 教學時數

■ 10 小時

活動 1 由具體情境理解二次函數的意義，並認識二次函數的數學樣式。

 教學眉批

- 函數的意義雖然七下已學習過，老師仍宜舉例複習。
- 由一次函數的意義引入二次函數的意義，其 x^2 項的係數不為 0，仍宜強調。

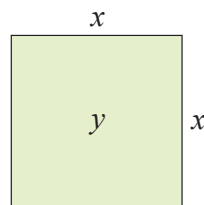
1-1 二次函數的圖形

1 認識二次函數

對應能力指標 9-a-01

在七年級時，我們曾學過形如 $y=f(x)=ax+b$ ，其中 $a \neq 0$ 且 x 的最高次數為 1，稱為一次函數，例如： $y=f(x)=5x$ 、 $y=f(x)=3x-5$ 、……等。當 $a=0$ 時，形如 $y=f(x)=b$ 的函數，稱為常數函數，例如： $y=f(x)=0$ 、 $y=f(x)=2$ 、……等。那麼，除了上述的函數之外，還有其他的函數嗎？

右圖為一個邊長 x 的正方形，若其面積為 y ，則可得 x 、 y 的關係式 $y=x^2$ 。例如：當 $x=1$ ， $y=1^2=1$ ； $x=2$ ， $y=2^2=4$ ；……等。



我們取整數作為 x 值，然後求出對應的 y 值，以列表方式呈現 x 、 y 兩變數的對應表如下：

x	1	2	3	4	5	...
y	1	4	9	16	25	...

從上表可知，當 $y=x^2$ 時，給定一個自變數 x 的值，就恰好可得到一個應變數 y 的值，故 y 是 x 的函數。

我們對於形如 $y=f(x)=ax^2+bx+c$ ，其中 $a \neq 0$ 且 x 的最高次數為 2，稱為**二次函數**，例如： $y=f(x)=x^2$ 、 $y=f(x)=-x^2+1$ 、 $y=f(x)=4x^2+x-5$ ，都是二次函數。像 $y=f(x)=-2(x+1)^2-8$ 經過化簡展開後，可以整理成 $y=f(x)=-2x^2-4x-10$ ，也是二次函數。

 備課教學資源

- 補救教學·計算 Basic 1-1
- 免試加強類題本 1-1



會考觀測站 — 基礎演練題 搭配例 1

1. 已知函數 $f(x)=x^2-200x+199$ ，求 $f(1)+f(199)$ 的值。0
2. 設 $f(x)=2(x-a)^2+b$ ，若 $f(3)-f(0)=-18$ ，則 $a=?$ 3
3. 已知函數 $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ ，求 $f(1)+f(2)+f(3)+\dots+f(20)$ 的值。

$\frac{20}{21}$

隨堂練習

下列哪些是常數函數？哪些是一次函數？哪些是二次函數？

(1) $y=f(x)=2-x$

(2) $y=f(x)=3$

(3) $y=f(x)=-3x-2x^2+1$

(4) $y=f(x)=x(x+1)$

(5) $y=f(x)=-6x$

(6) $y=f(x)=-0.2(x+5)^2$

常數函數：(2)

一次函數：(1)、(5)

二次函數：(3)、(4)、(6)

我們常用像 $y=f(x)$ 這一類函數符號來表達自變數 x 與應變數 y 的關係，也用 $f(a)$ 表示函數 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 時所對應的函數值。

例如：函數 $y=f(x)=4x-3$ ，當 $x=2$ 時，其函數值為 $f(2)=4\times 2-3=5$ 。

例 1 函數值

搭配習作 P4 基礎題 1

已知函數 $g(x)=x^2+3x+2$ ，求 $g(2)$ 的值。

解 $g(2)=2^2+3\times 2+2$
 $=4+6+2$
 $=12$ 。

隨堂練習

已知函數 $f(x)=-3x^2+2$ ，求 $f(0)$ 、 $f(-1)$ 與 $f(1)$ 的值。

$$f(0)=-3\times 0^2+2=2$$

$$f(-1)=-3\times (-1)^2+2=-1$$

$$f(1)=-3\times 1^2+2=-1$$

關鍵提問

- 搭配隨堂：一次函數與常數函數的圖形都是一直線，這兩種函數都稱為什麼函數？

答：線型函數。

教學眉批

- 函數符號也常配合應變數所代表量的意義來使用，例如以 $T(x)$ 表示時間函數，以 $A(x)$ 表示面積函數。

! 基會試題

- 92 基測 II 第 7 題
- 93 基測 I 第 28 題



92 基測 II 第 7 題 搭配隨堂

- (B) 已知線型函數 $f(x)=ax+b$ ，其對應關係如右表，求 $\beta+r=?$

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12

x	...	1	2	3	4	...
$f(x)$...	3	β	3	r	...



備課教學資源

- 隨堂輕鬆考第 1 回

活動2 以描點方式繪製 $y=ax^2$ 的圖形，並了解其圖形的頂點坐標、開口方向、開口大小、最高(低)點與對稱軸。

教學眉批

- 表格中左右兩邊有「…」的記號，教師宜提醒學生它所代表的含意，因為它跟後面二次函數的圖形開口有極密切的關係。
- 由圖 1-1 可知：二次函數的圖形不像線型函數的圖形那麼簡單(描兩點就可以將圖形定下來)，因此有必要進一步描較多的點來觀察。

2 $y=ax^2$ 的圖形

對應能力指標 9-a-02

在第二冊中，我們用描點的方式探討一次函數的圖形，發現其圖形為一條直線，同樣的，我們也利用描點的方式來探討二次函數的圖形。現在將先討論二次函數 $y=ax^2+bx+c$ 中 $a=1$ 、 $b=c=0$ ，即 $y=x^2$ 的情形，當作探討的起點。

首先選擇一些簡易的整數作為 x 值，然後求出對應的 y 值，以列表方式呈現如下：

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...	16	9	4	1	0	1	4	9	16	...

接著將上表中數對 (x, y) 所對應的點描到坐標平面上。為使圖形準確起見，本節中的圖形都會盡可能畫在方格紙上，如圖 1-1。在本章中，若無特別說明，則方格紙的格子長皆為 1 個單位長。

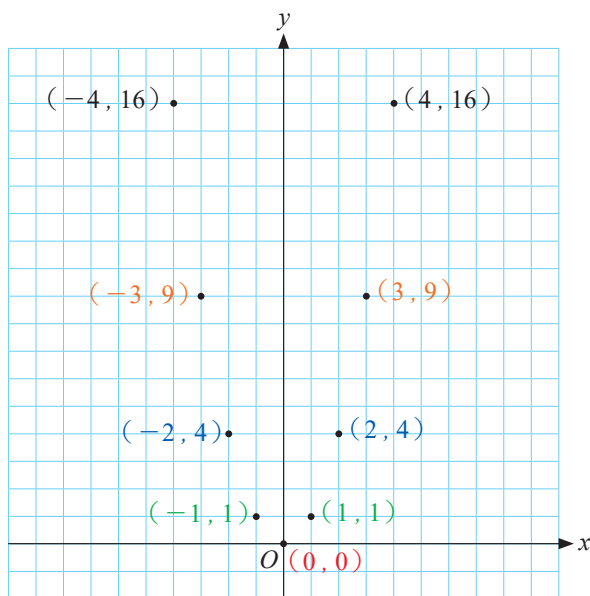


圖 1-1



會考觀測站 — 基礎演練題 搭配課文

- 二次函數 $y=x^2$ ，在 $x=a$ 時， $y=169$ ，則 $a=?$ ± 13
- 二次函數 $y=-x^2$ ，在 $x=b$ 時， $y=-3$ ，則 $b=?$ $\pm\sqrt{3}$
- 已知 A 、 B 兩點均在 $y=x^2$ 的圖形上，回答下列問題：
 - 若 A 點距離 x 軸 4 個單位，則 A 點坐標為何？ $(2, 4)$ 或 $(-2, 4)$
 - 若 B 點距離 y 軸 3 個單位，則 B 點坐標為何？ $(3, 9)$ 或 $(-3, 9)$

搭配習作 P5 基礎題 3

如果在連續整數之間找更多的 x 值，並求出對應的 y 值，將這些數對 (x, y) 所對應的點逐一描在圖 1-1 上。

如圖 1-2，當取的數對 (x, y) 愈多，描在坐標平面上的點就愈密，其圖形就會愈像是一條平滑的曲線。

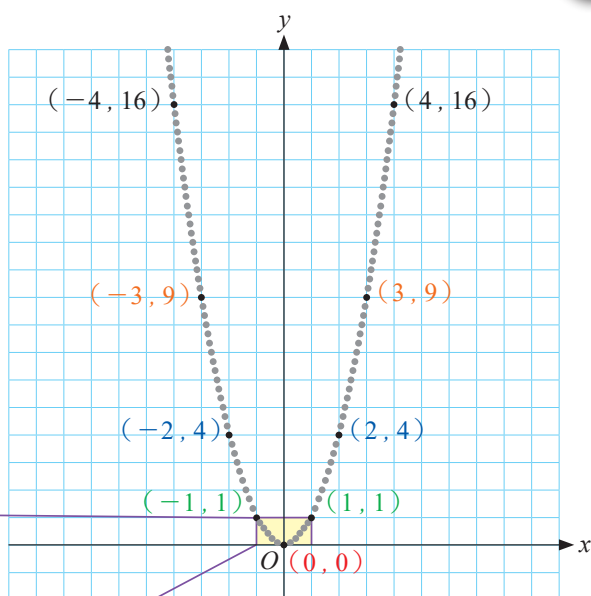
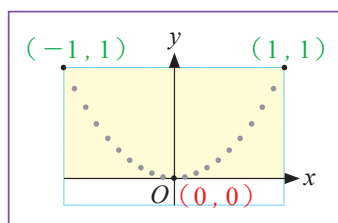


圖 1-2

事實上，二次函數的圖形就是一條平滑曲線。因此，以後我們畫二次函數圖形時，只要先描繪少數幾個點後，再將各點由左至右用平滑曲線連接起來即可。如圖 1-3，紅色曲線就是二次函數 $y=x^2$ 的圖形。

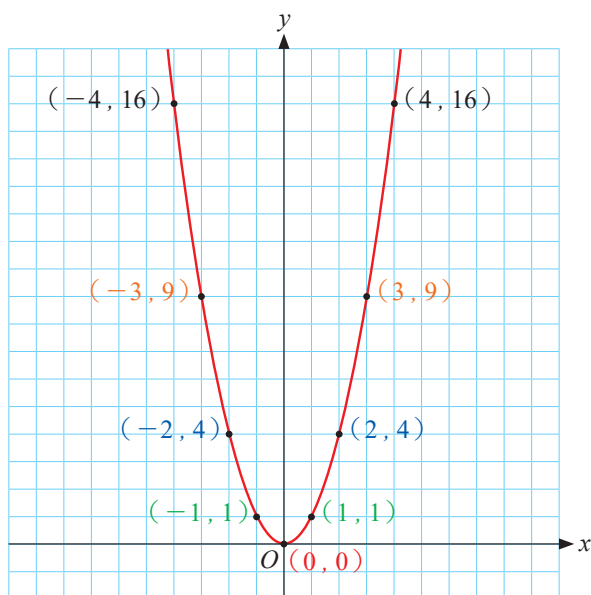


圖 1-3

由圖 1-3，可發現 $y=x^2$ 的圖形有下列特性：

- (1) 圖形是以直線 $x=0$ (y 軸) 為對稱軸的線對稱圖形。
- (2) $(0, 0)$ 為圖形的**最低點**。
- (3) 圖形從最低點往兩邊**向上延伸**，所以稱此圖形**開口向上**。

