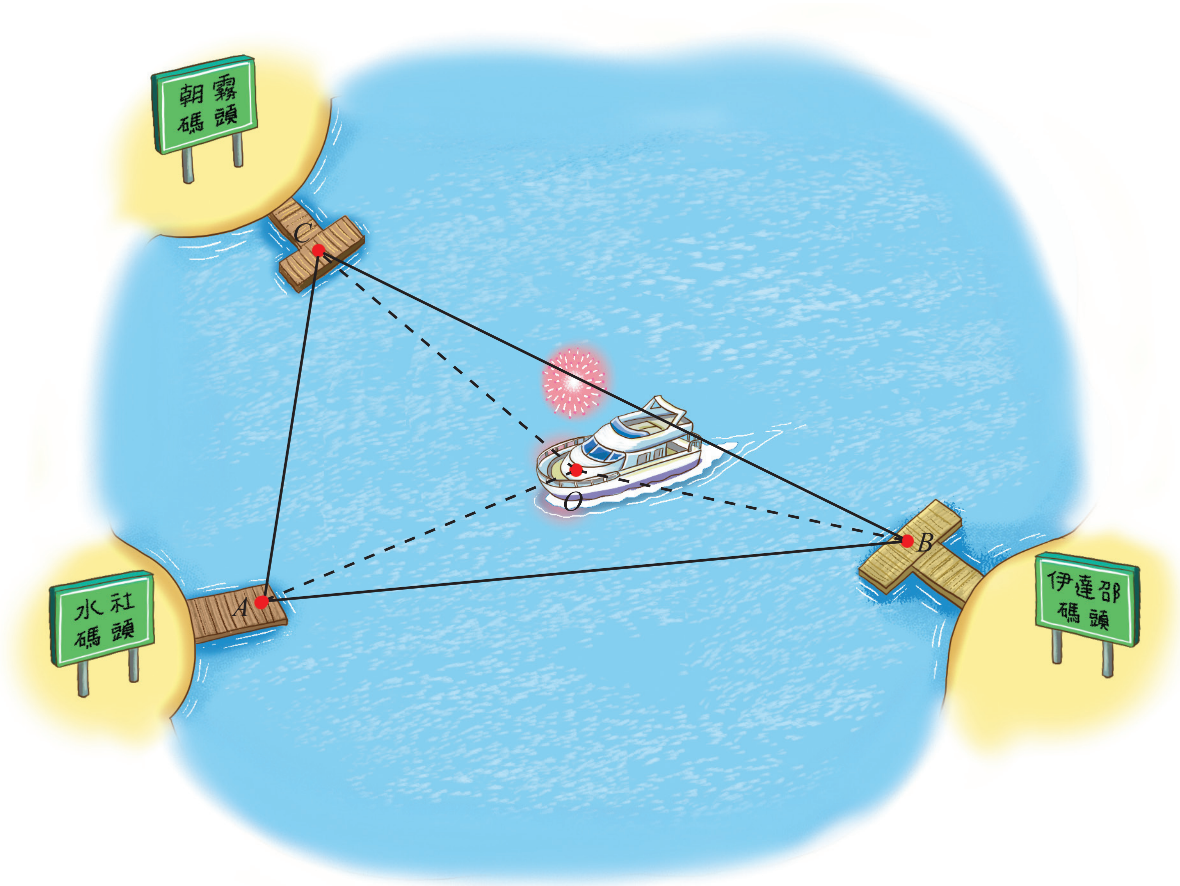
# 3-2 三角形與多邊形的心

## 1 外心

對應能力指標 9-s-08

### 三角形的外心

日月潭風景管理處計畫以遊艇行駛到湖中施放煙火。若以水社碼頭（$A$ 點）、伊達邵碼頭（$B$ 點）及朝霧碼頭（$C$ 點）為人潮的據點，為了讓這三個據點的人看煙火的距離相等，則遊艇（$O$ 點）應該要在哪裡施放煙火呢？




也就是說，要找到一個 $O$ 點到 $\triangle ABC$ 的三頂點距離相等，即 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，如圖 3-4。

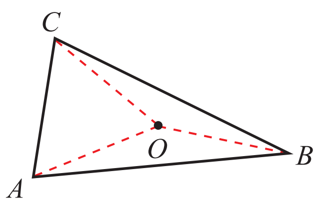



圖 3-4

如圖 3-5，我們來討論要如何在 $\triangle ABC$ 中找出 $O$ 點，才能使得 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 呢？

由「**一點到某線段的兩端點等距離，則該點必在此線段的中垂線上。**」可知：

要使得 $\overline{OA}=\overline{OB}$，$O$ 點必在 $\overline{AB}$ 的中垂線 $L_1$ 上。

要使得 $\overline{OB}=\overline{OC}$，$O$ 點必在 $\overline{BC}$ 的中垂線 $L_2$ 上。

因此，只要分別作 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 的中垂線 $L_1$、$L_2$，

則 $L_1$ 與 $L_2$ 的交點 $O$ ，即為所求。

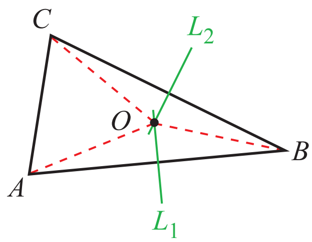


圖 3-5

## 動動腦

如圖 3-5，作 $\overline{AC}$ 的中垂線 $L_3$，則 $L_3$ 也會通過 $O$ 點嗎？為什麼？

(1) 會。

(2) $\because \overline{OA}=\overline{OC}$，

$\therefore O$ 點在 $\overline{AC}$ 的中垂線 $L_3$ 上，

故 $L_3$ 會通過 $O$ 點。

如圖 3-6，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}$、$\overline{BC}$ 兩中垂線相交於 $O$ 點，以 $O$ 點為圓心，$\overline{OA}$ 為半徑畫圓，因為 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，故此圓必通過 $\triangle ABC$ 的三個頂點，圓 $O$ 稱為 $\triangle ABC$ 的**外接圓**，$\triangle ABC$ 稱為圓 $O$ 的**圓內接三角形**。

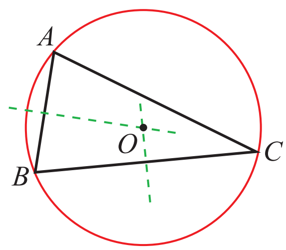


圖 3-6

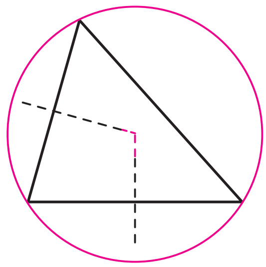
## 數學小語錄

圓圈的裡面代表現在學到的知識，圓圈的外面仍然有著無限的空白，而且隨著圓愈來愈大，圓周所接觸的空白也愈來愈大。

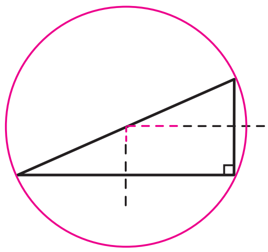
——愛因斯坦（Albert Einstein，1879-1955）

## 隨堂練習

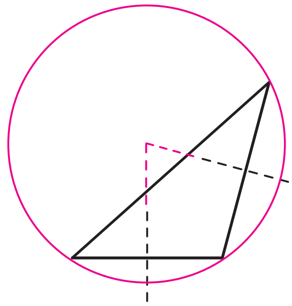
下列各三角形中，虛線為該邊的中垂線，利用這些中垂線畫出三角形的外接圓。



鋭角三角形



直角三角形



鈍角三角形

由上面的說明與隨堂練習可知：任意三角形三邊的中垂線交於同一點，此點為外接圓的圓心，所以將此點稱為三角形的**外心**。

## 三角形的外心

1. 三角形三邊的中垂線交於一點，此點稱為三角形的外心，外心到三頂點的距離相等。
2. 若以三角形的外心為圓心，外心到三頂點的距離為半徑畫圓，可畫出此三角形的外接圓。

由上述可知，任意三角形都有外心，它可能會落在三角形的內部、三角形的邊上或三角形的外部。

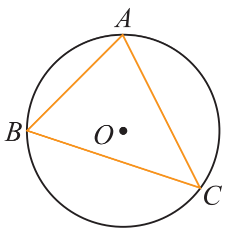



圖 3-7

$\triangle ABC$ 為鋭角三角形，外心在三角形內部。

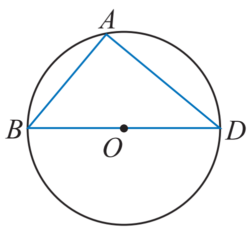



圖 3-8

$\triangle ABD$ 為直角三角形，外心在三角形的斜邊中點。

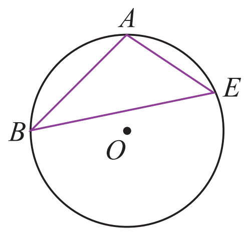
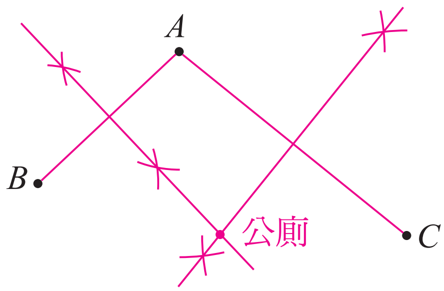



圖 3-9

$\triangle ABE$ 為鈍角三角形，外心在三角形外部。

隨堂練習

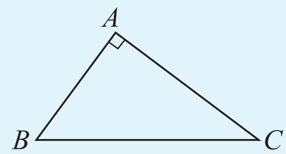
如圖，$A$、$B$、$C$ 為公園裡的三個涼亭，想蓋一座公廁到三個涼亭的距離相等，利用尺規作圖找出公廁的位置。




## 例1 直角三角形外接圓半徑

搭配習作 P45 基礎題 1

直角三角形 $ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，$\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=8$，求$\triangle ABC$ 外接圓的半徑。



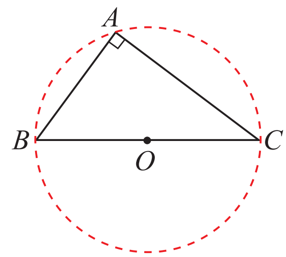

解

$\because \triangle ABC$ 為直角三角形，

$\therefore$外心 $O$ 點是斜邊 $\overline{BC}$ 中點。

又 $\overline{BC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$，

故外接圓半徑$=\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=10\div 2=5$。

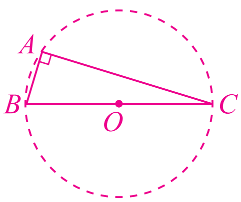



隨堂練習

直角三角形 $ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，$\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=24$，求$\triangle ABC$ 外接圓的半徑。

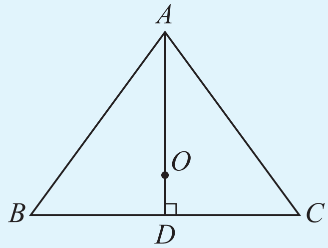
斜邊 $\overline{BC}=\sqrt{7^2+24^2}=25$，

$\therefore$外接圓半徑$=25\div 2=\dfrac{25}{2}$。



## 例 2 等腰三角形的外接圓半徑

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=10$，$\overline{BC}=12$，$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，$O$ 點為 $\triangle ABC$ 的外心，求 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑。




**解**

(1) $\because \triangle ABC$ 為等腰三角形，$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，

$\therefore \overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=6$，$\overline{AD}=\sqrt{10^2-6^2}=8$。

(2) $\because O$ 點為 $\triangle ABC$ 的外心，

$\therefore O$ 點在 $\overline{AD}$ 上，

連接 $\overline{OB}$，可設 $\overline{OA}=\overline{OB}=x$，則 $\overline{OD}=8-x$。

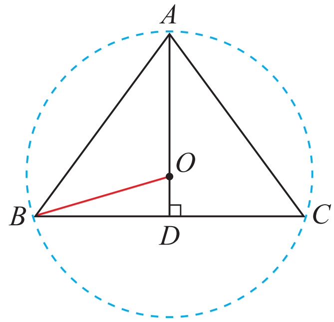
在直角$\triangle OBD$ 中，$\overline{OB}^2=\overline{OD}^2+\overline{BD}^2$，

$x^2=(8-x)^2+6^2$，

$16x=100$，

$x=\dfrac{25}{4}$。

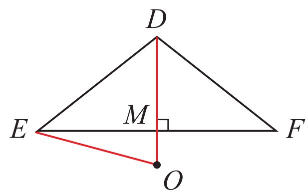
故 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 $\dfrac{25}{4}$。




## 隨堂練習

如圖，$O$ 點為等腰三角形 $DEF$ 的外心，$\overline{DE}=\overline{DF}=5$，$\overline{EM}=4$，$\overline{DM}$ 垂直平分 $\overline{EF}$，$O$ 點在 $\overline{DM}$ 的延長線上，求 $\triangle DEF$ 的外接圓面積。

