交點個數。
   ∵頂點 $(h,0)$ 恰在 x 軸上，
   因此圖形與 x 軸恰有 1 個交點。

98 基測 I 第 31 題　搭配例 10

- (D) 下列哪一個函數，其圖形與 x 軸有兩個交點？
  (A) $y=17(x+83)^2+2274$
  (B) $y=17(x-83)^2+2274$
  (C) $y=-17(x-83)^2-2274$
  (D) $y=-17(x+83)^2+2274$

補給站 函數繪圖軟體

GeoGebra 數學軟體是一個結合動態幾何、代數與微積分的數學軟體，是由美國 佛羅里達州 大西洋大學（Florida Atlantic University）的數學教授 Markus Hohenwarter 所設計。這套軟體可以畫出點、直線、圓與多邊形等圖形，也可以直接在直角坐標系中輸入點坐標、方程式與函數得到圖形。

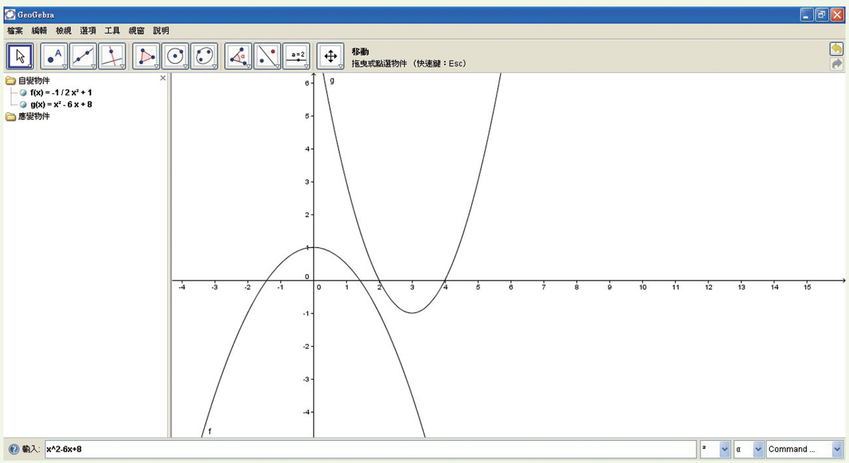
GeoGebra 數學軟體繪製二次函數圖形的方法如下：

一、進入 GeoGebra；

二、在下方 輸入 框內輸入二次函數。例如：

(1) 輸入 $f(x)=-1/2\ x\text{^}2+1$，按 ENTER，得到 $y=f(x)=-\frac{1}{2}x^2+1$ 的二次函數圖形。

(2) 輸入 $g(x)=x\text{^}2-6x+8$，按 ENTER，得到 $y=g(x)=x^2-6x+8$ 的二次函數圖形。（電腦上常用「^」表示次方的運算）



同學亦可試著輸入其他函數，認識一些未學過函數的圖形，例如：$f(x)=x^3$、$f(x)=\sqrt{x}$ 等。

以上資料改編自：GeoGebraWiki 中文版

http://www.geogebra.org/en/wiki/index.php/%E4%B8%AD%E6%96%87

取得安裝軟體與說明，可參考上面網站。

教學眉批

- 輸入 $f(x)=sqrt(x)$ 按 *ENTER* 得到 $y=f(x)=\sqrt{x}$ 的圖形。
- *sqrt* 代表 *square root*（平方根）的縮寫。

會考觀測站－基礎演練題 搭配例 10

1. 二次函數 $y=\frac{1}{3}(x-\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}$ 的圖形向下平移 2 個單位後，其圖形與 x 軸有幾個交點？若再向上平移 k 個單位後，其圖形與 x 軸恰有一個交點，則 $k=$？
2 個交點，$k=\frac{1}{4}$