教學眉批

■ 圖 1-2 是找更多的點描在圖 1-1 上，雖然已明顯呈現出平滑曲線的樣式與感覺，但仍宜再強調「當所描的點愈密，愈可看出圖形是一條平滑的曲線。」

■ 學生可用描圖紙描下圖 1-3，對摺操作來驗證線對稱圖形。

■ 圖形的最低點、最高點、開口向上、開口向下，都是觀察圖形的現象所給與的名稱，並未給予數學上嚴謹的定義。

■ 整個圖形會一直向上延伸，與課本第 8 頁表格中左右兩邊的記號「…」相呼應。

! 基會試題

- 91 基測 II 第 17 題
- 99 基測 II 第 26 題



99 基測 II 第 26 題 搭配課文

- (A) 坐標平面上，二次函數 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形通過 A 、 B 兩點，其中 A 、 B 兩點的 x 坐標分別為 2、4。若自 A 作 y 軸的平行線，自 B 作 x 軸的平行線，且兩線交於 C 點，則 C 點坐標為何？
- (A) $(2, 8)$ (B) $(2, 2\sqrt{2})$ (C) $(4, 2)$ (D) $(4, 2\sqrt{2})$

教學眉批

- 學生可用描圖紙描下 $y = -x^2$ 的圖形，對摺操作驗證是否為線對稱圖形。
- 教師可投擲小物體讓學生觀察拋物線。
- 拋物線延伸至遠方的部分看似直線段，實際上不是，當學生有此誤解時，教師可視學生程度補充說明。
- 拋物線的最高點或最低點稱為拋物線的頂點，學生易因字意而有疑惑，教師可舉例釋疑。

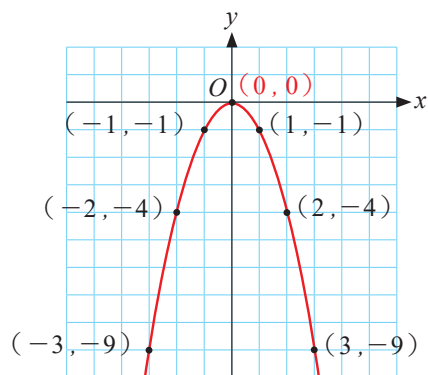
例 2 $y = -x^2$ 的繪圖

描繪二次函數 $y = -x^2$ 的圖形。

解 將 x 和所對應的 y 值列表如下：

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	-9	-4	-1	0	-1	-4	-9	...

描點並仿照 $y = x^2$ 的圖形畫法，以平滑的曲線將這些點由左至右依序連接起來，如右圖。



由例題 2 中，可發現 $y = -x^2$ 的圖形有下列特性：

- (1) 圖形是以直線 $x = 0$ (y 軸) 為對稱軸的線對稱圖形。
- (2) $(0, 0)$ 為圖形的最高點。
- (3) 圖形從最高點往兩邊向下延伸，所以稱此圖形開口向下。

不論是 $y = -x^2$ 圖形的最高點或是 $y = x^2$ 圖形的最低點都分別稱為該圖形的頂點，且對稱軸都一定會通過圖形的頂點。

當我們投擲物體時，該物體所經過的路線稱為拋物線。圖 1-4 中，籃球所經過的路線就是拋物線的一部分。事實上，所有二次函數的圖形都是拋物線。



圖 1-4



會考觀測站 — 加強演練題 搭配課文

- (C) 有關二次函數 $y = -x^2$ 圖形的敘述，下列何者錯誤？
 - (A) 圖形為拋物線
 - (B) 圖形開口向下
 - (C) 圖形有最低點
 - (D) 圖形為線對稱圖形

接著將改變 x^2 項的係數，探討形如 $y=ax^2$ ， $a \neq 0$ 的二次函數圖形，看看當 a 改變時， $y=ax^2$ 圖形的變化情形。

例 3 $y=ax^2$ 的繪圖

描繪下列二次函數的圖形，並求此圖形的頂點坐標、對稱軸及開口方向：

(1) $y=2x^2$

(2) $y=-2x^2$

解 (1) 將 x 和所對應的 y 值列表如下：

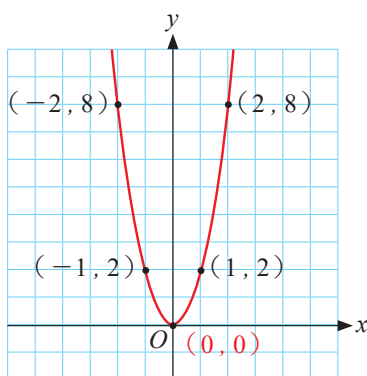
x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	8	2	0	2	8	...

描點並以平滑的曲線將這些點由左至右依序連接起來，如右圖。

頂點坐標： $(0, 0)$ 。

對稱軸：直線 $x=0$ (y 軸)。

開口方向：開口向上。



(2) 將 x 和所對應的 y 值列表如下：

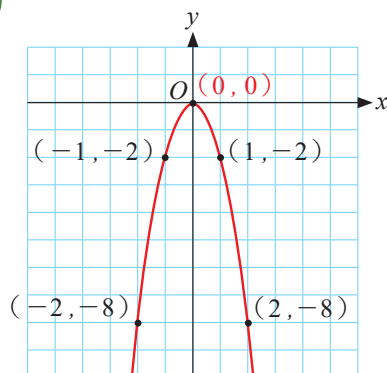
x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-8	-2	0	-2	-8	...

描點並以平滑的曲線將這些點由左至右依序連接起來，如右圖。

頂點坐標： $(0, 0)$ 。

對稱軸：直線 $x=0$ (y 軸)。

開口方向：開口向下。



教學眉批

■ 本教材先介紹二次函數 $y=ax^2$ 與 $y=ax^2+k$ 的形式，接著介紹將 x^2 改變為 $(x-h)^2$ ，形如 $y=a(x-h)^2$ 與 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，1-2 節介紹 $y=ax^2+bx+c$ 的形式。

■ 例題 3 的第(1)小題講解後，可先讓學生練習隨堂練習第(1)小題。

■ 國中階段學到的拋物線只有開口向上及開口向下兩種，到高中會學到開口向右及開口向左的拋物線，但其方程式為 $x=ay^2$ 的形式， y 已非 x 的函數。



會考觀測站 — 加強演練題 搭配例 3

■ 若二次函數 $y=ax^2$ 的圖形通過坐標 $(-2, 8)$ ，而 $y=bx^2$ 的圖形通過坐標 $(a, -20)$ ，求 $a+b=?$

教學眉批

- 學生常見的畫圖，是將點與點用直線連接，導致靠近頂點的兩側像個 V 字，缺乏圓潤的曲線，宜多提醒學生注意。
- 初畫拋物線，學生會有畫不好的挫折感，宜多給學生鼓勵。
- 教師可待學生熟練之後，才給予非整數的數字練習。
- 教師可利用課本附件 8 的方格紙，讓學生多做練習。

隨堂練習

描繪下列二次函數的圖形，並求此圖形的頂點坐標、對稱軸及開口方向：

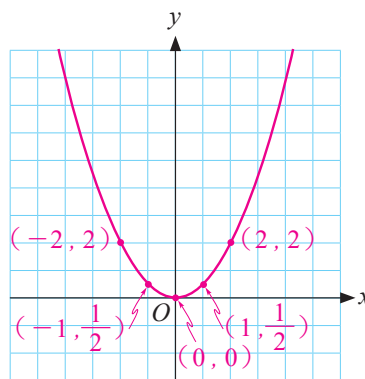
$$(1) y = \frac{1}{2}x^2$$

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	...

頂點坐標： (0, 0)

對稱軸： $x=0$ (y 軸)

開口方向： 開口向上



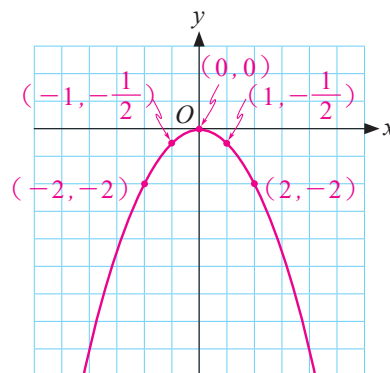
$$(2) y = -\frac{1}{2}x^2$$

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	...

頂點坐標： (0, 0)

對稱軸： $x=0$ (y 軸)

開口方向： 開口向下



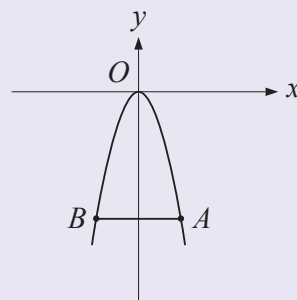
會考觀測站 — 基礎演練題

搭配隨堂

- (B) 如圖， A 、 B 分別為 $y = -\frac{3}{2}x^2$ 上的兩點，且 $\overline{AB} \perp y$ 軸。

若 $\overline{AB} = 4$ ，則直線 AB 的方程式為何？

- (A) $y = -3$ (B) $y = -6$
 (C) $y = -9$ (D) $y = -36$

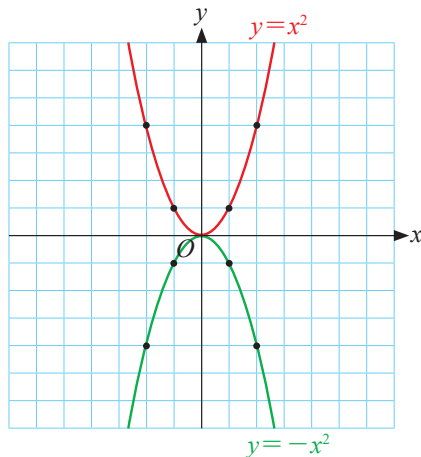




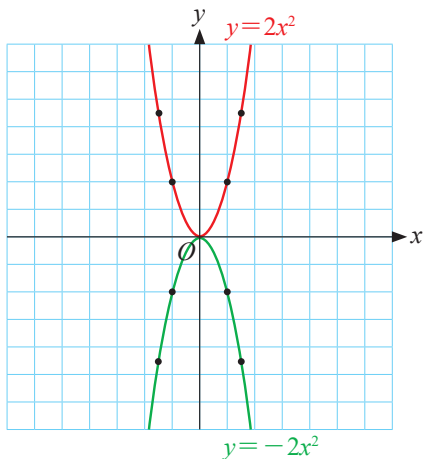
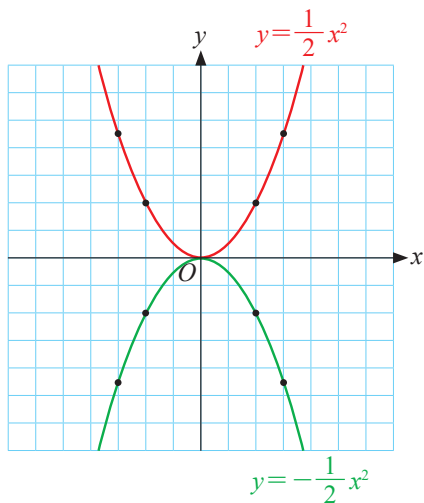
探索活動 二次函數圖形的上下翻轉

