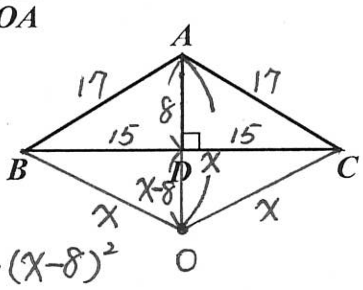
國九上 數學 週末作業3-2三角形與多邊形的三心　　108/01/04

班級:　　座號:　　姓名

1. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=17$，$\overline{BC}=30$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 於 D，若 O 為 $\triangle ABC$ 的外心，求 $\overline{OA}$



如圖，$\overline{BD}=\overline{CD}=15$

$\Rightarrow \overline{AD}=\sqrt{17^2-15^2}=8$

設 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=x$

$\Rightarrow \overline{OD}=x-8$

在 $\triangle BOD$ 中

$x^2=15^2+(x-8)^2$

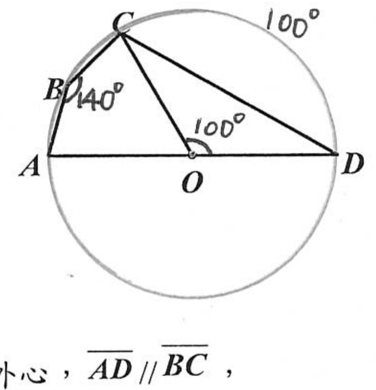
$x^2=225+x^2-16x+64$

$16x=289$

$x=\frac{289}{16}$

$\Rightarrow \overline{OA}=\frac{289}{16}$ #

2. 如圖，O點為四邊形 ABCD 的外心，且O點在 $\overline{AD}$ 上，$\angle B=140°$，求 $\angle COD$



以O為圓心，$\overline{OA}$為半徑畫圓

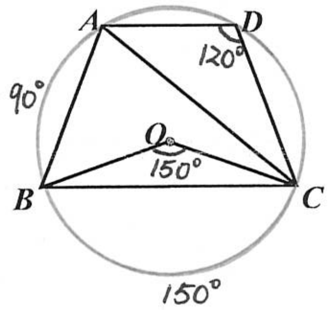
$\overset{\frown}{ADC}=2\times140°=280°$

又 $\overline{AD}$為直徑 $\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=180°$

$\Rightarrow \overset{\frown}{CD}=280°-180°=100°$

$\Rightarrow \angle COD=\overset{\frown}{CD}=100°$ #

3. 已知O點為等腰梯形 ABCD 的外心，$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$，$\angle BOC=150°$，$\angle D=120°$，求 $\angle ACB$



以O為圓心，$\overline{OB}$為半徑畫圓

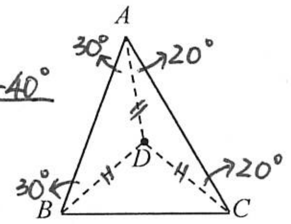
$\overset{\frown}{BC}=\angle BOC=150°$

$\overset{\frown}{ABC}=2\times120°=240°$

$\overset{\frown}{AB}=240°-150°=90°$

$\Rightarrow \angle ACB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=45°$ #

4. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}=\overline{BD}=\overline{CD}$，若 $\angle BAD=30°$，$\angle DAC=20°$，求 $\angle DBC$。



$\because \overline{AD}=\overline{BD}$

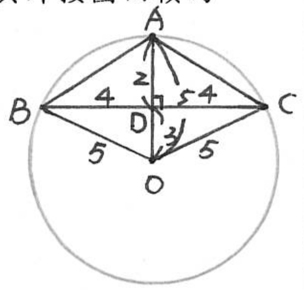
$\therefore \angle BAD=\angle ABD=30°$

$\because \overline{AD}=\overline{CD}$

$\therefore \angle DAC=\angle DCA=20°$

$\angle DBC=\frac{180°-60°-40°}{2}=40°$ #

5. 有一鈍角等腰三角形，底邊長為8，且其外接圓面積為 25π，求此鈍角等腰三角形的面積。



外接圓半徑 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\sqrt{25}=5$

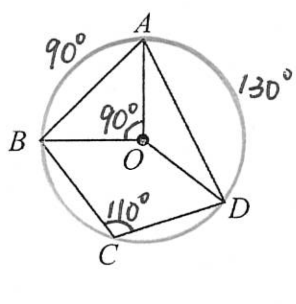
又 $\overline{BD}=\overline{CD}=\frac{8}{2}=4$

$\Rightarrow \overline{OD}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\Rightarrow \overline{AD}=5-3=2$