2. 已知 $ak>0$，則二次函數 $y=a(x-1)^2+k$ 的圖形與 x 軸是否有交點？沒有交點

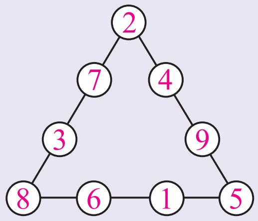
備課教學資源

- 免試基礎講堂 1-2
- 隨堂輕鬆考第 8 回
- 免試精熟本 1-2

活化體驗站

趣味數學

■ 如下圖，將 1～9 的數字填入圓圈中，使每邊的數字和皆相等，且每邊數字的平方和也相等。



重點回顧

❶ 最大值或最小值：

形如 $y=a(x-h)^2+k$ 的二次函數，有最大值或最小值：

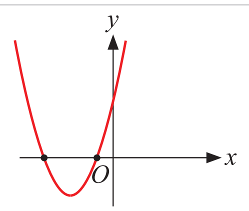
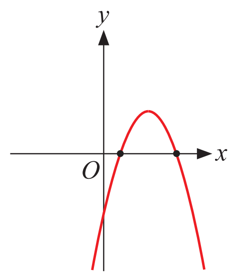
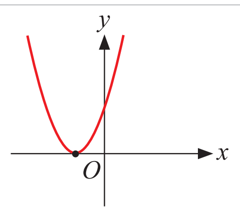
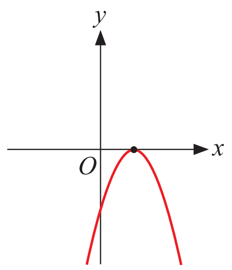
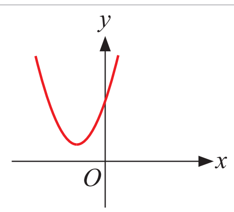
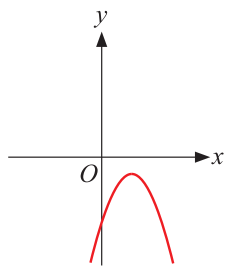
(1) 當 $a>0$ 時，圖形開口向上，頂點 (h,k) 為最低點；在 $x=h$ 時，函數 y 有最小值 k。

(2) 當 $a<0$ 時，圖形開口向下，頂點 (h,k) 為最高點；在 $x=h$ 時，函數 y 有最大值 k。

❷ 二次函數與兩軸的交點：

(1) 二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與 y 軸恰交於一點 $(0,c)$。

(2) 二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形與 x 軸相交的情形：

判別式	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
與 x 軸的交點坐標	交於兩點：$\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$、$\left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},0\right)$	交於一點：$\left(-\frac{b}{2a},0\right)$	沒有交點
圖形	 	 	 

99 基測 I 第 27 題　搭配自評第 1 題

■ ((D)) 坐標平面上，若移動二次函數 $y=2(x-175)(x-176)+6$ 的圖形，使其與 x 軸交於兩點，且此兩點的距離為 1 單位，則移動方式可為下列哪一種？