1. 利用附件 1、2，觀察右圖中 $y=x^2$ 和 $y=-x^2$ 這兩個圖形的形狀與開口方向。如果以 x 軸為對稱軸，將 $y=-x^2$ 的圖形往上摺疊，可以和 $y=x^2$ 的圖形疊合嗎？

兩圖形的形狀相同，開口方向相反，故可完全疊合。



2. 利用附件 3~6，觀察例題 3 和隨堂練習的圖形，它們以 x 軸為對稱軸，往上摺疊後會疊合嗎？



兩圖形的形狀相同，開口方向相反，故可完全疊合。

教學眉批

- 提醒學生，透明片仍要使用，不要遺失。
- 教師可補充 $y=x^2$ 與 $y=-x^2$ 兩圖形的組合圖形，仍為線對稱圖形，且此圖形以兩軸為對稱軸。
- 教師可引導學生觀察 x^2 項係數的絕對值。

關鍵提問

- 探索 2，將 $y=2x^2$ 的圖形以 x 軸為對稱軸，向下摺疊後，可得新圖形的二次函數為何？
答： $y=-2x^2$ 。

活化體驗站

趣味數學

- 0~10 的數字中，哪個數字不開車？
10，因為酒(9)後不開車。



會考觀測站 — 精熟演練題 搭配探索

- 將 $y=-2x^2$ 的圖形以 x 軸為對稱軸，向上摺疊後，可得新圖形的二次函數，且新圖形通過 $A(-1, a)$ 與 $B(-a, b)$ 兩點，求 \overline{AB} 。

$\sqrt{37}$

教學眉批

- 教材歸納 $y=ax^2$ 的圖形時，共舉了 6 個例子，如圖 1-5。
- 教師可補充圖 1-5 中的 6 個二次函數所組合的圖形，仍為線對稱圖形，其對稱軸為兩軸。

把前面所畫的二次函數圖形，都畫在同一個坐標平面上，如圖 1-5。這些函數圖形都是以 $(0, 0)$ 為頂點，直線 $x=0$ (y 軸) 為對稱軸的函數圖形，其中「 $y=2x^2$ 與 $y=-2x^2$ 」、「 $y=x^2$ 與 $y=-x^2$ 」、「 $y=\frac{1}{2}x^2$ 與 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 」分別是以 $y=0$ (x 軸) 為對稱軸的線對稱圖形。

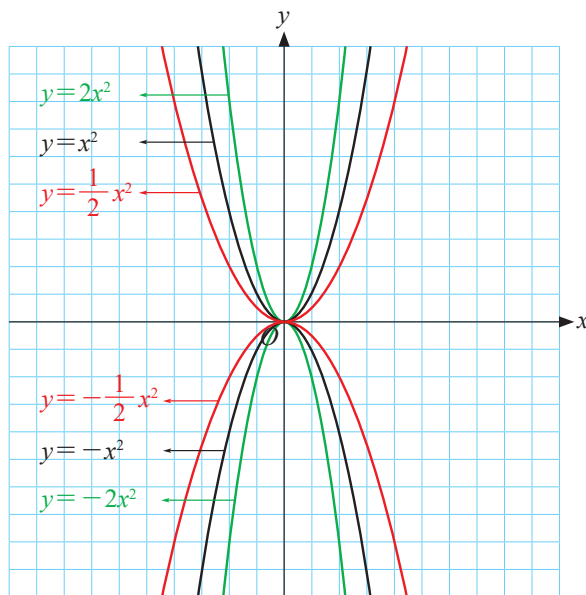


圖 1-5

- 此處新增比較圖形開口大小的說明，加強學生對圖形開口大小的概念。

當二次函數圖形有共同頂點，且開口方向相同，就可以比較出它們的開口大小。如圖 1-6，拿一把直尺平行 x 軸放上去，可明顯看出 $\overline{AF} > \overline{BE} > \overline{CD}$ 。所以 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形開口大於 $y=x^2$ 的圖形開口，而 $y=x^2$ 的圖形開口大於 $y=2x^2$ 的圖形開口。

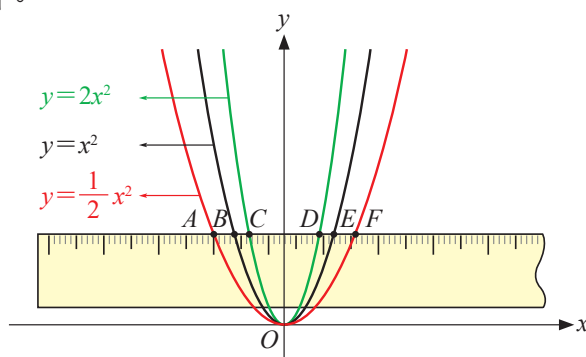


圖 1-6



會考觀測站 — 基礎演練題 搭配課文

- 二次函數 $y=ax^2$ 與 $y=bx^2$ 的圖形開口方向相反，則二次函數 $y=abx^2$ 的圖形開口方向為何？

開口向下

圖 1-5 與圖 1-6 的函數圖形有下列特性：

- (1) 「 $y=2x^2$ 與 $y=-2x^2$ 」、「 $y=x^2$ 與 $y=-x^2$ 」、「 $y=\frac{1}{2}x^2$ 與 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 」的開口大小分別相等。
- (2) $y=2x^2$ 、 $y=x^2$ 與 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形開口都向上，頂點是最低點；這三個圖形以 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的開口最大， $y=2x^2$ 的開口最小。
- (3) $y=-2x^2$ 、 $y=-x^2$ 與 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形開口都向下，頂點是最高點；這三個圖形以 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的開口最大， $y=-2x^2$ 的開口最小。

二次函數 $y=ax^2$ 的圖形

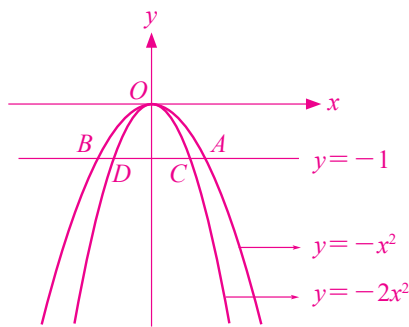
形如 $y=ax^2$ 的二次函數圖形，都是以 $(0, 0)$ 為頂點，直線 $x=0$ (y 軸) 為對稱軸的拋物線，其圖形的特性如下：

- (1) 當 $a>0$ 時，圖形的開口向上，頂點是最低點。
- (2) 當 $a<0$ 時，圖形的開口向下，頂點是最高點。
- (3) $|a|$ 愈小，其圖形開口愈大。

隨堂練習

在坐標平面上，直線 $y=-1$ 與 $y=-x^2$ 的圖形交於 A 、 B 兩點，直線 $y=-1$ 與 $y=-2x^2$ 的圖形交於 C 、 D 兩點，比較 \overline{AB} 、 \overline{CD} 長度的大小。

$\because y=-x^2$ 與 $y=-2x^2$ 的頂點都是 $(0, 0)$ ，
又 $|-2| > |-1|$ ，
 \therefore 可知圖形的開口向下且開口愈來愈大，
依題意可圖示如右，
故 $\overline{AB} > \overline{CD}$ 。



會考觀測站 — 基礎演練題 搭配隨堂

- 在坐標平面上，直線 $y=1$ 與 $y=x^2$ 的圖形交於 A 、 B 兩點，直線 $y=2$ 與 $y=2x^2$ 的圖形交於 C 、 D 兩點，比較 \overline{AB} 與 \overline{CD} 長度的大小。
 $\overline{AB} = \overline{CD}$

教學眉批

- 本頁利用例題 2、3 與隨堂練習所畫過的函數圖形，歸納出開口方向及開口大小。
- 不論二次函數的開口向上或向下，到最後開口都是非常小，而此處比較的開口大小是指固定一個距離來比較其水平截口的大小。

- 隨堂練習亦可求出兩條線段的長度，再比較其大小。

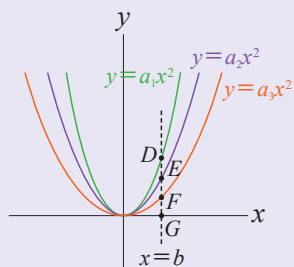
關鍵提問

- 隨堂， \overline{AB} 、 \overline{CD} 的長度為何？
答： $\overline{AB}=2$ 、 $\overline{CD}=\sqrt{2}$ 。

教學眉批

■ 比較二次函數 $y = a_1x^2$ 、 $y = a_2x^2$ 、 $y = a_3x^2$ 的開口大小，也就是比較 $|a_1|$ 、 $|a_2|$ 、 $|a_3|$ 的值，若絕對值愈小，則圖形開口愈大。

■ 另一種拋物線與垂直線到 x 軸截距的比較如下：設二次函數 $y = a_1x^2$ 、 $y = a_2x^2$ 、 $y = a_3x^2$ ，其中 $0 < a_3 < a_2 < a_1$ ，若直線 $x = b$ 分別交此三個函數於 D 、 E 、 F 點，交 x 軸於 G 點，則 $\overline{DG} > \overline{EG} > \overline{FG}$ ，圖解如下。



例 4 $y = ax^2$ 的圖形比較

寫出下列二次函數圖形的開口方向、頂點坐標與對稱軸，並比較其開口大小：

甲： $y = 2x^2$ 乙： $y = -2x^2$ 丙： $y = -\frac{5}{4}x^2$ 丁： $y = \frac{9}{4}x^2$

- 解**
- (1) \because 甲、丁兩個函數 x^2 的係數為正數，
 \therefore 甲、丁的圖形開口向上。
 而乙、丙兩個函數 x^2 的係數為負數，
 \therefore 乙、丙的圖形開口向下。
- (2) 各圖形均以 $(0, 0)$ 為頂點，且均以 $x = 0$ (y 軸) 為對稱軸。
- (3) $\because x^2$ 的係數的絕對值愈小，其圖形開口愈大，
 $|\frac{5}{4}| < |2| = |-2| < |\frac{9}{4}|$ ，
 故開口大小為：丙 $>$ 甲 = 乙 $>$ 丁。