$\frac{1}{2}\times8\times2=8$ #

6. 如圖，O點為四邊形 ABCD 的外心，若 $\angle AOB=90°$，$\angle BCD=110°$，求 $\angle AOD$。



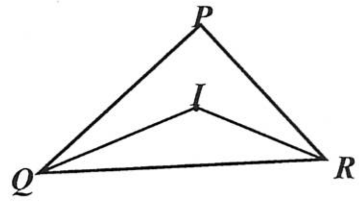
如圖，$\overset{\frown}{AB}=\angle AOB=90°$

$\overset{\frown}{BAD}=2\times110°=220°$

$\overset{\frown}{AD}=220°-90°=130°$

$\Rightarrow \angle AOD=\overset{\frown}{AD}=130°$ #

7. 如圖，I點為 $\triangle PQR$ 的內心，$\angle QIR=130°$，求 $\angle P$



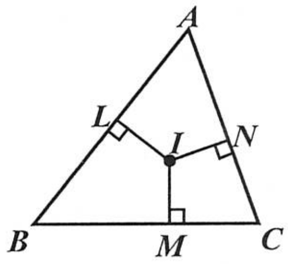
$\because \angle QIR=90°+\frac{1}{2}\angle P$

$\therefore 130°=90°+\frac{1}{2}\angle P$

$40°=\frac{1}{2}\angle P$

$\angle P=80°$ #

8. I 為 $\triangle ABC$ 的內心，$\overline{IL}\perp\overline{AB}$，$\overline{IM}\perp\overline{BC}$，$\overline{IN}\perp\overline{AC}$，若 $\triangle ABC$ 的面積為54，且 $\overline{AC}=8$，$\overline{BC}=9$，$\overline{AB}=10$，則 $\overline{IM}=$？



設 $\overline{IL}=\overline{IM}=\overline{IN}=r$

$\because \triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot S\cdot r$

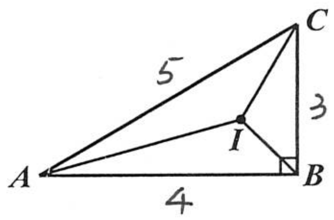
$\therefore 54=\frac{1}{2}(8+9+10)\cdot r$

$54=\frac{27}{2}r$

$r=4$

$\overline{IM}=4$ #

9. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90°$，$\overline{AB}=4$，$\overline{AC}=5$，若 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，則 $\triangle BIC$ 的面積＝？



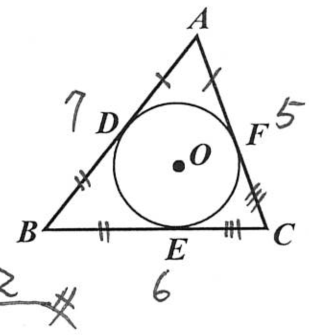
$\overline{BC}=\sqrt{5^2-4^2}=3$

$\because \triangle AIC:\triangle AIB:\triangle BIC=5:4:3$

$\therefore \triangle BIC=\frac{3}{12}\triangle ABC$

$=\frac{3}{12}\times\frac{1}{2}\times4\times3=\frac{3}{2}$ #

10. 如圖，圓O為 $\triangle ABC$ 的內切圓，D、E、F 分別為切點，若 $\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AB}=7$，求 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 之長



$\overline{AD}=\frac{1}{2}(7+6+5)-6$

$=9-6=3$ #

$\overline{BE}=\frac{1}{2}(7+6+5)-5$

$=9-5=4$ #

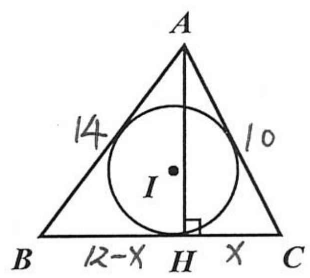
$\overline{CF}=\frac{1}{2}(7+6+5)-7$

$=9-7=2$ #

11. 如圖，圓 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，$\overline{AH}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高。已知 $\overline{AC}=10$，$\overline{BC}=12$，$\overline{AB}=14$

(1) 設 $\overline{CH}=x$，求 x 的值

(2) $\triangle ABC$ 的面積　(3) 求圓 I 的半徑



(1) $10^2-x^2=\overline{AH}^2=14^2-(12-x)^2$

$100-x^2=196-144+24x-x^2$

$48=24x$

$x=2$ #

(2) $\overline{AH}=\sqrt{10^2-2^2}$

$=\sqrt{96}$

$=4\sqrt{6}$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times12\times4\sqrt{6}$