（提示：可設 $\overline{OD}=\overline{OE}=x$）




$\overline{DM}=\sqrt{5^2-4^2}=3$，

設 $\overline{OD}=\overline{OE}=x$，則 $\overline{OM}=x-3$，

直角 $\triangle OME$ 中，

$x^2=4^2+(x-3)^2$，$x=\dfrac{25}{6}$，

故 $\triangle DEF$ 的外接圓面積為 $\dfrac{25}{6}\times\dfrac{25}{6}\times\pi=\dfrac{625}{36}\pi$。

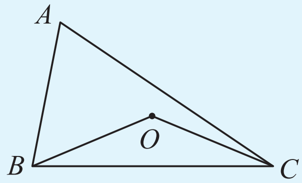
圓內接三角形的每個內角都是該圓的圓周角，接下來將利用圓周角與其所對弧的關係解題。

## 例 3 外心與角度

搭配習作 P45 基礎題 2

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle A=67^\circ$，

$O$ 點為$\triangle ABC$ 的外心，求$\angle BOC$。

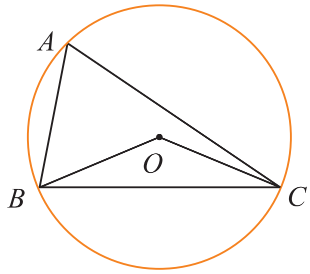



解 如圖，以 $O$ 點為圓心，$\overline{OB}$ 為半徑，

畫出$\triangle ABC$ 的外接圓。

$\because \angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=\frac{1}{2}\angle BOC$，

$\therefore \angle BOC=2\angle A=2\times 67^\circ=134^\circ$。




## 隨堂練習

1. 如圖，$O$ 點為銳角三角形 $ABC$ 的外心，$\angle BAC=46^\circ$，$\angle ABC=79^\circ$，

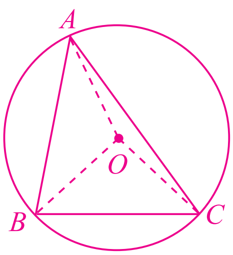
 求$\angle AOB$。

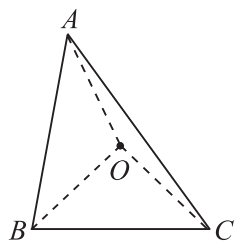
 $\angle ACB=180^\circ-46^\circ-79^\circ=55^\circ$，

 $\therefore \angle AOB=\overset{\frown}{AB}=2\angle ACB$

 $=2\times 55^\circ$

 $=110^\circ$。




2. 如圖，$O$ 點為鈍角三角形 $ABC$ 的外心，$\angle ABC=28^\circ$，$\angle BAC=106^\circ$，

 求$\angle AOB$ 及$\angle BOC$。

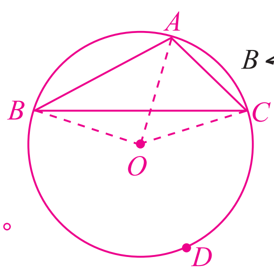
 $\angle ACB=180^\circ-28^\circ-106^\circ=46^\circ$，

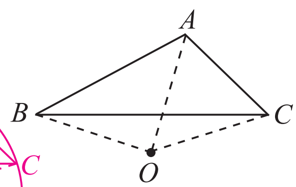
 $\therefore \angle AOB=\overset{\frown}{AB}=2\angle ACB$

 $=2\times 46^\circ=92^\circ$。

 $\overset{\frown}{BDC}=2\angle BAC=2\times 106^\circ=212^\circ$，

 $\therefore \angle BOC=\overset{\frown}{BAC}=360^\circ-212^\circ=148^\circ$。



## 多邊形的外心

如果一個多邊形的頂點都在同一個圓上，則稱此圓為此多邊形的外接圓，其外接圓的圓心稱為**多邊形的外心**。

### 四邊形的外心

三角形的外心是各邊中垂線的共同交點，那麼四邊形的外心呢？

如圖 3-10，圓內接四邊形 $ABCD$ 中，四個邊 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$ 都是圓上的弦，由弦的中垂線必通過圓心可知，圓心 $O$ 是各邊中垂線的交點。

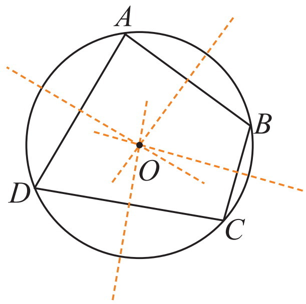


圖 3-10

### $n$ 邊形的外心

如圖 3-11，若一個 $n$ 邊形的頂點都在同一個圓上，則此多邊形的各邊都是圓上的弦，而弦的中垂線必通過圓心，故圓心 $O$ 為各邊中垂線的共同交點，此點可能在多邊形的內部、邊上或外部。

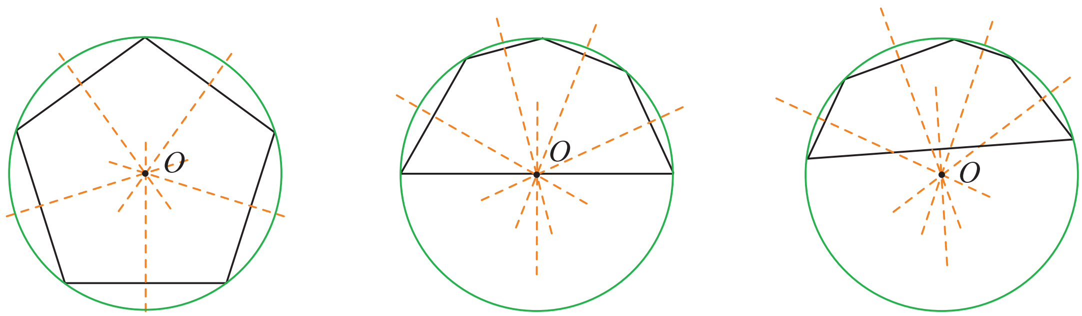


圖 3-11

### 如何尋找多邊形的外心

如圖 3-11，若多邊形的各邊中垂線交於同一點 $O$，則 $O$ 點到多邊形各頂點的距離相等，以 $O$ 點為圓心，$O$ 到頂點的距離為半徑畫圓，可得此多邊形的外接圓，其圓心 $O$ 為此多邊形的外心。

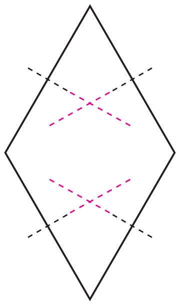
如果多邊形各邊中垂線不是交在同一點，表示無法找到一個共同的點到多邊形的各個頂點距離相等，所以此多邊形沒有外接圓，即此多邊形沒有外心。

## 隨堂練習

下列各圖形中，虛線為各邊的中垂線，利用這些中垂線判別哪個圖形有外心？哪個圖形沒有外心？如果有外心，畫出此圖形的外接圓。

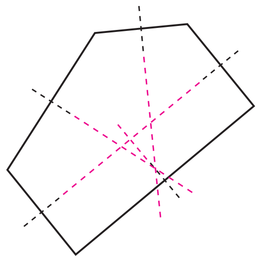
(A)

☐有　☑沒有



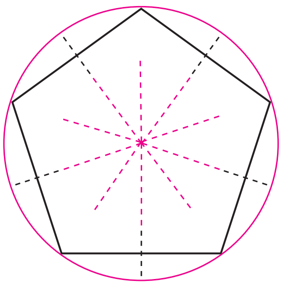
(B)

☐有　☑沒有



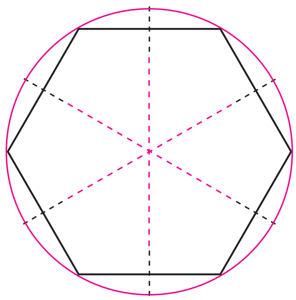
(C)

☑有　☐沒有



(D)

☑有　☐沒有



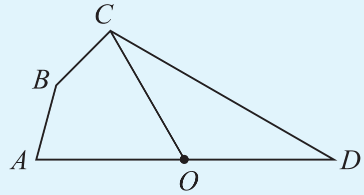
由隨堂練習可知：**邊數大於 3 的多邊形不一定有外心。**

## 例 4 多邊形外心的應用

如圖，$O$ 點為四邊形 $ABCD$ 的外心，

且 $O$ 點在 $\overline{AD}$ 上，$\angle B=150^\circ$，

求 $\angle COD$。



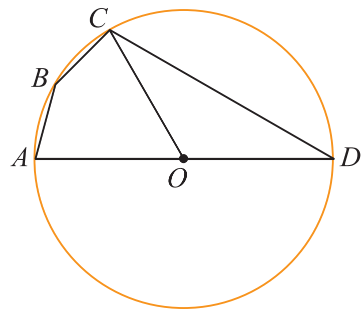

解 如圖，畫出四邊形 $ABCD$ 的外接圓。

$\because \angle B+\angle D=180^\circ$， ← 圓內接四邊形對角互補

$\angle D=180^\circ-\angle B$

$=180^\circ-150^\circ$

$=30^\circ$。




又 $\triangle OCD$ 為等腰三角形，

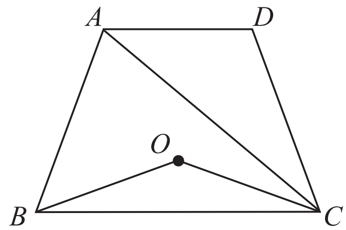
$\therefore \angle COD=180^\circ-30^\circ\times 2$

$=120^\circ$。

## 隨堂練習

已知 $O$ 點為等腰梯形 $ABCD$ 的外心，$\overline{AD}\,//\,\overline{BC}$，

$\angle BOC=140^\circ$，$\angle D=110^\circ$，求 $\angle ACB$。



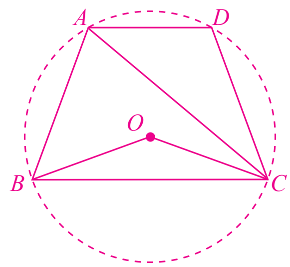

$\angle BAC=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=\dfrac{1}{2}\angle BOC=\dfrac{1}{2}\times 140^\circ=70^\circ$，

又梯形 $ABCD$ 為圓內接四邊形，

$\therefore \angle ABC=180^\circ-\angle D=180^\circ-110^\circ=70^\circ$，

故 $\angle ACB=180^\circ-\angle BAC-\angle ABC$

$=180^\circ-70^\circ-70^\circ=40^\circ$。




## 數學小語錄

想像遠比知識重要，因為知識是有限的，而想像力卻可以遨遊世界。

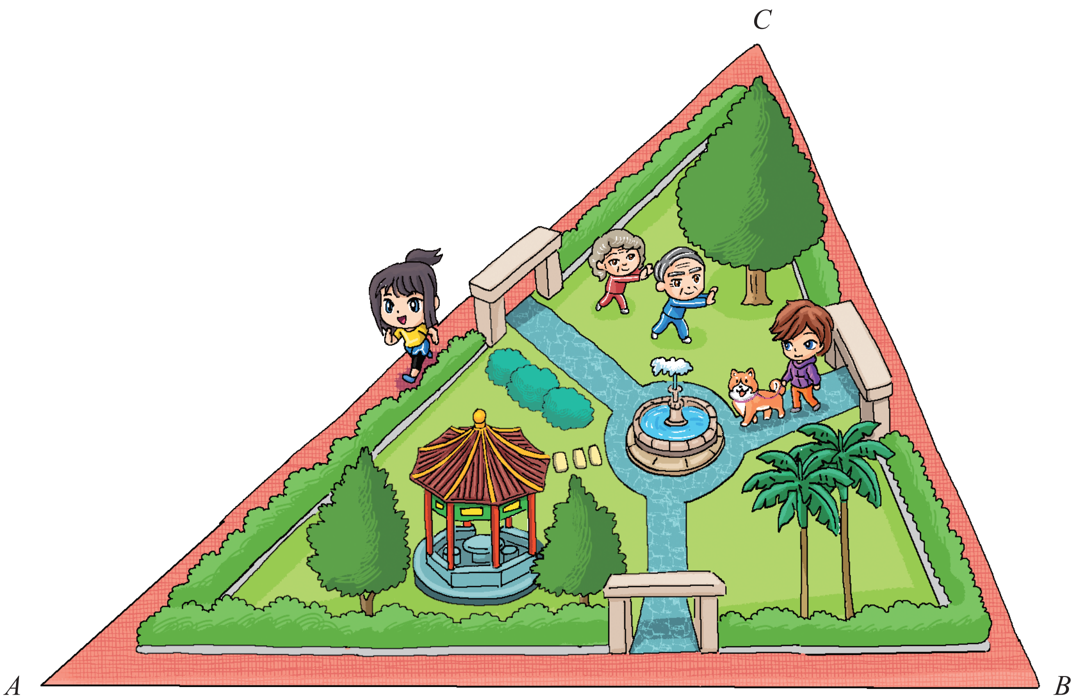
——愛因斯坦（Albert Einstein，1879-1955）

# 2 內心

對應能力指標 9-s-09

## 三角形的內心

如圖，已知 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 為這座公園的三條外圍道路，若在公園內蓋一座噴水池，則噴水池應蓋在哪裡，才會與這三條外圍道路的距離相等？