隨堂練習

寫出下列二次函數圖形的開口方向、頂點坐標與對稱軸，並比較其開口大小：

甲： $y = -\frac{2}{3}x^2$ 乙： $y = \frac{1}{3}x^2$ 丙： $y = \frac{2}{3}x^2$ 丁： $y = -\frac{4}{3}x^2$

(1)

	開口方向	頂點坐標	對稱軸
甲	開口向下	$(0, 0)$	$x = 0$ (y 軸)
乙	開口向上	$(0, 0)$	$x = 0$ (y 軸)
丙	開口向上	$(0, 0)$	$x = 0$ (y 軸)
丁	開口向下	$(0, 0)$	$x = 0$ (y 軸)

(2) 比較開口大小：乙 $>$ 甲 = 丙 $>$ 丁

備課教學資源

■ 隨堂輕鬆考第 2 回



會考觀測站 — 基礎演練題 搭配例 4

■ 已知二次函數為甲： $y = 3x^2$ 、乙： $y = bx^2$ 、丙： $y = -x^2$ ，若其開口大小為甲 $<$ 乙 $<$ 丙，且 b 為整數，則 b 的可能值為何？

2 或 -2

3 $y = ax^2 + k$ 的圖形

對應能力指標 9-a-02

接下來，觀察一些形如 $y = ax^2 + k$ ， $k \neq 0$ 的二次函數圖形。

活動3 描繪形如 $y = ax^2 + k$ 的二次函數圖形，並了解其圖形可由 $y = ax^2$ 的圖形上下平移而得。

教學眉批

- 由形如 $y = ax^2$ 的二次函數圖形經驗，描繪其他形式的二次函數圖形。
- 教師可試著進一步簡化列表，方式如下：

x	0	± 1	± 2	...
y	1	2	5	...
- 當頂點在 y 軸上時，就應強調要先找出平移後的新頂點再產生新的二次函數。如此，當頂點不在 y 軸上時，較不會產生概念上的迷思。

例5 $y = ax^2 + k$ 的繪圖 ($a > 0$)

描繪二次函數 $y = x^2 + 1$ 的圖形，並求此圖形的頂點坐標、對稱軸及開口方向。

解 將 x 和所對應的 y 值列表如下：

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	5	2	1	2	5	...

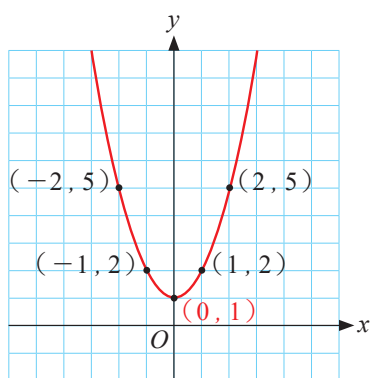
然後描點並畫平滑曲線如右圖，

由圖形可看出其特性。

頂點坐標： $(0, 1)$ 。

對稱軸：直線 $x = 0$ (y 軸)。

開口方向：開口向上。



隨堂練習

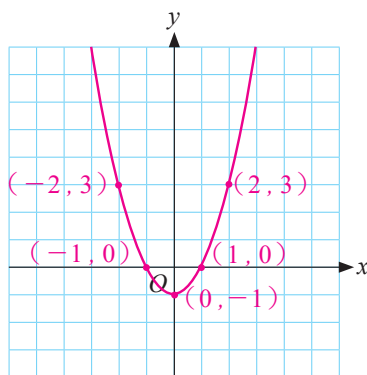
描繪二次函數 $y = x^2 - 1$ 的圖形，並求此圖形的頂點坐標、對稱軸及開口方向。

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	3	0	-1	0	3	...

頂點坐標： $(0, -1)$

對稱軸： $x = 0$ (y 軸)

開口方向： 開口向上



! 基會試題

- 90 基測 I 第 13 題
- 91 基測 I 第 3 題
- 99 基測 I 第 11 題
- 100 基測 II 第 8 題



90 基測 II 第 13 題 搭配例 5

- (C) 將兩個二次函數 $y = 2x^2 + 1$ 與 $y = 2x^2 - 1$ 畫在同一坐標平面上，下列有關這兩個函數圖形關係的敘述，哪一個是錯誤的？
 (A) 有相同的開口方向 (B) 圖形都是拋物線
 (C) 有相同的頂點坐標 (D) 有相同的對稱軸

教學眉批

- 教師說明例題6時，可酌量增描一、兩組對稱點，繪圖時，才不會有太大的誤差。

例6 $y = ax^2 + k$ 的繪圖 ($a < 0$)

描繪二次函數 $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$ 的圖形，並求此圖形的頂點坐標、對稱軸及開口方向。

解 將 x 和所對應的 y 值列表如下：

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-3	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{3}{2}$	-3	...

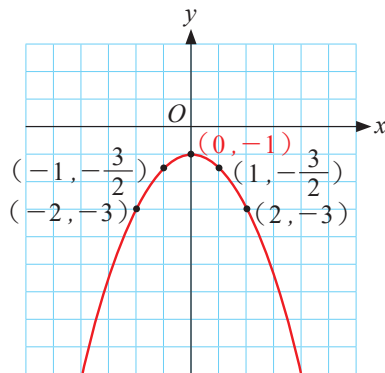
然後描點並畫平滑曲線如右圖，

由圖形可看出其特性。

頂點坐標： $(0, -1)$ 。

對稱軸：直線 $x=0$ (y 軸)。

開口方向：開口向下。



- 若學生無法做出判斷時，教師可多多利用附件8的方格紙，讓學生練習繪製此4個二次函數圖形，再做判斷。

隨堂練習

右圖中的拋物線可能為下列哪一個二次函數的圖形？(B)

(A) $y = -\frac{1}{2}x^2 - 2$

(B) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

(C) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$

(D) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2$

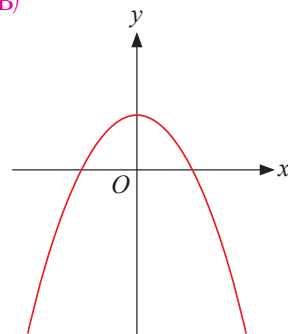
∵ 二次函數圖形的開口向下，

∴ x^2 的係數 < 0 ，

又二次函數圖形的頂點在 x 軸上方，且在 y 軸上，

故二次函數 $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$ 的頂點 $(0, 2)$ 符合，

選 (B)。



對於二次函數 $y = ax^2 + k$ ， $k \neq 0$ 的圖形，其頂點為 $(0, k)$ ，對稱軸為 $x=0$ (y 軸)，當 $a > 0$ 時，圖形開口向上；當 $a < 0$ 時，圖形開口向下。



會考觀測站 — 加強演練題 搭配例6

- 已知二次函數 $y = -3x^2 + \frac{9}{5}$ ，求此圖形的頂點到 x 軸的距離。

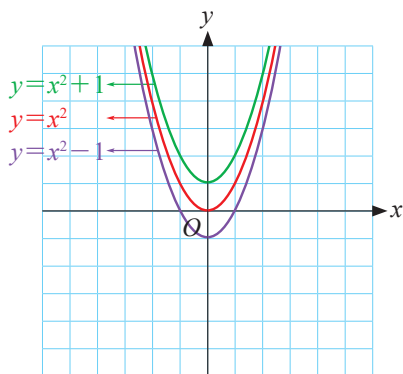
$\frac{9}{5}$



探索活動 二次函數圖形的上下平移

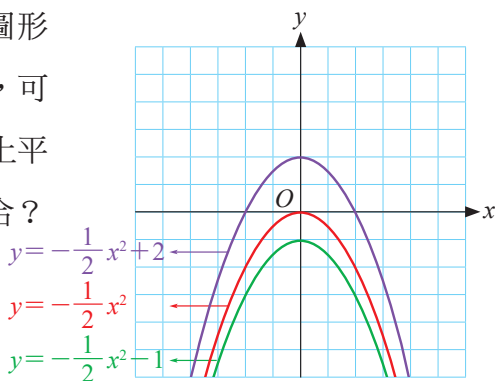
1. 利用附件 1，疊在 $y=x^2$ 的圖形上，將 $y=x^2$ 的圖形往下平移，可否與 $y=x^2-1$ 的圖形疊合？往上平移，可否與 $y=x^2+1$ 的圖形疊合？

$y=x^2$ 的圖形往上平移會與 $y=x^2+1$ 的圖形疊合，往下平移會與 $y=x^2-1$ 的圖形疊合。



2. 利用附件 4，疊在 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形上，將 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形往下平移，可否與 $y=-\frac{1}{2}x^2-1$ 的圖形疊合？往上平移，可否與 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ 的圖形疊合？

$y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形往上平移會與 $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ 的圖形疊合，往下平移會與 $y=-\frac{1}{2}x^2-1$ 的圖形疊合。



3. 在下表的空格內，填入適當文字或符號。

函數	項目	開口方向	頂點坐標	圖形的平移	對稱軸
$y=x^2+1$		向上	$(0, 1)$	由 $y=x^2$ 的圖形向上 平移 <u>1</u> 個單位可得。	$x=0$ (y 軸)
$y=x^2-1$		向上	$(0, -1)$	由 $y=x^2$ 的圖形向 <u>下</u> 平移 1 個單位可得。	$x=0$ (y 軸)
$y=-\frac{1}{2}x^2-1$		向下	$(0, -1)$	由 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形向 <u>下</u> 平移 <u>1</u> 個單位可得。	$x=0$ (y 軸)
$y=-\frac{1}{2}x^2+2$		向下	$(0, 2)$	由 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形向 <u>上</u> 平移 <u>2</u> 個單位可得。	$x=0$ (y 軸)

教學眉批

- 教師可利用附件的透明片，引導學生往上或往下平移來觀察。
- 提醒學生利用第 1、2 題中，上下平移的結果，在表格中填空，表格有助於觀察比較與歸納。

關鍵提問

- 探索 3，二次函數 $y=x^2+1$ 的圖形是由 $y=x^2-1$ 的圖形向哪個方向平移多少個單位而得？
答：向上平移 2 個單位。



會考觀測站 — 基礎演練題 搭配探索

- (D) 已知二次函數 $y=3x^2+k$ 的圖形向上平移 7 個單位後，會與 $y=ax^2+1$ 的圖形重合，則 $a+k$ 之值為何？
(A) 9 (B) -9 (C) 3 (D) -3