$=24\sqrt{6}$ #

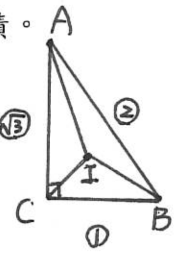
(3)

$24\sqrt{6}=\frac{1}{2}\cdot(10+12+14)\cdot r$

$24\sqrt{6}=18r$

$r=\frac{24\sqrt{6}}{18}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$ #

12. 已知 I 點為△ABC 的內心，若 $\angle A：\angle B：\angle C=1：2：3$，求△$AIB$ 的面積：△BIC 的面積：△AIC 的面積。



$\angle A=180^\circ\times\frac{1}{6}=30^\circ$

$\angle B=180^\circ\times\frac{2}{6}=60^\circ$

$\angle C=180^\circ\times\frac{3}{6}=90^\circ$

$\because 30^\circ-60^\circ-90^\circ$

$\therefore \overline{BC}:\overline{AC}:\overline{AB}=1:\sqrt{3}:2$

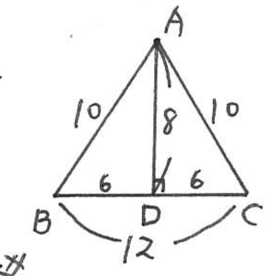
$\Rightarrow$ 原式 $=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{AC}=2:1:\sqrt{3}$

13.已知六邊形的面積為 240，內切圓半徑為 8，求此六邊形的周長。

$240=\frac{1}{2}\times S\times 8$

$S=60 \Rightarrow$ 周長 $=60$ #

14. △ABC 為等腰三角形，其底邊長為 12，面積為 48，求△ABC 的內切圓半徑。



如圖，$\frac{1}{2}\times 12\times\overline{AD}=48$

$\Rightarrow \overline{AD}=8$

$\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

$48=\frac{1}{2}(10+10+12)\times r$

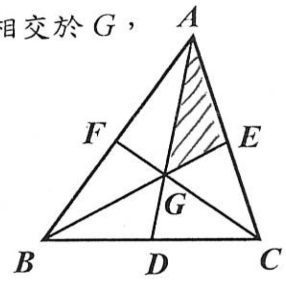
$48=16r$

$r=3$

$\Rightarrow$ 半徑 $=3$ #

15. 如圖，△ABC 的三中線 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ 相交於 G，且知 $\overline{AD}=15$，$\overline{BE}=18$，$\overline{CF}=21$

求△AGE 的周長



16. 有一個三角形的三條中線分別為 12、13、17，則此三角形的重心到三頂點的距離和為多少？

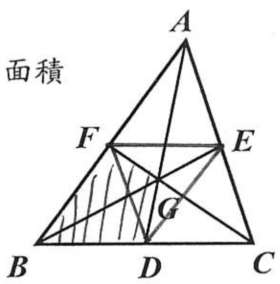
$12\times\frac{2}{3}=8$

$13\times\frac{2}{3}=\frac{26}{3}$

$17\times\frac{2}{3}=\frac{34}{3}$

$\Rightarrow 8+\frac{26}{3}+\frac{34}{3}=28$ #

17. △ABC 三中線 $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{CF}$ 交於 G，且 ΔBGC 面積為 10，求(1) △ABC 面積 (2) △CGE 面積 (3) 四邊形 $BDGF$ 面積 (4) △DEF 面積



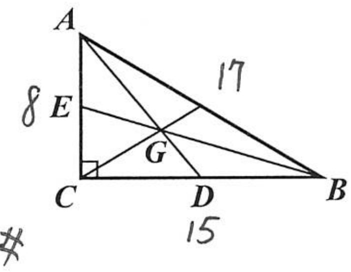
(1) $\Delta ABC=3\Delta BGC=3\times 10=30$ #

(2) $\Delta CGE=\frac{1}{6}\Delta ABC=\frac{1}{6}\times 30=5$ #

(3) 四邊形 BDGF $=5\times 2=10$ #

(4) $\Delta DEF=\frac{1}{4}\Delta ABC=\frac{1}{4}\times 30=\frac{15}{2}$ #

18.如圖，G 為△ABC 的重心，$\angle ACB=90^\circ$，且 $\overline{AC}=8$，$\overline{AB}=17$，求(1) △AGB 面積 (2) 四邊形 $CDGE$ 面積



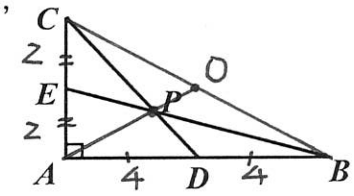
(1) $\overline{BC}=\sqrt{17^2-8^2}=15$

$\Delta ABC=\frac{1}{2}\times 15\times 8=60$

$\Rightarrow \Delta AGB=\frac{1}{3}\times 60=20$ #

(2) 四邊形 CDGE $=\frac{2}{6}\times 60=20$ #

19.如圖，$\angle BAC=90^\circ$，$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=4$，D、E 分別為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 的中點，$\overline{CD}$ 與 $\overline{BE}$ 相交於 P 點，則(1) $\overline{PD}=$? (2) $\overline{PA}=$?