也就是說，要找到一個 $I$ 點到 $\triangle ABC$ 的三邊距離相等，即 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$，如圖 3-12。

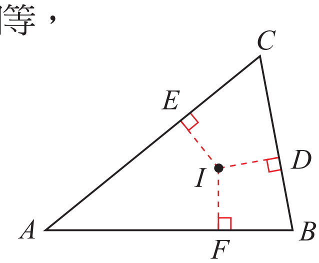



圖 3-12

如圖 3-13，我們來討論要如何在 $\triangle ABC$ 中找出 $I$ 點，才能使得 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$ 呢？

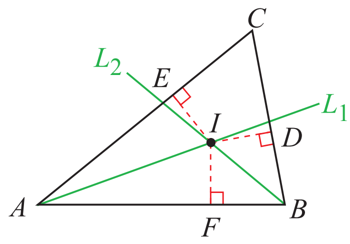


圖 3-13

由「**某角內部一點到此角的兩邊等距離，則該點必在此角的角平分線上。**」可知：

要使得 $\overline{IE}=\overline{IF}$，$I$ 點必在 $\angle BAC$ 的角平分線 $L_1$ 上。

要使得 $\overline{IF}=\overline{ID}$，$I$ 點必在 $\angle ABC$ 的角平分線 $L_2$ 上。

因此，只要分別作 $\angle A$、$\angle B$ 的角平分線 $L_1$、$L_2$，

則 $L_1$ 與 $L_2$ 的交點 $I$，即為所求。

**動動腦**

如圖 3-13，若 $L_3$ 為 $\angle ACB$ 的角平分線，則 $L_3$ 也會通過 $I$ 點嗎？為什麼？

(1)會。

(2)$\because \overline{IE}=\overline{ID}$，$\therefore I$ 點在 $\angle ACB$ 的角平分線 $L_3$ 上，

故 $L_3$ 會通過 $I$ 點。

如圖 3-14，$\triangle ABC$ 中，$\angle BAC$ 與 $\angle ABC$ 的角平分線相交於 $I$ 點。若以 $I$ 點為圓心，$\overline{ID}$ 為半徑畫圓，因為 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$，故此圓和三角形的三邊相切，圓 $I$ 稱為 $\triangle ABC$ 的**內切圓**，$\triangle ABC$ 稱為圓 $I$ 的**圓外切三角形**。

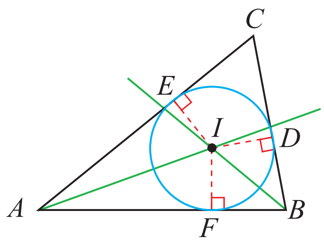


圖 3-14

由此可知，三角形三個內角的角平分線交於同一點，此點為內切圓的圓心，所以將此點稱為三角形的**內心**。

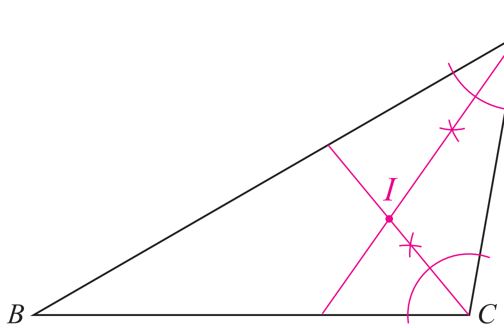
## 三角形的內心

1. 三角形三個內角的角平分線交於一點，此點稱為三角形的內心，內心到三邊的距離相等。
2. 若以三角形的內心為圓心，內心到三邊的距離為半徑畫圓，可畫出此三角形的內切圓。

## 隨堂練習

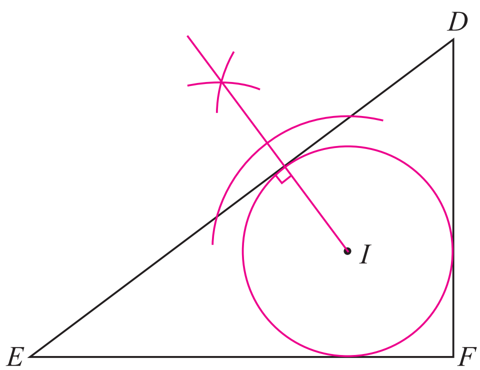
如圖，利用尺規作圖，求作：

(1) △$ABC$ 的內心。




$I$ 點即為所求。

(2) 直角三角形 $DEF$ 的內切圓。（$I$ 點為內心）




圓 $I$ 即為所求。

## 動動腦

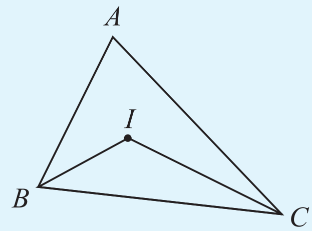
三角形的內心，一定都在三角形內部嗎？為什麼？

∵三角形三內角的角平分線交於三角形的內部，
以此交點所畫的內切圓一定在三角形的內部，
故內心一定在三角形的內部。

## 例 5 內心與角度

搭配習作 P45 基礎題 3

如圖，$I$ 點為 $\triangle ABC$ 的內心，$\angle ABC=70^\circ$，$\angle ACB=40^\circ$，求 $\angle BIC$。




解

$\because I$ 點為 $\triangle ABC$ 的內心，

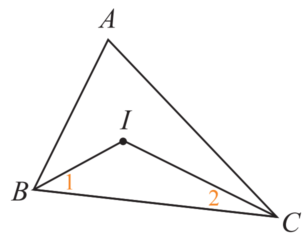
$\therefore \overrightarrow{BI}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線，

則 $\angle 1=\dfrac{1}{2}\angle ABC=35^\circ$，

同理，$\angle 2=\dfrac{1}{2}\angle ACB=20^\circ$，

$\angle BIC=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)$

$=180^\circ-(35^\circ+20^\circ)=125^\circ$。




## 隨堂練習

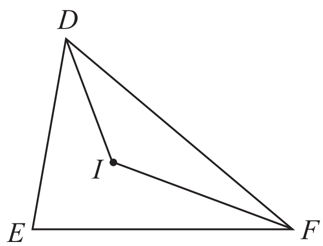
1. 如圖，$I$ 點為 $\triangle DEF$ 的內心，$\angle EFD=40^\circ$，$\angle E=80^\circ$，求 $\angle DIF$。

$\angle EDF=180^\circ-40^\circ-80^\circ=60^\circ$，

$\therefore \angle DIF=180^\circ-\angle IDF-\angle IFD$

$=180^\circ-\dfrac{1}{2}\angle EDF-\dfrac{1}{2}\angle EFD$

$=180^\circ-30^\circ-20^\circ=130^\circ$。



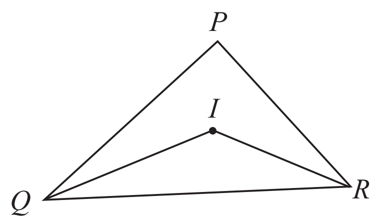

2. 如圖，$I$ 點為 $\triangle PQR$ 的內心，$\angle QIR=135^\circ$，求 $\angle P$。

$\angle IQR+\angle IRQ=180^\circ-135^\circ=45^\circ$，

$\angle P=180^\circ-\angle PQR-\angle PRQ$

$=180^\circ-2(\angle IQR+\angle IRQ)$

$=180^\circ-2\times 45^\circ=90^\circ$。



將三角形的內心與三個頂點連接，可以將原三角形分成三個小三角形，因為內心到三邊的距離相等，因此可以利用此性質討論這三個小三角形的面積比。

如圖 3-15，$\triangle ABC$ 中，$I$ 點為$\triangle ABC$ 的內心，$\overline{ID}\perp\overline{AB}$，$\overline{IE}\perp\overline{BC}$，$\overline{IF}\perp\overline{CA}$，其中 $D$、$E$、$F$ 為垂足，$\overline{ID}$、$\overline{IE}$、$\overline{IF}$ 皆為 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑，令 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}=r$，則$\triangle AIB$：$\triangle BIC$：$\triangle CIA$

$=(\cancel{\frac{1}{2}}\times\overline{AB}\times\cancel{r}):(\cancel{\frac{1}{2}}\times\overline{BC}\times\cancel{r}):(\cancel{\frac{1}{2}}\times\overline{CA}\times\cancel{r})$

$=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}$

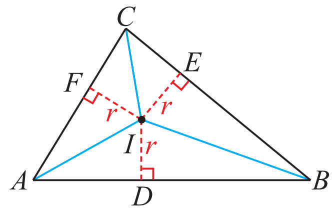
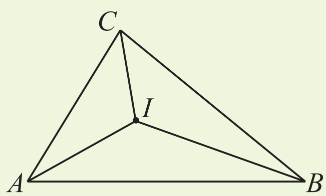


圖 3-15

## 三角形內心與面積

若 $I$ 點為 $\triangle ABC$ 的內心，則
$\triangle AIB:\triangle BIC:\triangle CIA=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}$。




### 隨堂練習

搭配習作 P46 基礎題 4

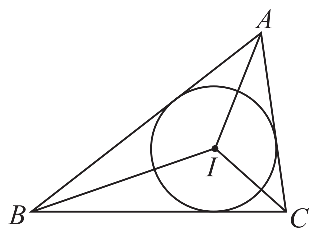
1. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$I$ 點為內切圓的圓心，$\triangle AIB$ 的面積為 24，$\triangle AIC$ 的面積為 15，$\triangle BIC$ 的面積為 21，求 $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}$。

   $\because$ $I$ 點為 $\triangle ABC$ 的內心，

   $\therefore$ $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=\triangle AIB:\triangle AIC:\triangle BIC$

   $=24:15:21$

   $=8:5:7$。




2. 若$\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，$\angle C=90^\circ$，$I$ 點為內心，求$\triangle AIB$：$\triangle BIC$：$\triangle CIA$。

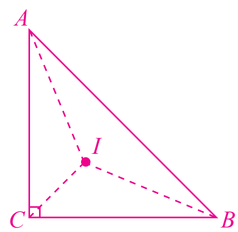
   $\because$$\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，

   $\therefore$$\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}=\sqrt{2}:1:1$。

   又 $I$ 點為 $\triangle ABC$ 的內心，

   $\therefore$$\triangle AIB:\triangle BIC:\triangle CIA=\overline{AB}:\overline{BC}:\overline{CA}$

   $=\sqrt{2}:1:1$。



如圖 3-16，$\triangle ABC$ 中，$I$ 點為內切圓的圓心，$r$ 為內切圓的半徑，$S$ 為 $\triangle ABC$ 的周長，連接 $\overline{IA}$、$\overline{IB}$、$\overline{IC}$，

則 $\triangle ABC = \triangle AIB + \triangle BIC + \triangle CIA$

$$= \frac{1}{2}\times\overline{AB}\times r + \frac{1}{2}\times\overline{BC}\times r + \frac{1}{2}\times\overline{CA}\times r$$

$$= \frac{1}{2}r(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$$

$$= \frac{1}{2}rS。$$

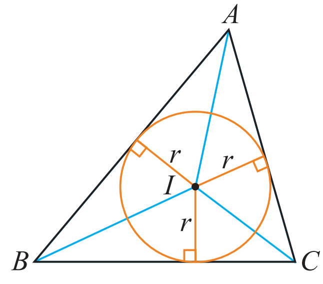


圖 3-16

## 三角形面積與內切圓半徑

若 $r$ 為三角形的內切圓半徑，$S$ 為三角形的周長，

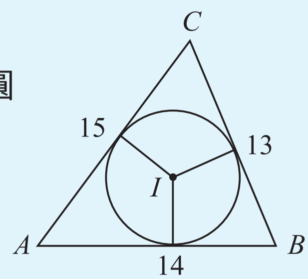
則三角形的面積為 $\frac{1}{2}rS$。

如果已經知道三角形的面積與各邊的邊長，也可利用三角形內心到三邊距離相等的性質，算出三角形內切圓的半徑。

## 例 6 內切圓半徑

搭配習作 P46 基礎題 5

如圖，$I$ 點為 $\triangle ABC$ 的內心，$\triangle ABC$ 的面積為 84，若 $\overline{AC}=15$，$\overline{BC}=13$，$\overline{AB}=14$，求 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑。