教學眉批

■ 教師宜適度引導學生歸納 $y=ax^2+k$ 的二次函數圖形特性。

■ 圖示不僅容易明白，還可以加強函數樣式與圖形間的連結，加深學習印象。

轉問 關鍵提問

■ 隨堂 2，二次函數 $y=2x^2+2$ 的圖形是由 $y=2x^2-3$ 的圖形向哪個方向平移多少個單位而得？

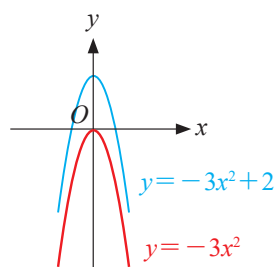
答：向上平移 5 個單位。

形如 $y=ax^2+k$ ， $k \neq 0$ 的二次函數圖形，是由 $y=ax^2$ 的圖形上下平移而得。

① $k > 0$ 時：

$y=ax^2+k$ 的圖形可由 $y=ax^2$ 的圖形向上平移 k 個單位而得。

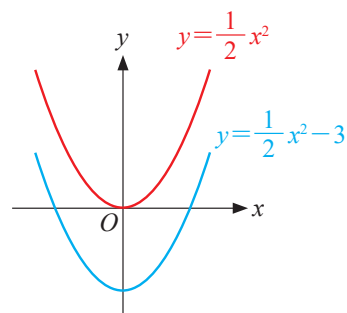
例 $y=-3x^2+2$ 的圖形可由 $y=-3x^2$ 的圖形向上平移 2 個單位而得。



② $k < 0$ 時：

$y=ax^2+k$ 的圖形可由 $y=ax^2$ 的圖形向下平移 $|k|$ 個單位而得。

例 $y=\frac{1}{2}x^2-3$ 的圖形可由 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形向下平移 3 個單位而得。



事實上，二次函數圖形上下平移時，圖形上的每一個點都會做相同的移動，因為頂點比較容易觀察，所以只要考慮頂點的平移即可。

隨堂練習

1. 若二次函數 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形向上平移 3 個單位後，可得 $y=ax^2+k$ 的圖形，則 $a=$ $-\frac{1}{2}$ ， $k=$ 3。

$\because y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形向上平移 3 個單位，可得 $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ 的圖形，

$\therefore a=-\frac{1}{2}$ 、 $k=3$ 。

2. 回答下列問題：

二次函數 $y=2x^2-3$ 圖形的頂點 A 坐標為 $(0, -3)$ ，

二次函數 $y=2x^2+2$ 圖形的頂點 B 坐標為 $(0, 2)$ ，

且頂點 A 可由頂點 B 向 下 平移 5 個單位而得，

因此二次函數 $y=2x^2-3$ 的圖形是由 $y=2x^2+2$ 的圖形

向 下 平移 5 個單位而得。

備課教學資源

■ 隨堂輕鬆考第 3 回



會考觀測站 — 精熟演練題

搭配隨堂

■ 二次函數 $y=5x^2$ 的圖形向下平移後，可得 $y=ax^2+k$ 的圖形，且圖形通過點 $(k, k+5)$ ，求 a 、 k 的值。

$a=5$ ， $k=-1$

4 $y = a(x-h)^2$ 的圖形

對應能力指標 9-a-02

活動4 描繪形如 $y = a(x-h)^2$ 的二次函數圖形，並了解其圖形可由 $y = ax^2$ 的圖形左右平移而得。

教學眉批

■ 本教材以例題 7、隨堂練習的函數圖形，來歸納形如 $y = a(x-h)^2$ 的二次函數圖形特性。

例 7 $y = a(x-h)^2$ 的繪圖

描繪下列二次函數的圖形，並求此圖形的頂點坐標、對稱軸及開口方向：

(1) $y = (x-1)^2$

(2) $y = -2(x+2)^2$

解 (1) 將 x 和所對應的 y 值列表如下：

x	...	-1	0	1	2	3	...
y	...	4	1	0	1	4	...

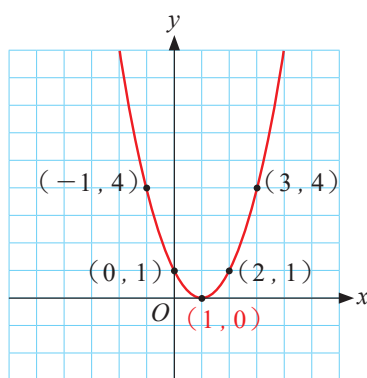
然後描點並畫平滑曲線如右圖，

由圖形可看出其特性。

頂點坐標： $(1, 0)$ 。

對稱軸：直線 $x=1$ 。

開口方向：開口向上。



(2) 將 x 和所對應的 y 值列表如下：

x	...	-4	-3	-2	-1	0	...
y	...	-8	-2	0	-2	-8	...

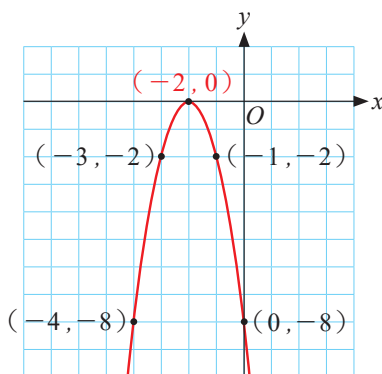
然後描點並畫平滑曲線如右圖，

由圖形可看出其特性。

頂點坐標： $(-2, 0)$ 。

對稱軸：直線 $x=-2$ 。

開口方向：開口向下。



會考觀測站 — 基礎演練題 搭配例 7

■ 已知 $(1, a)$ 、 $(2, b)$ 、 $(\frac{4}{3}, c)$ 、 $(99, d)$ 四個點都在 $y = 3(x - \frac{4}{3})^2$ 的圖形上，

比較 a 、 b 、 c 、 d 的大小。

$$c < a < b < d$$

教學眉批

- 對初學的學生而言，給頂點 x 坐標最多給 $\frac{1}{2}$ 即可，勿給不對稱之數值，如 $y = -2(x + \frac{1}{3})^2$ 是不好的範例。
- 若學生無法做出判斷時，教師可多多利用附件 8 的方格紙，讓學生練習繪製二次函數圖形，再做判斷。

活化體驗站

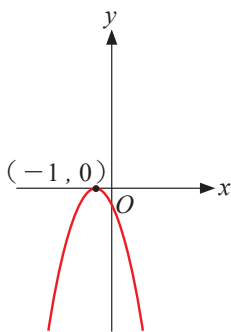
趣味數學

- 數字 3 在路上走著走著，結果翻了一個跟斗，接著又翻了一個跟斗，猜一句成語？
三番兩次（3 翻 2 次）。

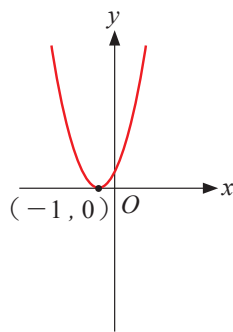
隨堂練習

1. 下列何者為二次函數 $y = (x+1)^2$ 可能的圖形？(B)

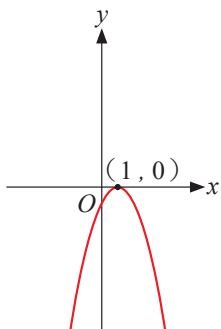
(A)



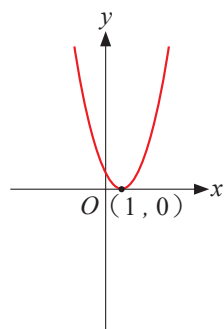
(B)



(C)



(D)



二次函數圖形的頂點為 $(-1, 0)$ ，且圖形的開口向上，故選(B)。

2. 右圖中的拋物線可能為下列哪一個二次函數的圖形？(C)

(A) $y = 2(x-1)^2$

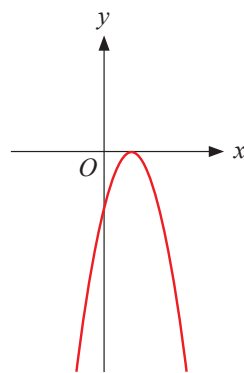
(B) $y = 2(x+1)^2$

(C) $y = -2(x-1)^2$

(D) $y = -2(x+1)^2$

∵ 圖形的開口向下，

又二次函數圖形的頂點在 x 軸上，且在 y 軸右方，故二次函數 $y = -2(x-1)^2$ 的頂點 $(1, 0)$ 符合，選(C)。



對於二次函數 $y = a(x-h)^2$ ， $h \neq 0$ 的圖形，其頂點為 $(h, 0)$ ，對稱軸為 $x = h$ ，當 $a > 0$ 時，圖形開口向上；當 $a < 0$ 時，圖形開口向下。



會考觀測站 — 加強演練題 搭配隨堂

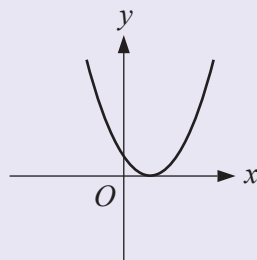
- (B) 右圖最有可能是下列哪一個二次函數的圖形？

(A) $y = x^2 + 1$

(B) $y = (x-1)^2$

(C) $y = x^2 - 1$

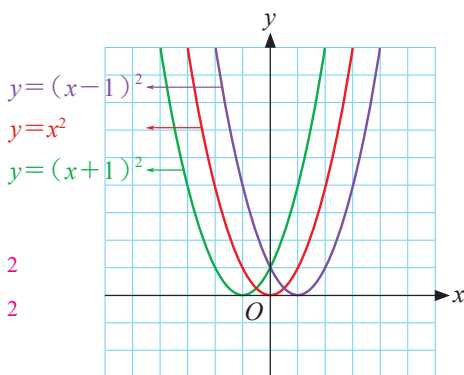
(D) $y = (x+1)^2$



探索活動 二次函數圖形的左右平移

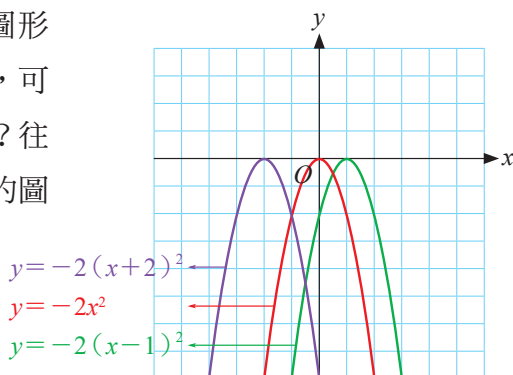
1. 利用附件 1，疊在 $y=x^2$ 的圖形上，將 $y=x^2$ 的圖形往右平移，可否與 $y=(x-1)^2$ 的圖形疊合？往左平移，可否與 $y=(x+1)^2$ 的圖形疊合？

$y=x^2$ 的圖形往左平移會與 $y=(x+1)^2$ 的圖形疊合，往右平移會與 $y=(x-1)^2$ 的圖形疊合。



2. 利用附件 6，疊在 $y=-2x^2$ 的圖形上，將 $y=-2x^2$ 的圖形往右平移，可否與 $y=-2(x-1)^2$ 的圖形疊合？往左平移，可否與 $y=-2(x+2)^2$ 的圖形疊合？

$y=-2x^2$ 的圖形往左平移會與 $y=-2(x+2)^2$ 的圖形疊合，往右平移會與 $y=-2(x-1)^2$ 的圖形疊合。



3. 在下表的空格內，填入適當文字或符號。

函數	項目	開口方向	頂點坐標	圖形的平移	對稱軸
$y=(x-1)^2$		向上	$(1, 0)$	由 $y=x^2$ 的圖形向右 平移 <u>1</u> 個單位可得。	$x=1$
$y=(x+1)^2$		向上	$(-1, 0)$	由 $y=x^2$ 的圖形向 <u>左</u> 平移 1 個單位可得。	$x=-1$
$y=-2(x-1)^2$		向下	$(1, 0)$	由 $y=-2x^2$ 的圖形向 <u>右</u> 平移 <u>1</u> 個單位可得。	$x=1$
$y=-2(x+2)^2$		向下	$(-2, 0)$	由 $y=-2x^2$ 的圖形向 <u>左</u> 平移 <u>2</u> 個單位可得。	$x=-2$

