3-1 推理證明

我們曾經學過一些數學性質並加以應用，也曾在解題完成後，嘗試說明每個步驟的合理性，這個說明的過程就是「**證明**」，例如：等差數列的公式、三角形的全等、…… 等。

1 代數證明

對應能力指標 9-s-12

我們學過乘法公式、一元二次方程式的公式解、…… 等，這些都是代數推理的結果，以下我們將學習一些簡單的代數證明。

在國小時，我們學過「偶數」能被 2 整除，所以**偶數都可以表示成 $2n$ 的形式，其中 n 為整數**，例如：8 與 46 都是偶數，8 可以寫成 2×4、46 可以寫成 2×23；反之，可以寫成 $2n$ 形式的整數都是偶數。「奇數」能被 2 除餘 1，所以**奇數都可以表示成 $2n+1$ 的形式，其中 n 為整數**，例如：9 與 51 都是奇數，9 可以寫成 $2\times4+1$、51 可以寫成 $2\times25+1$；反之，可以寫成 $2n+1$ 形式的整數都是奇數，其中 n 為整數。

隨堂練習

1. 假設 a、b 為整數，寫出下列何者為奇數，何者為偶數。
   (1) $2(a+23)$ 為__偶__數。
   (2) $2(b+2)+1$ 為__奇__數。

2. 假設 k、n 為整數，填入適當的式子並寫出下列何者為奇數，何者為偶數。
   (1) $6k+1=2\times$__$3k$__$+1$；$6k+1$ 為__奇__數。
   (2) $24n+22=2\times$__$(12n+11)$__；$24n+22$ 為__偶__數。
   (3) $0=2\times0$；0 為__偶__數。
   (4) $2n-1=2\times($__$n-1$__$)+1$；$2n-1$ 為__奇__數。

數學的證明是由已知條件或已經確定是正確的性質來推導出某些結論，我們常將證明的寫作過程寫成 **已知**、**求證**、**證明** 的形式。步驟如下：

例如：若 a 是偶數，b 是奇數，說明 $a\times b$ 是偶數。

將「題目所給的條件」寫成 **已知**。 → **已知** a 是偶數，b 是奇數。

將「要說明的結論」寫成 **求證**。 → **求證** $a\times b$ 是偶數。

將「推導或說明的過程」寫成 **證明**。 → **證明** $\because a$ 是偶數，b 是奇數，

$\therefore$ 可令 $a=2m$，$b=2n+1$，

m、n 皆是整數。

$$\begin{aligned} a\times b &= 2m\times(2n+1) \\ &= 2\times m\times(2n+1) \\ &= 2(2mn+m) \end{aligned}$$

$\because 2mn+m$ 為整數，

故 $a\times b$ 為偶數。

例 1 奇偶數的判別

已知 a 是奇數。

求證 a^2 也是奇數。

證明 $\because a$ 是奇數，設 $a=2n+1$，n 是整數。

$\therefore a^2=(2n+1)^2$

$=(2n)^2+2\times 2n\times 1+1^2$

$=4n^2+4n+1$

$=2(2n^2+2n)+1$

$\because 2n^2+2n$ 為整數，

故 a^2 是奇數。

隨堂練習

已知 a 是偶數。

求證 a^2 也是偶數。

證明 $\because a$ 是偶數，設 $a=2n$，n 是整數，

$\therefore a^2=(2n)^2=4n^2=2(2n^2)$

$\because 2n^2$ 為整數，

故 a^2 是偶數。

動動腦

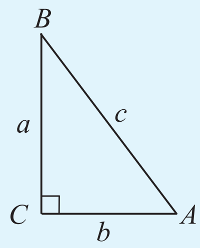
1. 如果 a 是偶數，a 乘以任何整數都是偶數嗎？
   設 m、n 為整數，a 為偶數，令 $a=2m$，則 $a\times n=2m\times n=2mn$，
   $\because mn$ 為整數，故 a 乘以任何整數都是偶數。
2. 如果 b 是奇數，b 乘以任何整數都是奇數嗎？
   設 m、n 為整數，b 為奇數，令 $b=2m+1$，
   則 $b\times n=(2m+1)\times n=2mn+n$，
   若 n 是奇數，則 b 乘以奇數，其積為奇數；
   若 n 是偶數，則 b 乘以偶數，其積為偶數。

例 2 倍數的判別

搭配習作 P39 基礎題 1

已知 如圖，直角三角形 ABC 中，c 為斜邊長，a、b 為兩股長，a、b、c 均為正整數。

求證 a^2 是 $(c+b)$ 的倍數。



思路分析

要證明 a^2 是 $(c+b)$ 的倍數，可先想辦法推得「$a^2=(c+b)\times\square$」的形式。

證明 $\because \triangle ABC$ 為直角三角形，

$\therefore a^2+b^2=c^2$，

$a^2=c^2-b^2$

$=(c+b)(c-b)$ ← $(c+b)$、$(c-b)$ 為正整數

故 a^2 是 $(c+b)$ 的倍數。

隨堂練習

已知 $a^2+7^2=(10b+17)^2$，其中 b 為正整數。

求證 a^2 是 10 的倍數。

思路分析

要證明 a^2 是 10 的倍數，可先想辦法推得 $a^2=10\times(\quad)$ 的形式。

證明 $a^2+7^2=(10b+17)^2$

$a^2=(10b+17)^2-7^2$

$=(10b+17-7)(10b+17+7)$

$=(10b+10)(10b+24)$

$=10(b+1)(10b+24)$

$\because (b+1)(10b+24)$ 為整數，

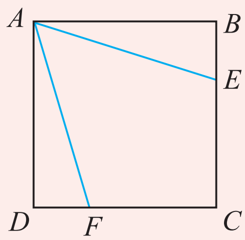
故 a^2 是 10 的倍數。

2 幾何證明

對應能力指標 9-s-12

在幾何證明的寫作過程中，也會利用題目所給的條件與曾經在八年級學過的幾何性質進行推理（可參考本書 P183～188 的幾何性質），並寫成 **已知**、**求證**、**證明** 的形式。步驟如下：