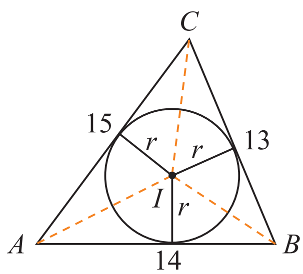

**解** 設內切圓的半徑為 $r$，三角形的周長為 $S$。

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\times r\times S$$

$$84 = \frac{1}{2}\times r\times(14+13+15)$$

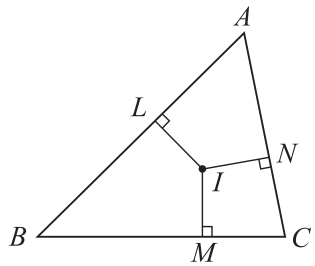
$$r = 4$$

故 $\triangle ABC$ 的內切圓半徑為 4。



**隨堂練習**

如圖，$I$ 點為$\triangle ABC$ 的內心，$\overline{IL}\perp\overline{AB}$，$\overline{IM}\perp\overline{BC}$，$\overline{IN}\perp\overline{AC}$，$\triangle ABC$ 的面積為 $6\sqrt{6}$，$\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{AB}=7$，求 $\overline{IM}$。




$\because I$ 點為 $\triangle ABC$ 的內心，

設內切圓的半徑 $\overline{IM}$ 為 $r$，三角形的周長為 $S$，

則 $\triangle ABC=\frac{1}{2}\times r\times S$

$6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\times r\times(7+6+5)$

$r=\frac{2}{3}\sqrt{6}$

故 $\overline{IM}=\frac{2}{3}\sqrt{6}$。

接下來，將探討直角三角形的兩股、斜邊與內切圓半徑的關係。

如圖 3-17，直角三角形 $ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，內切圓 $I$ 切三邊於 $D$、$E$、$F$ 三點。

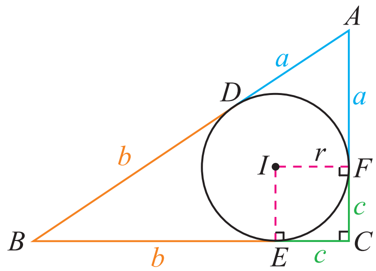



圖 3-17

(1) $\because$ 圓外一點的兩切線段長相等，

$\therefore$ 可令 $\overline{AD}=\overline{AF}=a$，$\overline{BD}=\overline{BE}=b$，$\overline{CE}=\overline{CF}=c$。

(2) 令圓 $I$ 的半徑為 $r$，

$\because \overline{IF}\perp\overline{AC}$，$\overline{IE}\perp\overline{BC}$，$\angle C=90^\circ$，且 $\overline{IE}=\overline{IF}=r$，

$\therefore$ 四邊形 $IECF$ 為正方形，可得 $c=r$。

(3) $\overline{AC}+\overline{BC}=(\overline{AF}+\overline{CF})+(\overline{BE}+\overline{CE})$

$=(a+c)+(b+c)$

$=(a+r)+(b+r)$

$=(a+b)+2r$

$=\overline{AB}+2r$

$\overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AB}+2r$

$\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}=2r$

$r=\dfrac{\overline{AC}+\overline{BC}-\overline{AB}}{2}$

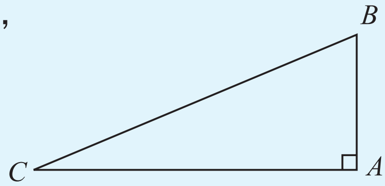
### 直角三角形的內切圓半徑

若 $r$ 為直角三角形的內切圓半徑，則兩股和＝斜邊長＋$2r$，

即 $r=\dfrac{兩股和－斜邊長}{2}$。

## 例 7 直角三角形的內切圓

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=12$，求$\triangle ABC$ 的內切圓半徑。




**解一** $\overline{BC}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，

$\triangle ABC$ 周長 $S=5+12+13=30$，

$\triangle ABC$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times5\times12=30$，

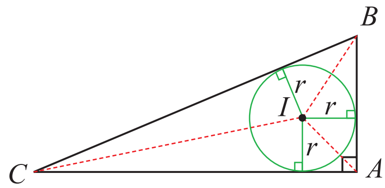
設內切圓半徑為 $r$，

$\triangle ABC$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\times r\times S$

$30=\dfrac{1}{2}\times r\times30$

$r=2$

故內切圓半徑$=2$。




**解二** 斜邊 $\overline{BC}=\sqrt{5^2+12^2}=13$，

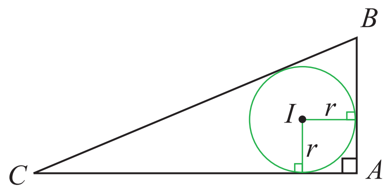
設內切圓半徑為 $r$，

$\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{BC}+2r$

$5+12=13+2r$

$r=2$

故內切圓半徑$=2$。




### 隨堂練習

直角三角形 $ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，$\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=6$，求$\triangle ABC$ 的內切圓半徑。

斜邊 $\overline{AC}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，

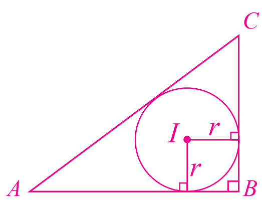
設內切圓半徑為 $r$，

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}+2r$

$8+6=10+2r$

$r=2$

故內切圓半徑為 2。



## 多邊形的內心

如果一個多邊形各邊皆與同一個圓相切，則稱此圓為此多邊形的內切圓，其內切圓的圓心稱為**多邊形的內心**。

### 四邊形的內心

三角形的內心是各內角角平分線的共同交點，那麼四邊形的內心呢？

如圖 3-18，圓外切四邊形 $ABCD$ 與圓 $I$ 的切點為 $E$、$F$、$G$、$H$ 四點，則 $\overline{IE}$、$\overline{IF}$、$\overline{IG}$、$\overline{IH}$ 都是圓 $I$ 的半徑，故 $\overline{IE}=\overline{IF}=\overline{IG}=\overline{IH}$。

$\because$ $\overline{IE}=\overline{IH}$ 且 $\overline{IE}\perp\overline{AB}$、$\overline{IH}\perp\overline{AD}$，

$\therefore$ $\overrightarrow{AI}$ 為 $\angle A$ 的角平分線。

同理 $\overrightarrow{BI}$、$\overrightarrow{CI}$、$\overrightarrow{DI}$ 分別為 $\angle B$、$\angle C$、$\angle D$ 的角平分線，即各內角的角平分線交於圓心 $I$。

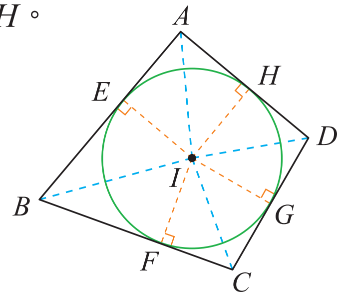


圖 3-18

### $n$ 邊形的內心

如圖 3-19，在圓上取 $n$ 個點，以這些點為切點作切線。這些切線會形成一個各邊皆與圓相切的 $n$ 邊形，此多邊形稱為圓的外切多邊形。因為圓心與各切點的連線垂直各邊，且其長都等於半徑，所以圓心與各頂點的連線為各內角的角平分線，即此圓心為各內角角平分線的共同交點。

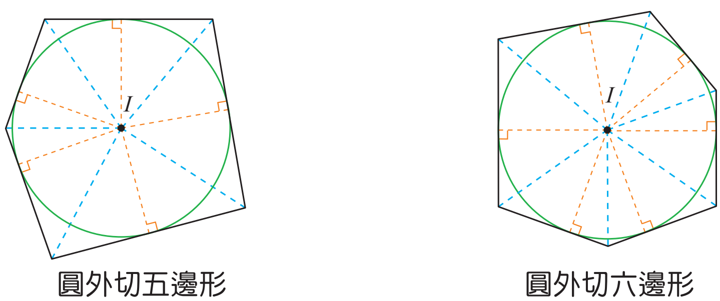


圖 3-19

### 如何尋找多邊形的內心

如圖 3-19，若多邊形的各內角角平分線交於同一點 $I$，則 $I$ 點到多邊形各邊的距離相等，以 $I$ 點為圓心，$I$ 到各邊的距離為半徑畫圓，可得此多邊形的內切圓，其圓心 $I$ 為此多邊形的內心。

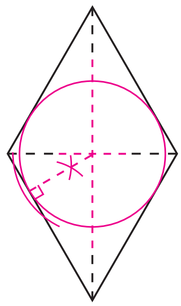
如果多邊形各內角角平分線不是交在同一點，那麼就無法找到一個共同的點到各邊的距離都相等，所以此多邊形沒有內切圓，因此沒有內心。

## 隨堂練習

下列各圖形中，虛線為各內角的角平分線，利用這些角平分線判別哪個圖形有內心？哪個圖形沒有內心？如果有內心，畫出此圖形的內切圓。

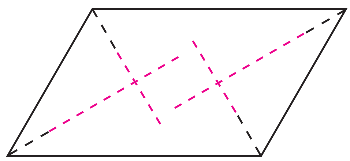
(A)

☑有 ☐沒有



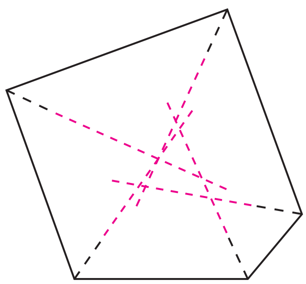
(B)

☐有 ☑沒有



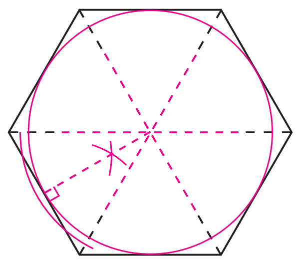
(C)

☐有 ☑沒有



(D)

☑有 ☐沒有



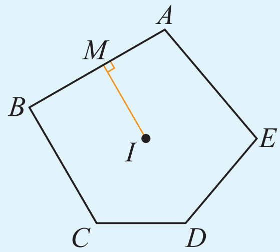
由隨堂練習可知：**邊數大於 3 的多邊形不一定有內心。**

由前面的學習知道，$\triangle ABC$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\times$內切圓半徑$\times\triangle ABC$ 的周長。同樣的特性，在圓外切多邊形是不是也成立呢？以下看看圓外切五邊形的面積。

## 例 8 五邊形面積與內切圓半徑

搭配習作 P46 基礎題 6

已知五邊形 $ABCDE$ 的周長為 40，$I$ 點為內心，$\overline{IM}\perp\overline{AB}$，$\overline{IM}=5$，求此五邊形的面積。




解 ⑴以 $I$ 點為圓心，$\overline{IM}$ 為半徑，畫內切圓，
切點為 $M$、$N$、$P$、$Q$、$R$ 五點。

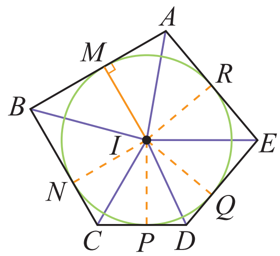
⑵連接 $\overline{IN}$、$\overline{IP}$、$\overline{IQ}$、$\overline{IR}$，
則 $\overline{IM}=\overline{IN}=\overline{IP}=\overline{IQ}=\overline{IR}=r=5$。

⑶連接 $\overline{IA}$、$\overline{IB}$、$\overline{IC}$、$\overline{ID}$、$\overline{IE}$，
五邊形 $ABCDE$ 的面積

$$=\triangle AIB+\triangle BIC+\triangle CID+\triangle DIE+\triangle EIA$$

$$=(\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times r)+(\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times r)+(\frac{1}{2}\times\overline{CD}\times r)+(\frac{1}{2}\times\overline{DE}\times r)+(\frac{1}{2}\times\overline{EA}\times r)$$

$$=\frac{1}{2}\times r\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{EA})=\frac{1}{2}\times5\times40=100$$。