教學眉批

- 教師可利用附件的透明片，引導學生往左或往右平移來觀察。
- 第 1 題：提醒學生這三個二次函數的 x^2 項係數都為 1。
- 學生透過附件的操作，來了解二次函數平移的觀念。
- 第 2 題：提醒學生這三個二次函數的 x^2 項係數都為 -2 。
- 提醒學生利用第 1、2 題中，左右平移的結果，在表格中填空，表格有助於觀察比較與歸納。

關鍵提問

- 探索 3，二次函數 $y=-2(x-1)^2$ 的圖形是由 $y=-2(x+2)^2$ 的圖形向哪個方向平移多少個單位而得？
答：向右平移 3 個單位。



會考觀測站 — 基礎演練題 搭配探索

- 若二次函數 $y=4x^2$ 的圖形，向左平移 5 個單位後，可得到新的函數圖形，且新圖形通過點 $(1, a)$ ，求 a 的值。

教學眉批

- 教師宜適度引導學生歸納 $y = a(x-h)^2$ 的二次函數圖形特性。
- 圖示不僅容易明白，還可以加強函數樣式與圖形間的連結，加深學習印象。
- 當學生不容易理解時，教師可引導學生透過畫圖來找出答案。

！ 基會試題

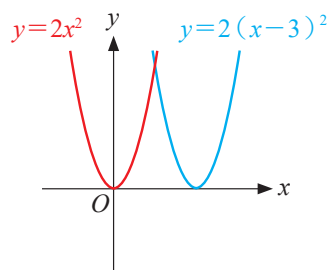
- 90 基測 I 第 18 題

形如 $y = a(x-h)^2$ ， $h \neq 0$ 的二次函數圖形，是由 $y = ax^2$ 的圖形左右平移而得。

① $h > 0$ 時：

$y = a(x-h)^2$ 的圖形可由 $y = ax^2$ 的圖形向右平移 h 個單位而得。

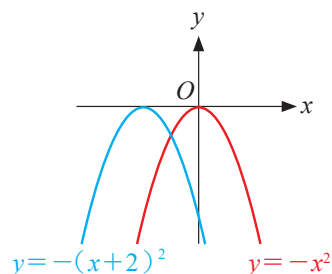
例 $y = 2(x-3)^2$ 的圖形可由 $y = 2x^2$ 的圖形向右平移 3 個單位而得。



② $h < 0$ 時：

$y = a(x-h)^2$ 的圖形可由 $y = ax^2$ 的圖形向左平移 $|h|$ 個單位而得。

例 $y = -(x+2)^2$ 的圖形可由 $y = -x^2$ 的圖形向左平移 2 個單位而得。



事實上，二次函數圖形左右平移時，圖形上的每一個點都會做相同的移動，因為頂點比較容易觀察，所以只要考慮頂點的平移即可。

隨堂練習

- 二次函數 $y = -5(x-1)^2$ 的圖形，經下列哪一個選項的操作後，會與 $y = -5(x+3)^2$ 的圖形完全疊合？(C)
 (A) 向左平移 3 個單位 (B) 向右平移 3 個單位
 (C) 向左平移 4 個單位 (D) 向右平移 4 個單位

$y = -5(x-1)^2$ 的頂點為 $(1, 0)$ ， $y = -5(x+3)^2$ 的頂點為 $(-3, 0)$ ，由 $(1, 0)$ 向左平移 4 個單位可得 $(-3, 0)$ ，故選 (C)。

- 二次函數 $y = \frac{1}{2}(x+2)^2$ 的圖形，向右平移 3 個單位，可以和下列哪一個二次函數的圖形完全疊合？(B)

- (A) $y = \frac{1}{2}(x+5)^2$ (B) $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$
 (C) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$ (D) $y = \frac{1}{2}(x-5)^2$

$y = \frac{1}{2}(x+2)^2$ 的頂點為 $(-2, 0)$ ，由 $(-2, 0)$ 向右平移 3 個單位可得 $(1, 0)$ ，故與 $y = \frac{1}{2}(x-1)^2$ 的圖形完全疊合，故選 (B)。

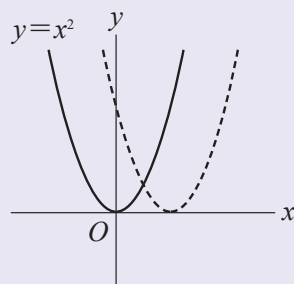
備課教學資源

- 隨堂輕鬆考第 4 回



90 基測 I 第 18 題 搭配隨堂

- (D) 如圖，將二次函數 $y = x^2$ 的圖形向右平移兩個單位長，則下列哪一個二次函數圖形，可為虛線所表示的圖形？
 (A) $y = x^2 + 2$ (B) $y = x^2 - 2$
 (C) $y = (x+2)^2$ (D) $y = (x-2)^2$



5 $y = a(x-h)^2 + k$ 的圖形

對應能力指標 9-a-02

接下來，我們來看形如 $y = a(x-h)^2 + k$, $h \neq 0, k \neq 0$ 的二次函數圖形。

例 8 $y = a(x-h)^2 + k$ 的繪圖

搭配習作 P4 基礎題 2(2)

描繪下列二次函數的圖形，並求此圖形的頂點坐標、對稱軸及開口方向：

(1) $y = (x-2)^2 + 1$

(2) $y = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 2$

解 (1) 將 x 和所對應的 y 值列表如下：

x	...	0	1	2	3	4	...
y	...	5	2	1	2	5	...

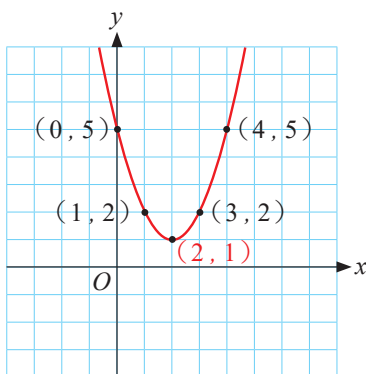
然後描點並畫平滑曲線如右圖，

由圖形可看出其特性。

頂點坐標： $(2, 1)$ 。

對稱軸：直線 $x=2$ 。

開口方向：開口向上。



(2) 將 x 和所對應的 y 值列表如下：

x	...	-4	-3	-2	-1	0	...
y	...	0	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{3}{2}$	0	...

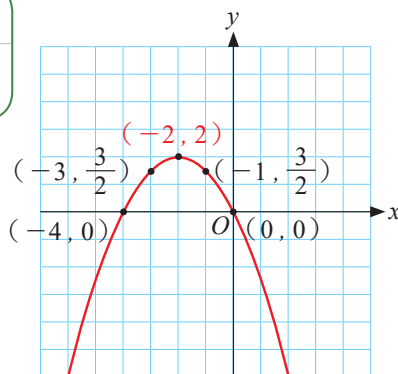
然後描點並畫平滑曲線如右圖，

由圖形可看出其特性。

頂點坐標： $(-2, 2)$ 。

對稱軸：直線 $x=-2$ 。

開口方向：開口向下。



活動 5 描繪形如 $y = a(x-h)^2 + k$ 的二次函數圖形，並了解其圖形可由平移 $y = ax^2$ 的圖形，使得頂點由 $(0, 0)$ 移至 (h, k) 而得。

教學眉批

- 當頂點的位置不在 y 軸上時，學生極可能發生學習困難。建議教師要特別注意學生的學習狀態，此處提供幾項教學建議，請參考 P27 補充教材。
- 本教材以例題 8、隨堂練習的函數圖形，來歸納形如 $y = a(x-h)^2 + k$ 的二次函數圖形特性。
- 教師可重新布題，讓學生利用方格紙多多練習。
- 教師教完 $y = a(x-h)^2 + k$ 時，亦可說明二次函數 $y = a(x-h)^2 + k$ ，其頂點坐標為 (h, k) ，若頂點與 x 軸相切，則 $k = 0$ ，頂點 $(h, 0)$ 。



會考觀測站 — 加強演練題 搭配例 8

■ (B) 設二次函數 $f(x) = -5(x+1)^2 + 8$ ，則下列哪一個函數值最大？

- (A) $f(-\frac{3}{2})$ (B) $f(-\frac{6}{5})$ (C) $f(-\frac{3}{4})$ (D) $f(0)$



趣味數學

- 有 30 個人要過河，但河岸只有一條能載 4 個人的小船，則小船要載幾次才能把 30 個人都送到對岸？

10 次，因為每次都要有 1 個人把船划回來。

教學眉批

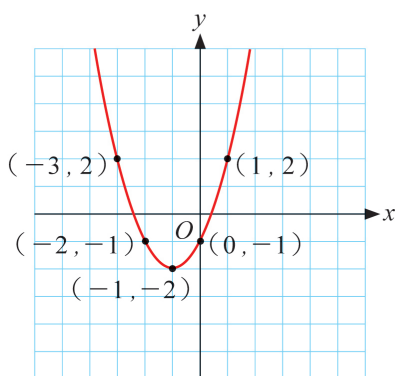
- 二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的對稱軸為 $x-h=0$ ，頂點在 $x=h$ 的位置，而 $x=h+c$ 與 $x=h-c$ 的函數值必定相等，也就是左右對稱，以 $x-h=0$ 為對稱軸。
- 若學生無法做出判斷時，教師可多多利用附件 8 的方格紙，讓學生練習繪製二次函數圖形，再做判斷。

基會試題

- 92 基測 II 第 28 題
- 97 基測 II 第 14 題

隨堂練習

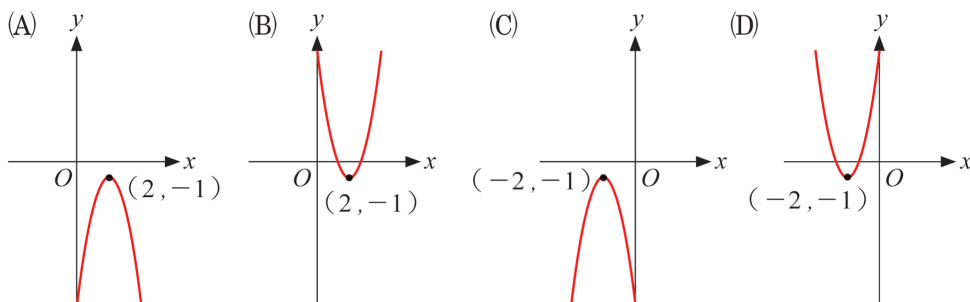
1. 二次函數 $y=(x+1)^2-2$ 的圖形已經描繪出來，回答此圖形的頂點坐標、對稱軸。