(A) 向上移動 3 單位　　(B) 向下移動 3 單位

(C) 向上移動 6 單位　　(D) 向下移動 6 單位

1-2自我評量

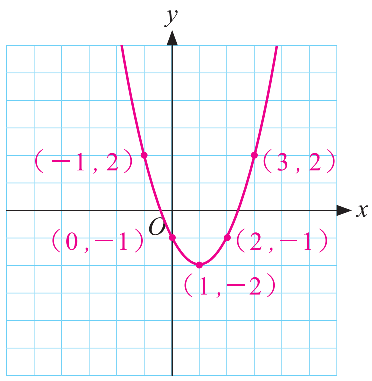
課 P34 例 1

1 描繪下列二次函數的圖形，並求此圖形的頂點坐標、對稱軸及開口方向：

(1) $y=x^2-2x-1$

$y=x^2-2x-1$
$=(x^2-2x+1-1)-1$
$=(x-1)^2-1-1$
$=(x-1)^2-2$

x	…	-1	0	1	2	3	…
y	…	2	-1	-2	-1	2	…



頂點坐標：$(1,-2)$

對稱軸：$x=1$

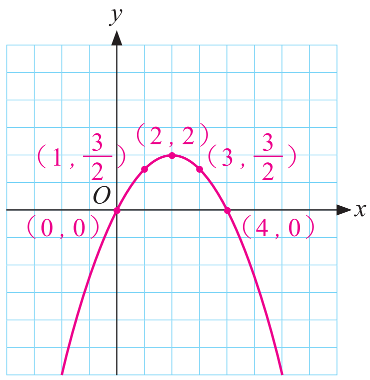
開口方向：開口向上

課 P36、37 例 3、4

(2) $y=-\frac{1}{2}x^2+2x$

$y=-\frac{1}{2}x^2+2x$
$=-\frac{1}{2}(x^2-4x)$
$=-\frac{1}{2}(x^2-4x+4-4)$
$=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$

x	…	0	1	2	3	4	…
y	…	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	0	…



頂點坐標：$(2,2)$

對稱軸：$x=2$

開口方向：開口向下

基會試題
- 99 基測 I 第 27 題
- 100 基測 II 第 29 題

教學眉批
- 學生進行繪圖時，宜提醒學生要配合所選的點來畫兩軸的位置，才不會讓所描的點跑出方格外，且有的圖形可酌量增描一、兩組對稱點，繪圖時才不會有太大的誤差。

會考觀測站－基礎演練題　搭配自評第 1 題

- (C) 在坐標平面上，二次函數 $y=-3x^2+6x$ 圖形的頂點與原點的距離為 d，則 d 的範圍為何？
  (A) $2<d<2.5$
  (B) $2.5<d<3$
  (C) $3<d<3.5$
  (D) $3.5<d<4$

備課教學資源
- 會考 100 分 1-2
- 會考基礎卷 1-2
- 會考精熟卷 1-2
- 段考精選試題 1-2

轉Q 關鍵提問

▪ 自評 2，二次函數的圖形有最高點 $(-\frac{1}{2}, 2)$，表示在 x 的值為多少時，函數 y 會得到最大值或最小值為何？

答：在 $x=-\frac{1}{2}$ 時，函數 y 有最大值 2。

教學眉批

▪ 提醒學生，若知道二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 圖形的對稱軸時，即表示知道頂點 (h, k) 的 x 坐標。

▪ 提醒學生求二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 的最大值或最小值時，一定要先化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式。

2 若二次函數 $y=ax^2-x+c$ 的最高點為 $(-\frac{1}{2}, 2)$，求 a 及 c 的值。

課 P38 例 5

∵函數有最高點 $(-\frac{1}{2}, 2)$，且 x^2 的係數為 a，

∴可令 $y=a(x+\frac{1}{2})^2+2=ax^2+ax+\frac{a}{4}+2$，

故對照原二次函數的係數可得 $a=-1$、$c=-\frac{1}{4}+2=\frac{7}{4}$。

答：$a=-1$、$c=\frac{7}{4}$。

3 將二次函數 $y=-2x^2$ 的圖形平移後，可得 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形，其對稱軸為 $x=3$，且通過坐標平面上的點 $(-1, 6)$，求 c 的值。