## 多邊形面積與內切圓半徑

若 $r$ 為多邊形的內切圓半徑，$S$ 為多邊形的周長，
則此多邊形的面積為 $\frac{1}{2}rS$。

## 隨堂練習

有一個六邊形的周長為 45，內切圓半徑為 6，求此六邊形的面積。

∵六邊形的周長 $S$ 為 45，內切圓半徑 $r$ 為 6，

∴六邊形的面積$=\frac{1}{2}\times r\times S=\frac{1}{2}\times6\times45=135$。

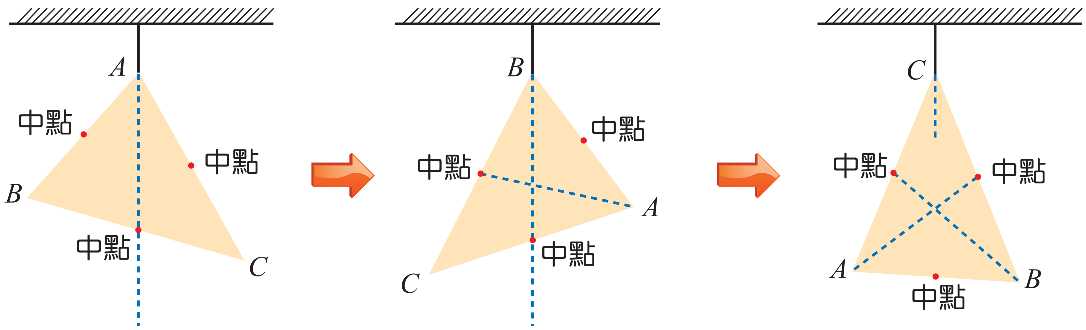
# 3 重心

對應能力指標 9-s-10

在一個材質均勻的三角板中，是否可以找到一個點，使得利用此點支撐起來的三角板可以呈現平衡？

## 探索活動 三角形的重心

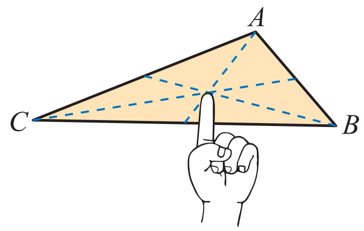
1. 如圖(一)，拿出附件 10 將材質均勻的三角形圖板的頂點穿一個小洞懸掛起來，畫出過懸掛點的鉛垂線，依次輪流懸掛每一個頂點，並畫虛線。由此可觀察到這三條虛線都會通過懸掛頂點的對邊中點。若任兩條虛線交於一點，則第三條虛線會交於同一點嗎？ 會



圖(一)

2. 由實驗得到三角板上所畫的三條中線交於一點，用手指撐起此點，觀察三角板是否呈現平衡狀態？

三角板會呈現平衡狀態。



圖(二)

由 探索活動 可知：材質均勻的三角板上所畫的三條中線交於同一點，由此點支撐起來的三角板可以呈現平衡。此點為物體重力平衡的中心，所以將此點稱為三角板的重心。

## 補給站 如何尋找多邊形的重心

如圖 3-20，將材質均勻的五邊形圖板的頂點穿一個小洞懸掛起來，畫出過懸掛點的鉛垂線，但此線不一定通過對邊中點，依次輪流懸掛每一個頂點，可發現鉛垂線交於同一點。

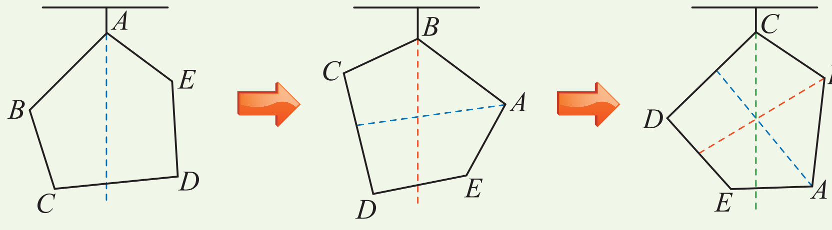



圖 3-20

用手指支撐此點，則此五邊形圖板會呈現平衡狀態，此點即為五邊形圖板的重心。同樣的，所有的多邊形都可以用懸掛的方式找到重心。

接著將利用推理證明，證明三角形的三條中線交於一點。

如圖 3-21，$\triangle ABC$ 中，$D$、$E$、$F$ 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的中點，且 $\overline{BE}$ 和 $\overline{CF}$ 兩條中線交於 $G$ 點。

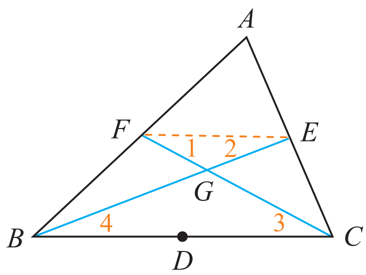



圖 3-21

(1) 連接 $\overline{EF}$。

(2) $\because$ $E$、$F$ 分別為 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的中點，

$\therefore \overline{EF} \,/\!/\, \overline{BC}$ 且 $\overline{EF}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}$。

(3) 在$\triangle GBC$ 與$\triangle GEF$ 中，

$\angle 1=\angle 3$、$\angle 2=\angle 4$（$\overline{EF} \,/\!/\, \overline{BC}$），

則$\triangle GBC \sim \triangle GEF$（$AA$ 相似性質），

故 $\overline{BG}：\overline{GE}=\overline{BC}：\overline{EF}=2：1$。

如圖 3-22，設 $\overline{AD}$ 與 $\overline{BE}$ 兩條中線交於 $G'$ 點，同理 $\overline{BG'}：\overline{G'E}=2：1$，故 $G$ 與 $G'$ 是同一點，即三角形的三條中線交於一點，此點為三角形的**重心**。

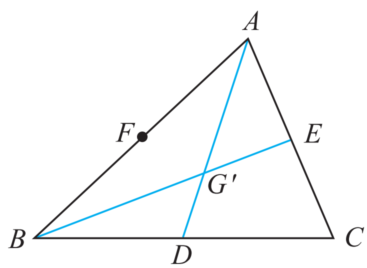
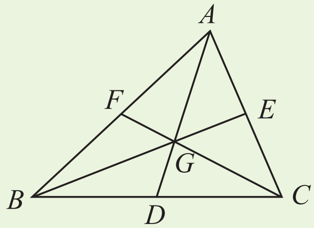



圖 3-22

## 三角形重心性質

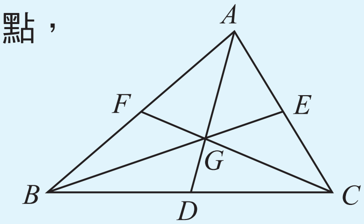
如圖，$\triangle ABC$ 中，若 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為三條中線，
則 $G$ 點為重心，且 $\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$，
$\overline{BG}:\overline{GE}=2:1$，$\overline{CG}:\overline{GF}=2:1$。




## 例 9 重心到頂點的距離

搭配習作 P47 基礎題 7

如圖，$\triangle ABC$ 中，三條中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於 $G$ 點，
$\overline{AD}=12$，$\overline{BE}=18$，$\overline{CF}=15$，求 $\overline{AG}$、$\overline{BG}$、$\overline{CG}$。




解 $\because G$ 為三條中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 的交點，
$\therefore G$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心，
故 $\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$，$\overline{BG}:\overline{GE}=2:1$，$\overline{CG}:\overline{GF}=2:1$。

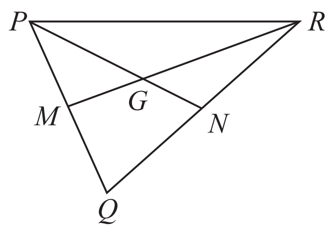
即 $\overline{AG}=\dfrac{2}{3}\overline{AD}=\dfrac{2}{3}\times 12=8$。

$\overline{BG}=\dfrac{2}{3}\overline{BE}=\dfrac{2}{3}\times 18=12$。

$\overline{CG}=\dfrac{2}{3}\overline{CF}=\dfrac{2}{3}\times 15=10$。

## 隨堂練習

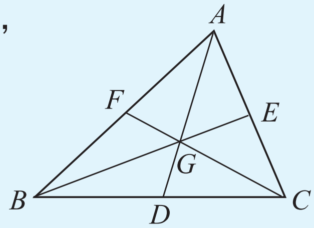
如圖，$\triangle PQR$ 中，$M$、$N$ 分別為 $\overline{PQ}$、$\overline{QR}$ 的中點，$\overline{PN}$、$\overline{RM}$ 交於 $G$ 點，
若 $\overline{GM}+\overline{GN}=5$，求 $\overline{PN}+\overline{RM}$。




$\because G$ 點為 $\triangle PQR$ 的重心，
$\therefore \overline{PN}=3\overline{GN}$，$\overline{RM}=3\overline{GM}$，
故 $\overline{PN}+\overline{RM}=3\overline{GN}+3\overline{GM}$
$=3(\overline{GN}+\overline{GM})$
$=3\times 5=15$。

## 例10 重心與面積

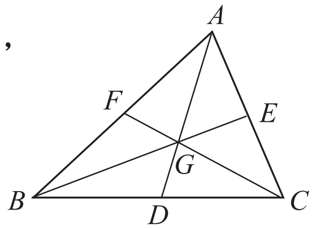
如圖，$\triangle ABC$ 的三條中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於 $G$ 點，
求證$\triangle AGB$、$\triangle BGC$、$\triangle CGA$ 的面積相等。




證明 (1) $\triangle ABC$ 中，$D$ 為 $\overline{BC}$ 中點，$\overline{BD}=\overline{CD}$，
$\therefore \triangle ABD=\triangle ACD$（等底同高），
同理，$\triangle BGD=\triangle CGD$。
(2) $\triangle AGB=\triangle ABD-\triangle BGD=\triangle ACD-\triangle CGD=\triangle CGA$，
同理，$\triangle BGC=\triangle CGA$，
$\therefore \triangle AGB=\triangle BGC=\triangle CGA$。

### 隨堂練習

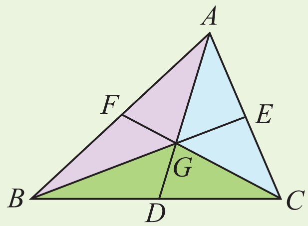
如圖，$\triangle ABC$ 的三條中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於 $G$ 點，
求證$\triangle AFG$ 的面積$=\dfrac{1}{6}\triangle ABC$ 的面積。




$\because F$ 為 $\overline{AB}$ 中點，
$\therefore \triangle AFG=\dfrac{1}{2}\triangle ABG=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\triangle ABC=\dfrac{1}{6}\triangle ABC$。

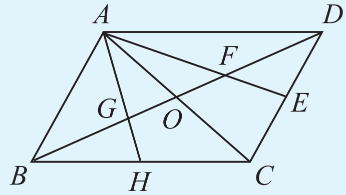
## 三角形重心與面積

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為三條中線，
$G$ 點為重心，則：
(1) $\triangle AGB=\triangle BGC=\triangle CGA=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$。
(2) $\triangle AGF=\triangle BGF=\triangle BGD=\triangle CGD$
$=\triangle CGE=\triangle AGE=\dfrac{1}{6}\triangle ABC$。



## 例11 重心的應用

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，$O$ 為對角線 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 的交點，$E$ 為 $\overline{CD}$ 中點，$H$ 為 $\overline{BC}$ 中點，求證 $\overline{BG}=\overline{GF}=\overline{FD}$。




**證明** (1) ∵平行四邊形對角線互相平分，

∴ $\overline{AO}=\overline{OC}$，$\overline{BO}=\overline{OD}$。

(2) $\triangle ABC$ 中，$O$ 為 $\overline{AC}$ 中點，$H$ 為 $\overline{BC}$ 中點，

∴$G$ 點為$\triangle ABC$ 的重心，

故 $\overline{BG}=\dfrac{2}{3}\overline{BO}$，$\overline{GO}=\dfrac{1}{3}\overline{BO}$。

同理，$\overline{FD}=\dfrac{2}{3}\overline{OD}$，$\overline{FO}=\dfrac{1}{3}\overline{OD}$。

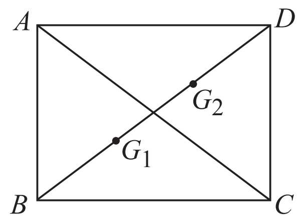
(3) ∵ $\overline{BO}=\overline{OD}$，

∴ $\overline{GF}=\overline{GO}+\overline{FO}=\dfrac{1}{3}\overline{BO}+\dfrac{1}{3}\overline{OD}=\dfrac{2}{3}\overline{BO}$，

故 $\overline{BG}=\overline{GF}=\overline{FD}$。

## 隨堂練習

如圖，長方形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=9$，$\overline{BC}=12$，若 $G_1$、$G_2$ 兩點分別為$\triangle ABC$、$\triangle ACD$ 的重心，求 $\overline{G_1G_2}$。




$\overline{BD}=\sqrt{12^2+9^2}=15$，

∵$G_1$、$G_2$ 分別為$\triangle ABC$、$\triangle ACD$ 的重心，

∴$\overline{BG_1}=\overline{G_1G_2}=\overline{G_2D}$，

故 $\overline{G_1G_2}=\dfrac{1}{3}\overline{BD}=\dfrac{1}{3}\times 15=5$。

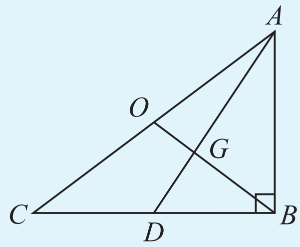
## 例 12 直角三角形的重心與外心

搭配習作 P47 基礎題 8

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，兩條中線 $\overline{AD}$、$\overline{BO}$ 交於 $G$ 點，$\overline{AB}=6$，$\overline{BC}=8$，求：