頂點坐標： (-1, -2)

對稱軸： x = -1

2. 下列何者為二次函數 $y=2(x-2)^2-1$ 可能的圖形？(B)

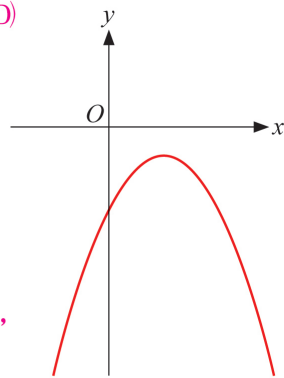


二次函數圖形的頂點為 $(2, -1)$ ，且圖形的開口向上，故選 (B)。

3. 右圖中的拋物線可能為下列哪一個二次函數的圖形？(D)

(A) $y=\frac{1}{2}(x+2)^2-1$ (B) $y=\frac{1}{2}(x-2)^2-1$
 (C) $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-1$ (D) $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-1$

∵ 圖形的開口向下，
 又二次函數圖形的頂點在第四象限，
 故二次函數 $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-1$ 的頂點 $(2, -1)$ 符合，
 選 (D)。



會考觀測站 - 基礎演練題

- (D) 比較 $f(x)=-\frac{1}{2}(x+3)^2-4$ 和 $g(x)=\frac{1}{3}(x-2)^2+1$ 的圖形，則下列敘述何者正確？
 - (A) 開口方向相同
 - (B) 頂點相同
 - (C) 對稱軸相同
 - (D) $f(x)$ 圖形的開口比 $g(x)$ 圖形的開口小



探索活動 二次函數圖形的平移

搭配習作 P5 基礎題 5

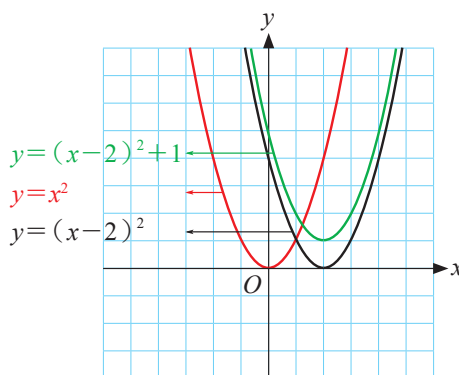


教學眉批

- 教師可利用附件的透明片，引導學生平移觀察。
- 提醒學生利用第 1、2 題中移動操作時，頂點移動的情形，在表格中填空，表格有助於觀察比較與歸納。

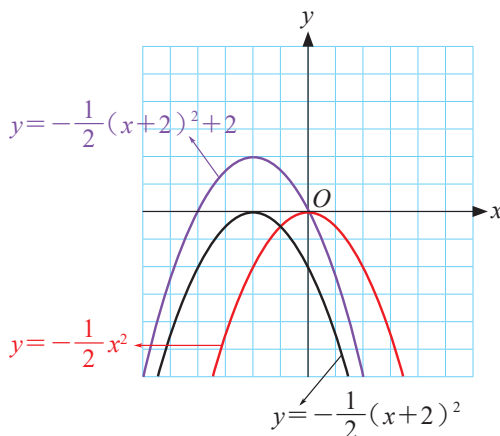
1. 利用附件 1，疊在右圖上：

- (1) 先將 $y=x^2$ 的圖形向右平移 2 個單位，可與 $y=(x-2)^2$ 的圖形疊合。
- (2) 再將 $y=(x-2)^2$ 的圖形向上平移 1 個單位，可與 $y=(x-2)^2+1$ 的圖形疊合。



2. 利用附件 4，疊在右圖上：

- (1) 先將 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形向左平移 2 個單位，可與 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$ 的圖形疊合。
- (2) 再將 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$ 的圖形向上平移 2 個單位，可與 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2+2$ 的圖形疊合。



3. 在下表的空格內，填入適當文字或符號。

函數	項目	開口方向	頂點坐標	圖形的平移	對稱軸
$y=(x+1)^2-2$		向上	$(-1, -2)$	由 $y=x^2$ 的圖形， 水平向 <u>左</u> 平移 <u>1</u> 個單位， 鉛直向 <u>下</u> 平移 <u>2</u> 個單位。	$x=-1$
$y=-\frac{1}{2}(x-2)^2-1$		向下	$(2, -1)$	由 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的圖形， 水平向 <u>右</u> 平移 <u>2</u> 個單位， 鉛直向 <u>下</u> 平移 <u>1</u> 個單位。	$x=2$



會考觀測站 — 加強演練題 搭配探索

1. 平移二次函數 $y=-4x^2$ 的圖形，使頂點坐標 $(0, 0)$ 移至 $(3, -1)$ ，可得二次函數 $y=$ $-4(x-3)^2-1$ 的圖形。
2. 將二次函數 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的圖形向左平移 2 個單位，再向上平移 3 個單位，可得二次函數 $y=$ $\frac{1}{2}(x+2)^2+3$ 的圖形。

教學眉批

■ 教師宜適度引導學生歸納二次函數 $y = a(x-h)^2 + k$ 的圖形特性。

■ $y = a(x-h)^2 + k$ 是二次函數的標準式，不僅涵蓋前面所學各種形式，也是後面學習使用配方法的目標形式，教師宜督導學生能熟記其形式與其圖形的各種特性，以便後續的學習。

基會試題

- 92 基測 II 第 25 題
- 97 基測 I 第 5 題

二次函數 $y = a(x-h)^2 + k$ 的圖形

形如 $y = a(x-h)^2 + k$, $h \neq 0$, $k \neq 0$ 的二次函數圖形，其特性如下：

- (1) 圖形都是拋物線，頂點坐標 (h, k) ，對稱軸為直線 $x = h$ 。
- (2) 圖形可由 $y = ax^2$ 平移而得；頂點由 $(0, 0)$ 平移到 (h, k) 。
- (3) 圖形的開口方向、大小與 $y = ax^2$ 相同。

例 9 二次函數圖形的平移

搭配習作 P6 基礎題 6

將二次函數 $y = -3(x-2)^2 - 4$ 的圖形，向左平移 3 個單位，再向上平移 6 個單位後，可得到 $y = a(x-h)^2 + k$ 的新圖形，求新圖形的二次函數。

解 $y = -3(x-2)^2 - 4$ 的頂點為 $(2, -4)$ ，
 由 $(2, -4)$ 向左平移 3 個單位，再向上平移 6 個單位，
 可得新圖形的頂點為 $(2-3, -4+6) = (-1, 2)$ ，
 \therefore 新圖形的開口方向及大小與 $y = -3(x-2)^2 - 4$ 的圖形相同，
 $\therefore a = -3$ ，
 故新圖形的二次函數為 $y = -3(x+1)^2 + 2$ 。

隨堂練習

將二次函數 $y = 3(x+1)^2 + 2$ 的圖形，向右平移 4 個單位，再向下平移 5 個單位後，可得到 $y = a(x-h)^2 + k$ 的新圖形，求：

- (1) 新圖形的頂點。
 - (2) 新圖形的二次函數。
- (1) $y = 3(x+1)^2 + 2$ 的頂點為 $(-1, 2)$ ，
 由 $(-1, 2)$ 向右平移 4 個單位，再向下平移 5 個單位，
 可得新圖形的頂點為 $(-1+4, 2-5) = (3, -3)$ 。
- (2) \therefore 新圖形的開口方向及大小與 $y = 3(x+1)^2 + 2$ 的圖形相同，
 $\therefore a = 3$ ，
 故新圖形的二次函數為 $y = 3(x-3)^2 - 3$ 。



92 基測 II 第 25 題 搭配隨堂

- (B) 在坐標平面上， $y = 2x^2 - 8$ 的圖形經由下列哪一種方式移動後，可得到 $y = 2(x-5)^2 + 12$ 的圖形？
 - (A) 先向左移 5 單位，再向上移 20 單位
 - (B) 先向右移 5 單位，再向上移 20 單位
 - (C) 先向下移 5 單位，再向右移 20 單位
 - (D) 先向上移 5 單位，再向左移 20 單位

例 10 $y = a(x-h)^2 + k$ 的應用

搭配習作 P6 基礎題 7

將二次函數 $y = 2x^2$ 的圖形平移後，可得 $y = a(x-h)^2 + k$ 的圖形，其對稱軸為直線 $x = 1$ ，且通過坐標平面上的點 $(-3, 5)$ ，求 a 、 h 與 k 的值。

解 \because 新圖形的開口方向及大小與 $y = 2x^2$ 的圖形相同，

$$\therefore a = 2,$$

又直線 $x = 1$ 為其對稱軸，且對稱軸為通過頂點的鉛垂直線，

$$\therefore h = 1,$$

因此函數為 $y = 2(x-1)^2 + k$ 。

\because 圖形通過點 $(-3, 5)$ ，

將 $(-3, 5)$ 代入 $y = 2(x-1)^2 + k$ ，

$$\text{可得 } 5 = 2(-3-1)^2 + k,$$

$$5 = 32 + k,$$

$$k = -27,$$

故 $a = 2$ 、 $h = 1$ 、 $k = -27$ 。

\because 對稱軸 $x = 1$ ，

\therefore 頂點坐標為 $(1, k)$ ，

則可設二次函數 $y = a(x-1)^2 + k$ 。

隨堂練習

搭配習作 P6 基礎題 8

二次函數 $y = a(x-h)^2 + k$ 的圖形，其對稱軸為直線 $x = -3$ ，且通過坐標平面上的點 $(-2, 3)$ ，若將它平移後，可得 $y = -2x^2$ 的圖形，求 a 、 h 與 k 的值。

$\because y = a(x-h)^2 + k$ 圖形的開口方向及大小與 $y = -2x^2$ 的圖形相同，

$$\therefore a = -2,$$

又直線 $x = -3$ 為其對稱軸， $\therefore h = -3$ ，

因此函數為 $y = -2(x+3)^2 + k$ ，

\because 圖形通過點 $(-2, 3)$ ，

將 $(-2, 3)$ 代入 $y = -2(x+3)^2 + k$ ，可得 $k = 5$ ，

故 $a = -2$ 、 $h = -3$ 、 $k = 5$ 。



備課教學資源

- 免試基礎講堂 1-1
- 隨堂輕鬆考第 5 回
- 免試精熟本 1-1



會考觀測站 — 精熟演練題 搭配例 10

- 已知二次函數 $y = -2x^2 + 1$ 的圖形向右平移後，可得 $y = a(x-h)^2 + k$ 的圖形，且平移後的圖形通過點 $(1, -7)$ ，則：

(1) $a + k = ?$ **-1**

(2) $h = ?$ **3**



趣味數學

- 如何將 14 個裝滿果汁的杯子、14 個裝一半果汁的杯子與 14 個空杯子平分給 6 個人？

將 8 個半杯倒成 4 個滿杯，這樣就有 18 個滿杯、6 個半杯與 18 個空杯子，即可平分給 6 個人。

(另解：將 14 個滿杯各倒一半到 14 個空杯，連同原來的 14 個半杯，共有 42 個半杯，即可平分給 6 個人。)