(1) 連 $\overline{BC} \Rightarrow$ P 為 △ABC 重心

$\overline{AD}=\overline{BD}=\frac{8}{2}=4$

$\Rightarrow \overline{CD}=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2}$

$\Rightarrow \overline{PD}=\frac{1}{3}\overline{CD}=\frac{1}{3}\times 4\sqrt{2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}$ #

(2) 連 $\overline{AP}$ 並延長交 $\overline{BC}$ 於 O

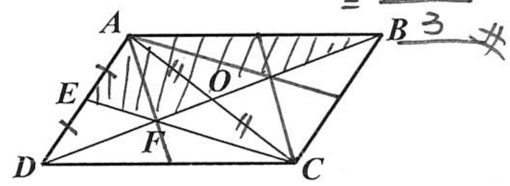
$\Rightarrow$ O 為 $\overline{BC}$ 中點

$\Rightarrow$ O 為 △ABC 外心

$\Rightarrow \overline{AO}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+8^2}=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow \overline{PA}=\frac{2}{3}\overline{AO}=\frac{4\sqrt{5}}{3}$ #

20. 如圖，$ABCD$ 為平行四邊形，若面積為 36，且兩對角線相交於 O，E 為 $\overline{AD}$ 中點，$\overline{CE}$ 交 $\overline{BD}$ 於 F，則 (1) $\overline{FD}:\overline{DB}=$? (2) 四邊形 ABFE 面積＝？



(1) $\because$ ABCD 為 ▱

$\therefore \overline{AO}=\overline{CO}$, $\overline{BO}=\overline{DO}$

$\Rightarrow$ F 為 △ACD 重心

$\overline{FD}=\frac{2}{3}\overline{DO}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\overline{DB}=\frac{1}{3}\overline{DB}$

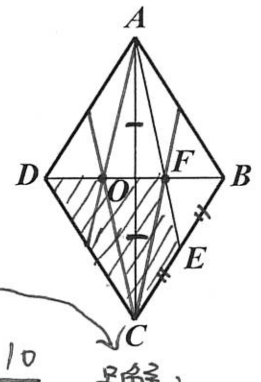
$\Rightarrow \overline{FD}:\overline{DB}=1:3$ #

(2) 如圖，$\frac{36}{12}=3$

$\Rightarrow$ 四邊形 ABFE $=3\times 5=15$ #

另解：$36\times\frac{5}{12}=15$ #

21. 如圖，菱形 $ABCD$ 中，兩對角線相交於 O，E 為 $\overline{BC}$ 中點，若 $\overline{AC}=10$，$\overline{BD}=8$，則 (1) $\overline{BF}=$? (2) 四邊形 CEFD 面積＝？



(1) $\because$ F 為 △ABC 重心

$\therefore \overline{BF}=\frac{2}{3}\overline{BO}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{3}\overline{BD}=\frac{1}{3}\times 8=\frac{8}{3}$ #

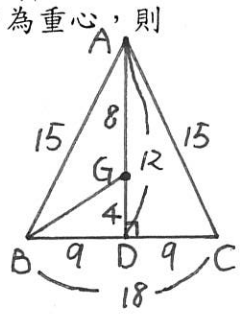
(2) 菱形 ABCD $=\frac{1}{2}\times 10\times 8=40$

如圖，$\frac{40}{12}=\frac{10}{3}$

$\Rightarrow \frac{10}{3}\times 5=\frac{50}{3}$ #

另解：$40\times\frac{5}{12}=\frac{50}{3}$ #

22. △ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=15$，$\overline{BC}=18$，若 G 為重心，則 (1) $\overline{AG}=$? (2) $\overline{BG}=$?



(1) 作 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$

$\Rightarrow \overline{BD}=\overline{CD}=\frac{18}{2}=9$

$\overline{AD}=\sqrt{15^2-9^2}=12$

$\Rightarrow \overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}=\frac{2}{3}\times 12=8$ #

(2) $\overline{DG}=\frac{1}{3}\overline{AD}=\frac{1}{3}\times 12=4$

$\Rightarrow \overline{BG}=\sqrt{9^2+4^2}=\sqrt{97}$ #