(1) $\overline{GO}$。

(2) $\triangle ABG$ 的面積。




解 (1) ∵ $O$ 點為直角三角形 $ABC$ 的斜邊中點，

∴ $O$ 點為 $\triangle ABC$ 的外心，

$\overline{AC}=\sqrt{6^2+8^2}=10$。

$\overline{BO}=\overline{AO}=\overline{CO}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times 10=5$。

又 $\triangle ABC$ 的兩條中線交於 $G$ 點，

∴ $G$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心。

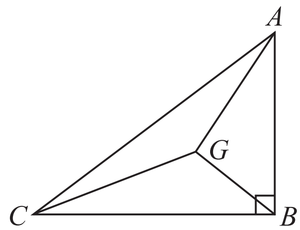
故 $\overline{GO}=\dfrac{1}{3}\overline{BO}=\dfrac{1}{3}\times 5=\dfrac{5}{3}$。

(2) ∵ $G$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心，

∴ $\triangle ABG$ 的面積 $=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$ 的面積

$=\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times 6\times 8)$

$=8$。




如圖 3-23，直角三角形 $ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，兩條中線 $\overline{AD}$、$\overline{BO}$ 交於 $G$ 點。

(1) ∵ $G$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心，

∴ $\overline{BG}:\overline{GO}=2:1$。…… ①

(2) 直角三角形的外心在斜邊中點，

∴ $O$ 點為 $\triangle ABC$ 的外心，

因此 $\overline{OB}=\overline{OA}=\overline{OC}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$。…… ②

(3) 由 ①、② 式可得 $\overline{GO}=\dfrac{1}{3}\overline{OB}=\dfrac{1}{6}\overline{AC}$。

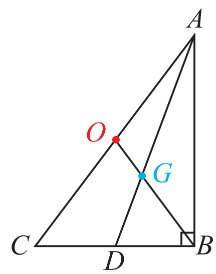


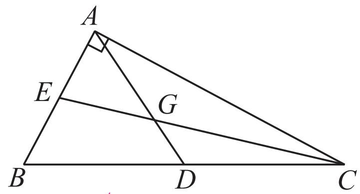

圖 3-23

## 隨堂練習

如圖，$\triangle ABC$ 中，$G$ 點為重心，$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=15$，$\angle BAC=90^\circ$，求：

(1) 重心到外心的距離。

(2) 四邊形 $EBDG$ 的面積。

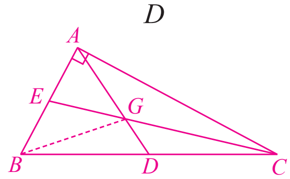



(1) $\overline{BC}=\sqrt{8^2+15^2}=17$，

$\because D$ 點為外心，$\therefore \overline{AD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 17=\frac{17}{2}$，

$G$ 點為重心，$\therefore \overline{GD}=\frac{1}{3}\overline{AD}=\frac{1}{3}\times\frac{17}{2}=\frac{17}{6}$，

故重心到外心的距離為 $\frac{17}{6}$。




(2) 連接 $\overline{BG}$，

則四邊形 $EBDG$ 的面積 $=\triangle BEG+\triangle BDG=\frac{1}{6}\triangle ABC+\frac{1}{6}\triangle ABC$

$=\frac{2}{6}\times(\frac{1}{2}\times 8\times 15)=20$。

如圖 3-24，$\overline{AD}$ 是等腰三角形 $ABC$ 的對稱軸，$\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 的中垂線，也是 $\overline{BC}$ 的中線與 $\angle BAC$ 的角平分線，因此等腰三角形 $ABC$ 的外心 $O$ 點、重心 $G$ 點與內心 $I$ 點都在 $\overline{AD}$ 上，即 $O$、$G$ 、$I$ **三點共線**。

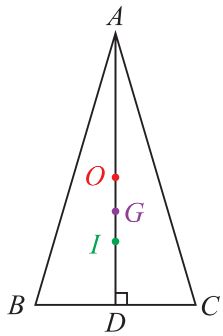
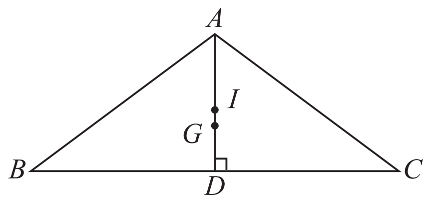


圖 3-24

## 隨堂練習

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=15$，$\overline{BC}=24$，$\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 的中垂線，若 $I$ 點為內心，$G$ 點為重心，求：

(1) $\overline{GD}$。 (2) $\overline{ID}$。 (3) $\overline{GI}$。




(1) $\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 24=12$，

$\overline{AD}=\sqrt{15^2-12^2}=9$，

$\overline{GD}=\frac{1}{3}\overline{AD}=\frac{1}{3}\times 9=3$。

(2) $\because I$ 點為內心，$\therefore \overline{ID}$ 為內切圓的半徑，

$\triangle ABC$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times$ 內切圓半徑 $\times\triangle ABC$ 的周長

$\frac{1}{2}\times 24\times 9=\frac{1}{2}\times\overline{ID}\times(15+15+24)$

$\overline{ID}=4$。

(3) $\overline{GI}=\overline{ID}-\overline{GD}$

$=4-3$

$=1$。

# 4 正多邊形的心

對應能力指標 9-s-11

如圖 3-25，正三角形的對稱軸既是三邊的中線，同時也是三邊的中垂線與三內角的角平分線，因此這三條對稱軸的交點 $G$ 是正三角形的重心、外心與內心，即**正三角形的重心、外心與內心是同一點**。

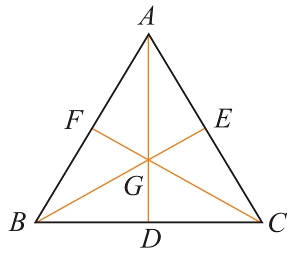
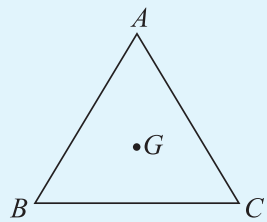



圖 3-25

## 例 13 正三角形的三心

搭配習作 P47 基礎題 9

如圖，正三角形 $ABC$ 的邊長為12，若 $G$ 點為重心，求 $\triangle ABC$ 外接圓的半徑。



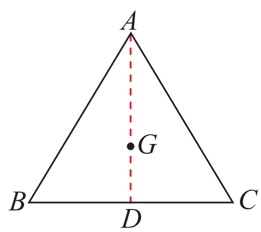

解 連接 $\overline{AG}$，並延長 $\overline{AG}$ 交 $\overline{BC}$ 於 $D$ 點，

$\because$ 正三角形的外心與重心是同一點，

$\therefore \overline{AG}$ 就是外接圓的半徑，

$\overline{BD}=\overline{DC}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=6$，$\overline{AD}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$，

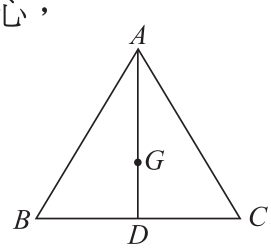
$\overline{AG}=\overline{AD}\times\dfrac{2}{3}=6\sqrt{3}\times\dfrac{2}{3}=4\sqrt{3}$。




## 隨堂練習

搭配習作 P47 基礎題 9

如圖，正三角形 $ABC$ 的邊長為 6，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，若 $G$ 點為重心，求 $\triangle ABC$ 內切圓的半徑。




$\because$ 正三角形的內心與重心是同一點，

$\therefore \overline{GD}$ 就是內切圓的半徑，

$\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times 6=3$，

$\overline{AD}=\sqrt{6^2-3^2}=3\sqrt{3}$，

$\overline{GD}=\dfrac{1}{3}\overline{AD}=\dfrac{1}{3}\times 3\sqrt{3}=\sqrt{3}$，

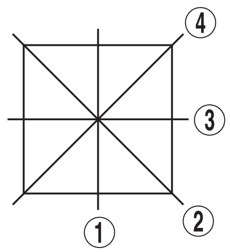
故 $\triangle ABC$ 內切圓的半徑為 $\sqrt{3}$。

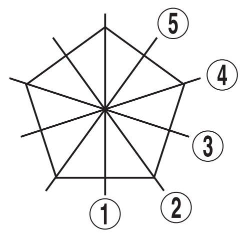
正多邊形的對稱軸是否也像正三角形的對稱軸一樣，是邊上的中垂線或內角的角平分線呢？

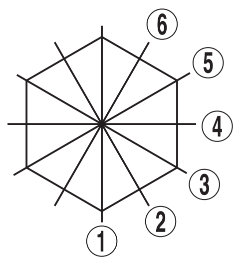
## 探索活動 正多邊形的對稱軸

下列各正多邊形中，其對稱軸如下：

(A)正方形　(B)正五邊形　(C)正六邊形




1. 觀察各圖形的對稱軸，指出哪些是邊上的中垂線？（以代號表示）

(A) ①、③　(B) ①、②、③、④、⑤　(C) ②、④、⑥

2. 觀察各圖形的對稱軸，指出哪些是內角的角平分線？（以代號表示）

(A) ②、④　(B) ①、②、③、④、⑤　(C) ①、③、⑤

由 探索活動 可知：

(1)若一個正多邊形的邊數是偶數，則其對稱軸是各邊的中垂線，或是各內角的角平分線。

(2)若一個正多邊形的邊數是奇數，則其對稱軸是各邊的中垂線，同時也是各內角的角平分線。

(3)這些對稱軸都交於一點。

由上述推知：正多邊形的外心與內心是同一點，即一個正多邊形，其外接圓與內切圓同圓心，因此兩圓為同心圓。如圖 3-26，正方形其外接圓與內切圓都是以 $O$ 點為圓心的同心圓。

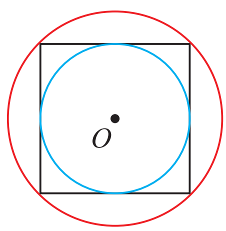



圖 3-26

如圖 3-27，將正多邊形的頂點懸掛起來，畫出過懸掛點的鉛垂線，則此鉛垂線就是該正多邊形的對稱軸。

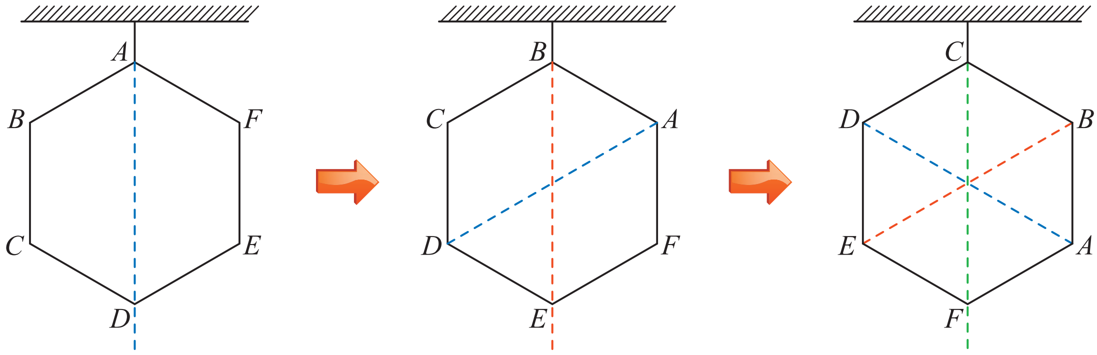
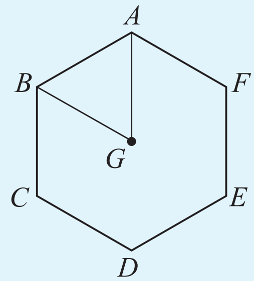



圖 3-27

正多邊形的所有對稱軸交於一點，此點也是正多邊形的重心。因為正多邊形所有對稱軸的交點是其外心與內心，因此**正多邊形的外心、內心與重心是同一點**。

### 例 14 正六邊形的面積

如圖，$G$ 點為正六邊形 $ABCDEF$ 的重心，求證$\triangle AGB$ 為正三角形。




**證明** (1) $\angle BAF=\dfrac{(6-2)\times 180^\circ}{6}=120^\circ$。

(2) $\because$ $G$ 點為正六邊形的重心，也是正六邊形的內心，

$\therefore$ $\overline{AG}$ 為 $\angle BAF$ 的角平分線。

$\angle BAG=\dfrac{1}{2}\angle BAF=\dfrac{1}{2}\times 120^\circ=60^\circ$，

同理 $\angle ABG=60^\circ$，

$\therefore \angle AGB=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$，

故 $\triangle AGB$ 為正三角形。

由例題 14 可知：$\triangle BGC$、$\triangle CGD$、$\triangle DGE$、$\triangle EGF$、$\triangle FGA$ 均為正三角形，如圖 3-28。
又 $\overline{GA}=\overline{GB}=\overline{GC}=\overline{GD}=\overline{GE}=\overline{GF}$，所以$\triangle AGB$、$\triangle BGC$、$\triangle CGD$、$\triangle DGE$、$\triangle EGF$、$\triangle FGA$ 皆為全等的正三角形。