重點回顧

1 二次函數：

形如 $y=ax^2+bx+c$ ，其中 $a \neq 0$ 且 x 的最高次數為 2，稱為二次函數。

例 $y=x^2$ 、 $y=2x^2+x-3$ 、 $y=-(x+5)^2-2$ 都是二次函數。

2 二次函數 $y=a(x-h)^2+k$ 的圖形：

(1)

條件	$a > 0$	$a < 0$
圖示		
頂點	(h, k)	
對稱軸	$x=h$	
開口方向	開口向上	開口向下

(2) $|a|$ 愈小，其圖形開口愈大。

例 二次函數 $y=2x^2$ 、 $y=-x^2+1$ 、 $y=4(x-1)^2+5$ 、 $y=-3(x+2)^2$ 的開口從大到小依序為 $y=-x^2+1$ 、 $y=2x^2$ 、 $y=-3(x+2)^2$ 、 $y=4(x-1)^2+5$ 。

3 二次函數圖形的平移：

二次函數圖形平移時，圖形上的每一個點都會做相同的移動，因為頂點比較容易觀察，所以只要考慮頂點的平移即可。



會考觀測站 — 基礎演練題 搭配自評第 2 題

- (B) 下列各二次函數圖形的頂點何者與原點最近？

(A) $y=-x^2+4$

(B) $y=3(x+2)^2$

(C) $y=2(x+1)^2+2$

(D) $y=-(x-3)^2+1$

1-1 自我評量

1 已知函數 $f(x) = x^2 - 9x - 10$ ，求 $f(-1)$ 及 $f(10)$ 的值。

課 P7 例 1

$$f(-1) = (-1)^2 - 9 \times (-1) - 10 = 0$$

$$f(10) = 10^2 - 9 \times 10 - 10 = 0$$

答： $f(-1) = 0$ ， $f(10) = 0$ 。

2 描繪下列二次函數的圖形，並求此圖形的頂點坐標、對稱軸及開口方向：

(1) $y = -2x^2 + 1$

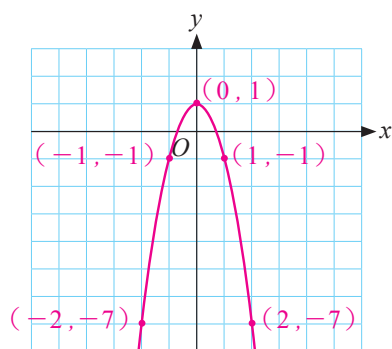
課 P18 例 6

(2) $y = (x+2)^2$

課 P21 例 7

x	...	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-7	-1	1	-1	-7	...

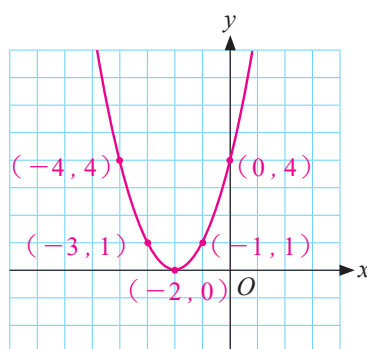
x	...	-4	-3	-2	-1	0	...
y	...	4	1	0	1	4	...



頂點坐標： (0, 1)

對稱軸： $x=0$ (y 軸)

開口方向： 開口向下



頂點坐標： (-2, 0)

對稱軸： $x=-2$

開口方向： 開口向上

! 基會試題

- 92 基測 I 第 24 題
- 103 會考第 26 題
- 105 會考第 21 題

書 教學眉批

- 第 1 題：〈另解〉
 $f(x) = x^2 - 9x - 10$
 $= (x+1)(x-10)$
 $\therefore f(-1) = f(10)$
 $= 0$ 。

- 第 2 題：學生進行繪圖時，宜提醒學生要配合所選的點來畫兩軸的位置，才不會讓所描的點跑出方格外，且有的圖形可酌量增描一、兩組對稱點，繪圖時才不會有太大的誤差。



會考觀測站 — 精熟演練題 搭配自評第 2 題

1. 已知 A 點在 $y=x^2$ 的圖形上，且與 x 軸相距 3 個單位，求 A 點的坐標。
 $A(\sqrt{3}, 3)$ 或 $A(-\sqrt{3}, 3)$
2. 二次函數 $y=ax^2+b$ 的圖形通過 $(2, k^2)$ 與 $(-2, k+6)$ 兩點，求 k 的值。
 3 或 -2



備課教學資源

- 會考 100 分 1-1
- 會考基礎卷 1-1
- 會考精熟卷 1-1
- 段考精選試題 1-1

教學眉批

- 提醒學生二次函數圖形的上下平移不會改變 x^2 項的係數，且圖形的左右平移時，亦是如此。
- 提醒學生有關二次函數圖形平移的問題，一定要注意兩點：
 - 不影響 x^2 項係數。
 - 觀察頂點的移動。
- 第 4 題：若學生無法做出判斷時，教師可多多利用附件 8 的方格紙，讓學生練習繪製二次函數圖形，再做判斷。

- 3 若二次函數 $y = -5x^2$ 的圖形向左平移 4 個單位後，可得 $y = a(x-h)^2$ 的圖形，求 a 及 h 的值。

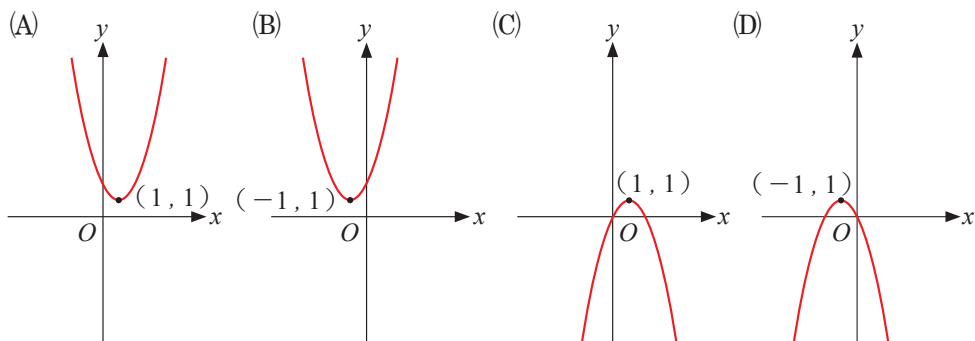
課 P24 隨堂

$\because y = -5x^2$ 的圖形向左平移 4 個單位，
 可得 $y = -5(x+4)^2$ ，
 $\therefore a = -5$ 、 $h = -4$ 。

答： $a = -5$ 、 $h = -4$ 。

- 4 下列何者為二次函數 $y = (x+1)^2 + 1$ 可能的圖形？

課 P26 隨堂



二次函數圖形的頂點為 $(-1, 1)$ ，且圖形開口向上，故選 (B)。

答：(B)。

- 5 寫出下列二次函數圖形的開口方向、頂點坐標與對稱軸，並比較其開口大小：

課 P14~26

甲： $y = -4x^2$ 乙： $y = 3(x-2)^2 - 6$

丙： $y = \frac{3}{2}x^2 + 7$ 丁： $y = -2(x + \frac{1}{2})^2$

	開口方向	頂點坐標	對稱軸
甲	開口向下	$(0, 0)$	$x = 0$ (y 軸)
乙	開口向上	$(2, -6)$	$x = 2$
丙	開口向上	$(0, 7)$	$x = 0$ (y 軸)
丁	開口向下	$(-\frac{1}{2}, 0)$	$x = -\frac{1}{2}$

(2) 開口大小：丙 > 丁 > 乙 > 甲。



會考觀測站 — 精熟演練題

搭配自評第 3、7 題

- 已知二次函數 $y = 2x^2 + 1$ 的圖形上有一點 $P(-2, 9)$ ，若將此二次函數圖形向右、向下平移後，可得新的二次函數圖形，且新圖形的頂點坐標為 $(4, -5)$ ，則此時 P 點坐標為何？

(2, 3)

6 右圖中的拋物線可能為下列哪一個二次函數的圖形？

課 P26 隨堂

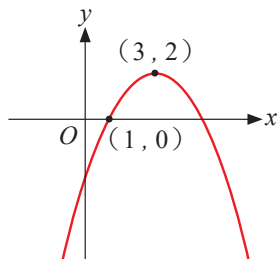
(A) $y = -(x-2)^2 + 3$ (B) $y = -(x-3)^2 + 2$

(C) $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + 2$ (D) $y = -\frac{1}{3}(x-2)^2 + 3$

設二次函數為 $y = a(x-3)^2 + 2$ ，

將 $(1, 0)$ 代入函數，可得 $a = -\frac{1}{2}$ ，故選 (C)。

答：(C)。



教學眉批

- 第 6 題用意是讓學生能透過圖形的觀察，找出可能的二次函數。

7 若 $y = a(x-h)^2 + k$ 的圖形，向左平移 2 個單位，再向下平移 5 個單位後，可得 $y = 3(x-4)^2 + 7$ 的新圖形，求原圖形的二次函數。

課 P28 例 9

將 $y = 3(x-4)^2 + 7$ 的圖形向右平移 2 個單位，再向上平移 5 個單位後，即為原來的函數圖形，

$y = 3(x-4)^2 + 7$ 的頂點為 $(4, 7)$ ，

由 $(4, 7)$ 向右平移 2 個單位，再向上平移 5 個單位，

可得原圖形的頂點為 $(4+2, 7+5) = (6, 12)$ ，

又原圖形的開口方向及大小與 $y = 3(x-4)^2 + 7$ 的圖形相同，

$\therefore a = 3$

故原圖形的二次函數為 $y = 3(x-6)^2 + 12$ 。

答： $y = 3(x-6)^2 + 12$ 。

8 將二次函數 $y = 3x^2$ 的圖形平移後，可得 $y = a(x-h)^2 + k$ 的圖形，其對稱軸為直線 $x = -2$ ，且通過點 $(-1, 2)$ ，求平移後的二次函數。

課 P29 例 10

$\because y = a(x-h)^2 + k$ 圖形的開口方向及大小與 $y = 3x^2$ 的圖形相同，

$\therefore a = 3$ ，

又直線 $x = -2$ 為其對稱軸， $\therefore h = -2$ ，

因此函數為 $y = 3(x+2)^2 + k$ ，

\because 圖形通過點 $(-1, 2)$ ，

將 $(-1, 2)$ 代入 $y = 3(x+2)^2 + k$ ，

可得 $k = -1$ ，

故平移後的二次函數為 $y = 3(x+2)^2 - 1$ 。

答： $y = 3(x+2)^2 - 1$ 。



103 會考第 26 題 搭配自評第 6 題

- (D) 已知 a, h, k 為三數，且二次函數 $y = a(x-h)^2 + k$ 在坐標平面上的圖形通過 $(0, 5)$ 、 $(10, 8)$ 兩點。若 $a < 0$ ， $0 < h < 10$ ，則 h 之值可能為下列何者？

(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7