課 P39 隨堂

∵$y=ax^2+bx+c$ 圖形的對稱軸為 $x=3$，

且由 $y=-2x^2$ 的圖形平移而得，

∴可令 $y=-2(x-3)^2+k$，

將 $(-1, 6)$ 代入 $y=-2(x-3)^2+k$，可得 $k=38$，

因此函數為 $y=-2(x-3)^2+38=-2x^2+12x+20$，

故對照原二次函數的係數可得 $c=20$。

答：20。

4 求下列二次函數的最大值或最小值，並寫出 x 的值為多少時，y 會得到最大值或最小值。

課 P40、42 例 6、7

(1) $y=\frac{3}{4}(x-7)^2$

∵圖形的開口向上，

又頂點 $(7, 0)$ 為最低點，

∴在 $x=7$ 時，

函數 y 有最小值 0。

(2) $y=4(x+\frac{2}{3})^2-3$

∵圖形的開口向上，

又頂點 $(-\frac{2}{3}, -3)$ 為最低點，

∴在 $x=-\frac{2}{3}$ 時，

函數 y 有最小值 -3。

(3) $y=-3x^2+24x-46$

$y=-3x^2+24x-46$

$=-3(x-4)^2+2$

∵$-3(x-4)^2+2\leq 2$，

∴在 $x=4$ 時，

函數 y 有最大值 2。

(4) $y=x^2-5x+4$

$y=x^2-5x+4$

$=(x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}$

∵$(x-\frac{5}{2})^2-\frac{9}{4}\geq -\frac{9}{4}$，

∴在 $x=\frac{5}{2}$ 時，

函數 y 有最小值 $-\frac{9}{4}$。

會考觀測站－精熟演練題　搭配自評第 2、4 題

1. 已知二次函數 $y=x^2+ax+3$ 有最小值為 -1，則 $a=$？ ± 4

2. 當 a 為何數時，二次函數 $y=ax^2-4x+a$ 有最大值 3 呢？ -1

5 已知二次函數 $y=3x^2+2x-1$ 的圖形與 y 軸交於 A 點，與 x 軸交於 B、C 兩點，求： 課 P43 例 8

(1) A 點坐標。

(2) $\overline{BC}$ 的長度。

(1)將 $x=0$ 代入函數得 $y=-1$，
故圖形與 y 軸交於 $A(0,-1)$。

(2)將 $y=0$ 代入函數得 $3x^2+2x-1=0$
$(3x-1)(x+1)=0$，
$x=\frac{1}{3}$ 或 $x=-1$，
∴圖形與 x 軸交於 $B(\frac{1}{3},0)$、$C(-1,0)$，
故 $\overline{BC}=\left|\frac{1}{3}-(-1)\right|=\frac{4}{3}$。

答：(1) $(0,-1)$，(2) $\frac{4}{3}$。

6 判別下列二次函數的圖形與 x 軸的交點個數： 課 P45、46 例 9、10

(1) $y=2x^2+3$

∵圖形的開口向上
且頂點 $(0,3)$
在 x 軸上方，
∴圖形與 x 軸沒有交點。

(2) $y=x^2-3x+1$

∵ $x^2-3x+1=0$ 的判別式為
$(-3)^2-4\times1\times1=5>0$，
∴圖形與 x 軸有 2 個交點。

(3) $y=-2(x+3)^2-5$

∵圖形的開口向下，
且頂點 $(-3,-5)$
在 x 軸下方，
∴圖形與 x 軸沒有交點。

(4) $y=9x^2-12x+4$

∵ $9x^2-12x+4=0$ 的判別式為
$(-12)^2-4\times9\times4=0$，
∴圖形與 x 軸恰有 1 個交點。

教學眉批

■ 若二次函數圖形和 x 軸交於 $(\alpha,0)$、$(\beta,0)$，則二次函數方程式為 $y=a(x-\alpha)(x-\beta)$。

■ 第 6 題(1)也可利用觀察函數圖形的最低點來求解。
〈另解〉
∵圖形的開口向上，且頂點 $(0,3)$ 在 x 軸上方，
∴圖形與 x 軸沒有交點。

會考觀測站－基礎演練題　搭配自評第 5 題

■ 如圖，二次函數 $y=x^2-2x-3$ 的圖形交 x 軸於 A、B 兩點，交 y 軸於 C 點，求：

(1) A 點坐標。

(2) C 點坐標。

(3) 頂點 D 坐標。

(1) $(-1,0)$　(2) $(0,-3)$　(3) $(1,-4)$