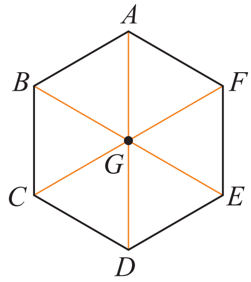
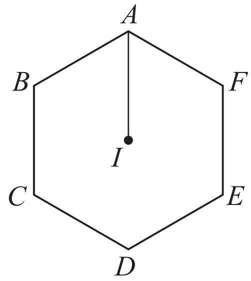


圖 3-28

**隨堂練習**

如圖，正六邊形 $ABCDEF$ 中，$I$ 點為內心，$\overline{IA}=6$，求此正六邊形的面積。




正六邊形的面積 $=6\times\triangle AIB$ 的面積

$$=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 6^2$$

$$=54\sqrt{3}$$ 。

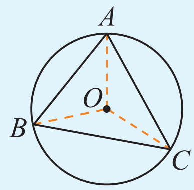
# 重點回顧

## ① 外心：

(1) 三角形的外心：

三角形三邊的中垂線交於一點，此點稱為三角形的外心，外心到三頂點的距離相等，且外心也是此三角形外接圓的圓心。

**例** 如圖，$\triangle ABC$ 中，$O$ 點為外心，則 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$。




(2) 三角形外心的位置：

① 銳角三角形的外心在三角形內部。

② 直角三角形的外心在三角形的斜邊中點。

③ 鈍角三角形的外心在三角形外部。

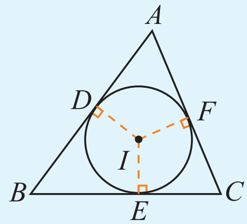
(3) 多邊形的外心：

如果一個多邊形各邊的中垂線交於同一點，此點稱為多邊形的外心，外心到各頂點的距離相等，且外心也是此多邊形外接圓的圓心。

## ❷ 內心：

(1) 三角形的內心：

三角形三內角的角平分線交於一點，此點稱為三角形的內心，內心到三邊的距離相等，且內心也是此三角形內切圓的圓心。




例 如圖，$\triangle ABC$ 中，$I$ 點為內心，則 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$。

(2) 三角形內心與面積：

若 $I$ 點為 $\triangle ABC$ 的內心，則 $\triangle AIB：\triangle BIC：\triangle CIA=\overline{AB}：\overline{BC}：\overline{CA}$。

(3) 三角形的內切圓半徑：

①若 $r$ 為三角形的內切圓半徑，$S$ 為三角形的周長，
則三角形的面積為 $\frac{1}{2}rS$。

②若 $r$ 為直角三角形的內切圓半徑，則兩股和＝斜邊長＋$2r$，
即 $r=\frac{\text{兩股和}-\text{斜邊長}}{2}$。

(4) 多邊形的內心：

如果一個多邊形各內角的角平分線交於同一點，此點稱為多邊形的內心，內心到各邊的距離相等，且內心也是此多邊形內切圓的圓心。

## ❸ 三角形的重心：

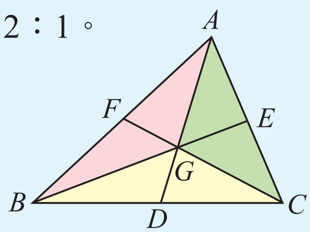
(1) 三角形的三條中線交於一點，此點為三角形的重心。

(2) 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為三條中線，$G$ 點為重心，則：

① $\overline{AG}：\overline{GD}=2：1$，$\overline{BG}：\overline{GE}=2：1$，$\overline{CG}：\overline{GF}=2：1$。

② $\triangle AGB=\triangle BGC=\triangle CGA=\frac{1}{3}\triangle ABC$。

③ $\triangle AGF=\triangle BGF=\triangle BGD=\triangle CGD$
$=\triangle CGE=\triangle AGE=\frac{1}{6}\triangle ABC$。




## ❹ 正多邊形的外心、內心與重心：

正多邊形的外心、內心與重心是同一點。

# 3-2自我評量

**1** 若直角三角形的兩股長為 2、6，求其外心到三個頂點的距離和。

課 P147 例 1

斜邊長 $=\sqrt{2^2+6^2}=2\sqrt{10}$，

$\therefore$ 外心到三頂點的距離和 $=3\times(\frac{1}{2}\times2\sqrt{10})$

$=3\sqrt{10}$。

答：$3\sqrt{10}$。

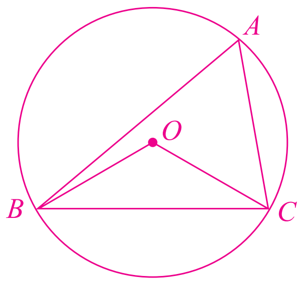
**2** $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=60^\circ$，$\angle B=40^\circ$，若 $O$ 點為 $\triangle ABC$ 的外心，求 $\angle BOC$。

課 P149 例 3

如圖，圓 $O$ 為 $\triangle ABC$ 的外接圓，

$\because O$ 點為 $\triangle ABC$ 的外心，

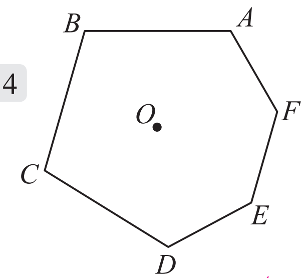
$\therefore \angle BOC=\overset{\frown}{BC}=2\angle A=2\times60^\circ=120^\circ$。




答：$120^\circ$。

**3** 如圖，$O$ 點為六邊形 $ABCDEF$ 的外心，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$，$\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FA}$，求 $\angle A$。

課 P152 例 4




連接 $\overline{OA}$、$\overline{OB}$、$\overline{OC}$、$\overline{OD}$、$\overline{OE}$、$\overline{OF}$，

$\because O$ 點為六邊形的外心，

$\therefore \overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{OF}$，

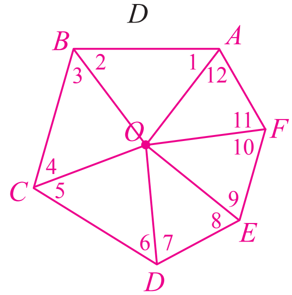
設 $\angle1=\angle2=\angle3=\angle4=\angle5=\angle6=x^\circ$，

$\angle7=\angle8=\angle9=\angle10=\angle11=\angle12=y^\circ$，

又 $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=(6-2)\times180^\circ$，

$6x^\circ+6y^\circ=720^\circ$，$x^\circ+y^\circ=120^\circ$，

故 $\angle A=\angle1+\angle12=x^\circ+y^\circ=120^\circ$。




答：$120^\circ$。

**4** $\triangle ABC$ 的面積為 24，其內切圓半徑為 2，求$\triangle ABC$ 的周長。 課 P158 例 6

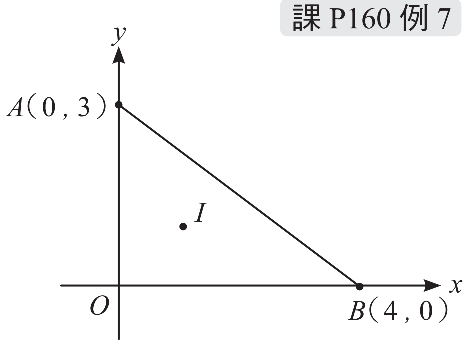
$\triangle ABC$ 的面積$=\frac{1}{2}\times$內切圓半徑$\times\triangle ABC$ 的周長

$24=\frac{1}{2}\times 2\times\triangle ABC$ 的周長

$\triangle ABC$ 的周長$=24$。

答：24。

**5** 如圖，坐標平面上三點，$A(0,3)$、$B(4,0)$，$I$ 點為 $\triangle AOB$ 的內心，求 $I$ 點坐標。 課 P160 例 7




$\overline{OA}=3$，$\overline{OB}=4$，

$\overline{AB}=\sqrt{\overline{OA}^2+\overline{OB}^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$，

設內切圓半經為 $r$，

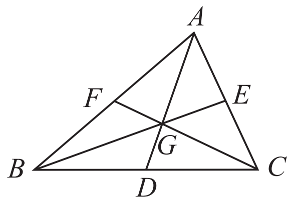
則 $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{AB}+2r$

$3+4=5+2r$

$r=1$

故 $I$ 點坐標為$(1,1)$。 答：$(1,1)$。

**6** 如圖，$G$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心，三中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$，若 $\overline{AG}+\overline{BG}+\overline{CG}=16$ 公分，求 $\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}$。 課 P166 例 9




$\because G$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心，

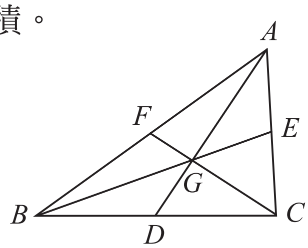
$\therefore \overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AD}$，$\overline{BG}=\frac{2}{3}\overline{BE}$，$\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{CF}$，

則 $\overline{AG}+\overline{BG}+\overline{CG}=\frac{2}{3}\overline{AD}+\frac{2}{3}\overline{BE}+\frac{2}{3}\overline{CF}$，

$16=\frac{2}{3}(\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF})$

$\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{CF}=24$。 答：24 公分。

**7** 如圖，$\triangle ABC$ 中，三條中線 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 交於 $G$ 點，$\triangle ABC$ 的面積為 48 平方公分，求四邊形 $AEGF$ 的面積。 課 P170 隨堂




四邊形 $AEGF$ 的面積

$=\triangle AGE+\triangle AGF$

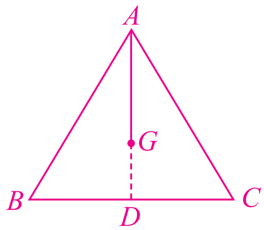
$=\frac{1}{6}\triangle ABC+\frac{1}{6}\triangle ABC$

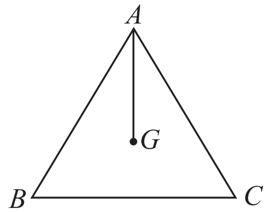
$=\frac{2}{6}\times 48$

$=16$

答：16 平方公分。

**8** 如圖，正三角形 $ABC$ 中，$G$ 點為重心，$\overline{AG}=8$，求 $\triangle ABC$ 內切圓的面積。 課 P171 隨堂




延長 $\overline{AG}$ 交 $\overline{BC}$ 於 $D$ 點，

$\because$ 正三角形的內心與重心是同一點，

$\therefore \overline{GD}$ 就是內切圓的半徑，

又 $\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$，

$\therefore \overline{GD}=\frac{1}{2}\overline{AG}=\frac{1}{2}\times 8=4$，

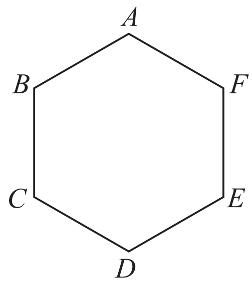
故 $\triangle ABC$ 內切圓的面積 $=4\times 4\times\pi=16\pi$。

答：$16\pi$。

**9** 如圖，正六邊形 $ABCDEF$，$\overline{AD}=20$，求： 課 P174 隨堂

(1) 外接圓的半徑。

(2) 內切圓的半徑。




如圖，連接 $\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$，三條對稱軸交於 $G$ 點，則 $G$ 點為正六邊形 $ABCDEF$ 的外心、內心與重心，

(1) $\overline{AG}=\overline{GD}=20\div 2=10$，

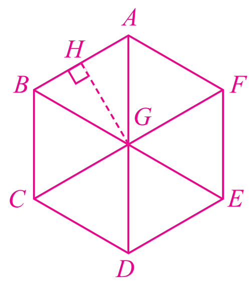
故外接圓的半徑為 10。

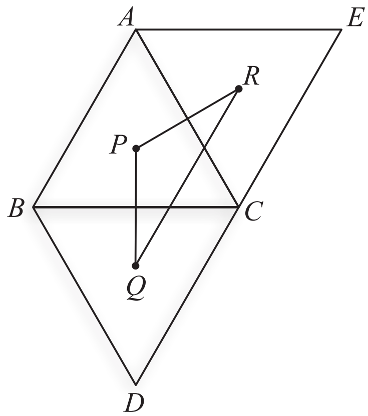
(2) 作 $\overline{GH}\perp\overline{AB}$，則 $\overline{GH}$ 為內切圓的半徑，

又 $\triangle ABG$ 為正三角形，

$\therefore \overline{GH}=\sqrt{10^2-5^2}=5\sqrt{3}$，

故內切圓的半徑為 $5\sqrt{3}$。 答：(1) 10，(2) $5\sqrt{3}$。






如圖，$P$ 點為正三角形 $ABC$ 的內心，$Q$ 點為正三角形 $BCD$ 的外心，$R$ 點為正三角形 $ACE$ 的重心，已知 $\overline{AB}=12$，回答下列問題：

(1)求 $\overline{PQ}$ 與 $\overline{PR}$。

解 ∵正三角形的外心、內心與重心是同一點，

$\therefore \overline{PF}=\overline{FQ}$，延長 $\overrightarrow{QP}$，

則 $\overrightarrow{QP}$ 會通過 $A$ 點（$\overline{PF}$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線），

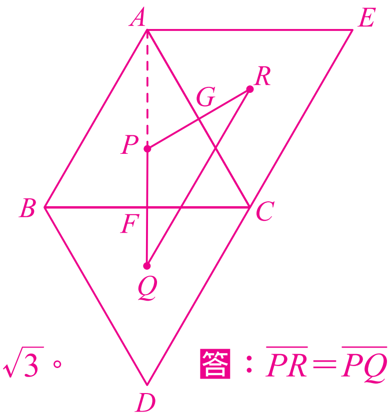
$\overline{BF}=\overline{CF}=\frac{1}{2}\,\overline{BC}=\frac{1}{2}\times 12=6$，

$\overline{AF}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$，

$\overline{PF}=\frac{1}{3}\overline{AF}=\frac{1}{3}\times 6\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，

$\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{FQ}=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，

同理 $\overline{PF}=\overline{PG}$，$\overline{PG}=\overline{RG}$，故 $\overline{PR}=\overline{PQ}=4\sqrt{3}$。




答：$\overline{PR}=\overline{PQ}=4\sqrt{3}$。

(2)求 $\angle QPR$ 的度數。

解 ∵ $\overline{AF}$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線，

$\therefore \angle PFC=90^\circ$，

同理 $\angle PGC=90^\circ$，

$\angle QPR=360^\circ-90^\circ-90^\circ-60^\circ=120^\circ$。

答：$120^\circ$。

(3)求 $\triangle PQR$ 的面積。

解 過 $R$ 點做垂線，交 $\overline{AP}$ 於 $H$，

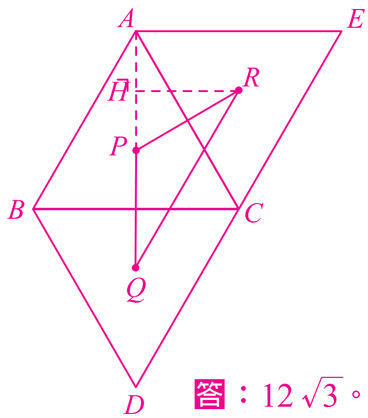
$\angle RPH=180^\circ-120^\circ=60^\circ$，

$\triangle RPH$ 為 $30^\circ$-$60^\circ$-$90^\circ$ 的直角三角形，

$\sqrt{3}:2=\overline{RH}:4\sqrt{3}$

$\overline{RH}=6$

故 $\triangle PQR$ 的面積為 $\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 6=12\sqrt{3}$。




答：$12\sqrt{3}$。

解答P182

# 旁心

三角形的任意兩角的外角平分線和第三個角的內角平分線交於一點，如圖 3-29，像這種點對於一個三角形而言共有三個，它們都稱為三角形的**旁心**，旁心恆在三角形的外部。如圖 3-30，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=c$，$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，其中 $I_a$ 表示與 $\overline{BC}$ 相切的旁切圓圓心，$I_b$ 表示與 $\overline{AC}$ 相切的旁切圓圓心，$I_c$ 表示與 $\overline{AB}$ 相切的旁切圓圓心。

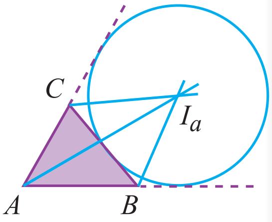


圖 3-29

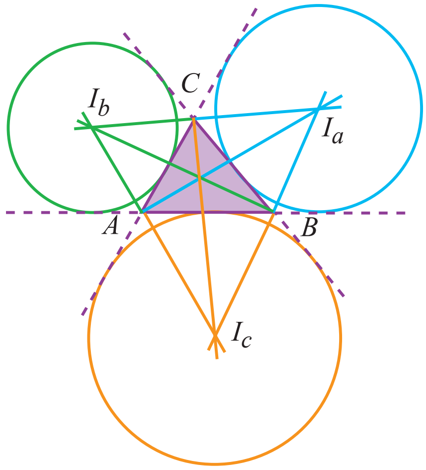


圖 3-30

同學可能還有一個疑問？像外心到三頂點等距離，內心到三邊等距離，那旁心有什麼性質呢？

如圖 3-31，旁切圓與內切圓不同之處在於內切圓在三角形的內部（因為內心是三條內角平分線的交點），且與三角形三邊的直線相切；而旁切圓雖然也與三角形三邊的直線相切，但是它在三角形的外部，既然旁心也是角平分線的交點，所以它到兩邊的延長線及三角形第三邊的距離也相等。

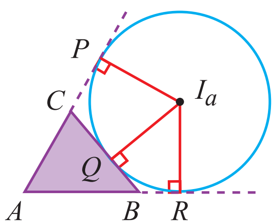
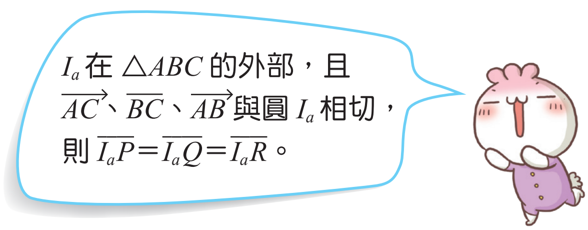
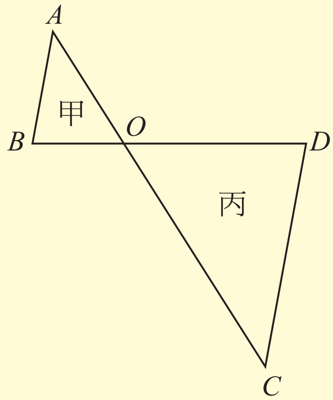


圖 3-31



# 自我挑戰解答

## 第 1 章　P66




(1)在 $\triangle AOB$ 與 $\triangle COD$ 中，

$\because \overline{OA}:\overline{OC}=\overline{OB}:\overline{OD}$（已知），

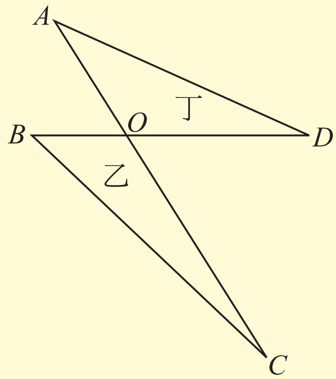
$\angle AOB=\angle COD$（對頂角相等），

$\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD$（$SAS$ 相似性質），

故甲和丙相似。

答：相似。

(2)設 $\overline{OA}=r$，$\overline{OC}=2r$，$\overline{OB}=k$，$\overline{OD}=2k$，其中 $r$、$k$ 均為正數（$r\neq k$），




在 $\triangle AOD$ 與 $\triangle BOC$ 中，

$\because \angle AOD=\angle BOC$（對頂角相等），

但 $\overline{OA}:\overline{OC}=r:2r=1:2$，

$\overline{OD}:\overline{OB}=2k:k=2:1$，

$\therefore \overline{OA}:\overline{OC}\neq\overline{OD}:\overline{OB}$，

又 $\overline{OA}:\overline{OB}=r:k$，

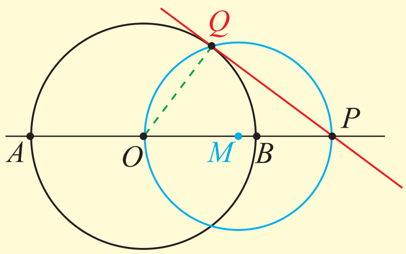
$\overline{OD}:\overline{OC}=2k:2r=k:r$，

$\therefore \overline{OA}:\overline{OB}\neq\overline{OD}:\overline{OC}$（$\because r\neq k$），

故乙和丁不相似。

答：不相似。

## 第 2 章　P124



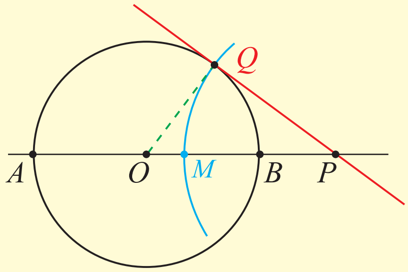

(1)連接 $\overline{OQ}$，

$\because \angle OQP$ 為半圓所對的圓周角，

$\therefore \angle OQP=90^\circ$，

故 $\overline{OQ}\perp\overleftrightarrow{PQ}$，

因此 $\overleftrightarrow{PQ}$ 為圓 $O$ 的切線。




(2)連接 $\overline{OQ}$，

$\because \overline{OB}:\overline{BP}=3:2$，

可設 $\overline{OB}=3x$，$\overline{BP}=2x$，$x\neq 0$，

則 $\overline{OQ}=\overline{OB}=3x$，

$\overline{OP}=\overline{OB}+\overline{BP}=3x+2x=5x$，

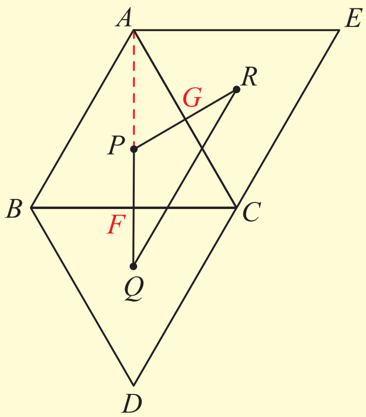
$\overline{PQ}=\overline{PM}=\dfrac{1}{2}\overline{AP}=\dfrac{1}{2}(\overline{AO}+\overline{OP})=\dfrac{1}{2}(3x+5x)=4x$，

$\because \overline{OQ}^2+\overline{PQ}^2=(3x)^2+(4x)^2=9x^2+16x^2=25x^2=(5x)^2=\overline{OP}^2$，

$\therefore \triangle OPQ$ 為直角三角形，且 $\angle OQP=90^\circ$，

故 $\overline{OQ}\perp\overleftrightarrow{PQ}$，因此 $\overleftrightarrow{PQ}$ 為圓 $O$ 的切線。

## 第 3 章　P179




(1)$\because$ 正三角形的外心、內心與重心是同一點，$\therefore \overline{PF}=\overline{FQ}$，

延長 $\overrightarrow{QP}$，則 $\overrightarrow{QP}$ 會通過 $A$ 點（$\overline{PF}$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線），

$\overline{BF}=\overline{CF}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times 12=6$，

$\overline{AF}=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$，

$\overline{PF}=\dfrac{1}{3}\overline{AF}=\dfrac{1}{3}\times 6\sqrt{3}=2\sqrt{3}$，

$\overline{PQ}=\overline{PF}+\overline{FQ}=2\sqrt{3}+2\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，

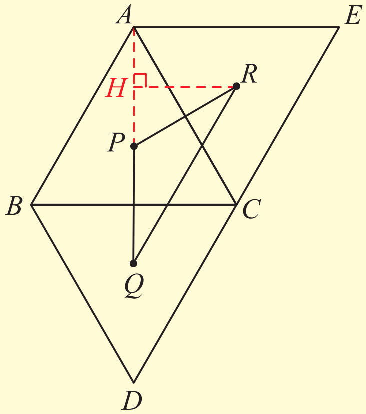
同理 $\overline{PF}=\overline{PG}$，$\overline{PG}=\overline{RG}$，

故 $\overline{PR}=\overline{PQ}=4\sqrt{3}$。　　　答：$\overline{PQ}=\overline{PR}=4\sqrt{3}$。

(2)$\because \overline{AF}$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線，$\therefore \angle PFC=90^\circ$，

同理 $\angle PGC=90^\circ$，$\angle QPR=360^\circ-90^\circ-90^\circ-60^\circ=120^\circ$。

答：$120^\circ$。




(3)過 $R$ 點做垂線，交 $\overline{AP}$ 於 $H$，

$\angle RPH=180^\circ-120^\circ=60^\circ$，

$\triangle RPH$ 為 $30^\circ$- $60^\circ$- $90^\circ$ 的直角三角形，

$\sqrt{3}:2=\overline{RH}:4\sqrt{3}$

$\overline{RH}=6$

故 $\triangle PQR$ 的面積為 $\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 6=12\sqrt{3}$。

答：$12\sqrt{3}$。