例如：右圖中，四邊形 $ABCD$ 為正方形，E、F 兩點分別在 $\overline{BC}$、$\overline{DC}$ 上，$\overline{BE}=\overline{DF}$，說明 $\overline{AE}=\overline{AF}$。



將「題目所給的條件」寫成 **已知**。

已知 四邊形 $ABCD$ 為正方形，E、F 兩點分別在 $\overline{BC}$、$\overline{DC}$ 上，$\overline{BE}=\overline{DF}$。

將「要說明的結論」寫成 **求證**。

求證 $\overline{AE}=\overline{AF}$。

將「推導或說明的過程」寫成 **證明**。通常剛開始練習時，會在括號內寫明理由。

證明 在 $\triangle ABE$ 與 $\triangle ADF$ 中，

$\because \overline{AB}=\overline{AD}$，$\angle B=\angle D=90^\circ$，

（四邊形 $ABCD$ 為正方形）

又 $\overline{BE}=\overline{DF}$（已知），

$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ADF$（$SAS$ 全等性質），

故 $\overline{AE}=\overline{AF}$（對應邊相等）。

推理證明的思考與分析，可先從「結論」推論到「題目所給的條件」，但在寫作推理的過程中，則是依據分析的結果，由「題目所給的條件」逐步推理至「結論」。以上面的例子說明如下：

思路分析 ↓　　　　推理過程 ↑

$\overline{AE}=\overline{AF}$（結論）

↓ ↑

$\triangle ABE\cong\triangle ADF$（$SAS$ 全等性質）

↓ ↑

$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\angle B=\angle D=90^\circ$，$\overline{BE}=\overline{DF}$

↓ ↑

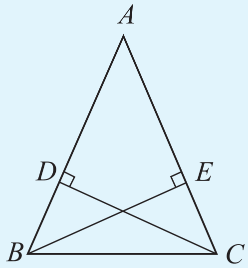
四邊形 $ABCD$ 為正方形，$\overline{BE}=\overline{DF}$（已知）

例 3　等腰三角形兩腰上的高相等

搭配習作 P39、40 基礎題 2～4

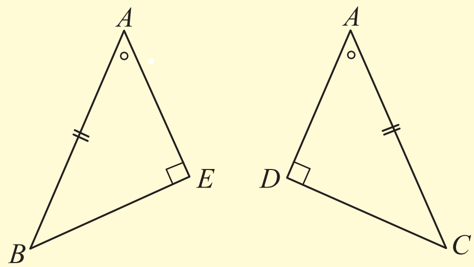
已知 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，$\overline{BE}\perp\overline{AC}$。

求證 $\overline{BE}=\overline{CD}$。



思路分析

要證明 $\overline{BE}=\overline{CD}$，
先找到分別以 $\overline{BE}$、$\overline{CD}$ 為一邊的兩個三角形，
再證明這兩個三角形全等。



證明 在 $\triangle AEB$ 與 $\triangle ADC$ 中，

$\because$ $\overline{AB}=\overline{AC}$（已知），

$\angle AEB=\angle ADC=90^\circ$（$\overline{BE}\perp\overline{AC}$，$\overline{CD}\perp\overline{AB}$），

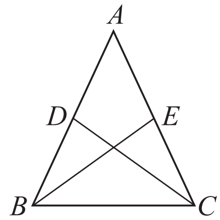
$\angle A=\angle A$（公用角），

$\therefore\triangle AEB\cong\triangle ADC$（$AAS$ 全等性質），

故 $\overline{BE}=\overline{CD}$（對應邊相等）。

隨堂練習

1. **已知** 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AE}=\overline{AD}$。



求證 $\overline{BE}=\overline{CD}$。

證明 在$\triangle ABE$ 與$\triangle ACD$ 中，

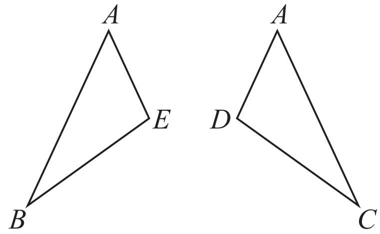
$\because$ $\overline{AB}=\overline{AC}$（已知），

$\overline{AE}=\overline{AD}$（__已知__），

__$\angle A=\angle A$__（公用角），

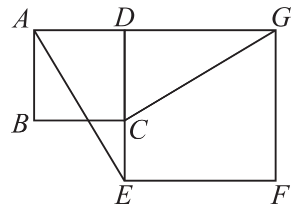
$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$（__SAS__ 全等性質），

故 $\overline{BE}=\overline{CD}$（__對應邊相等__）。



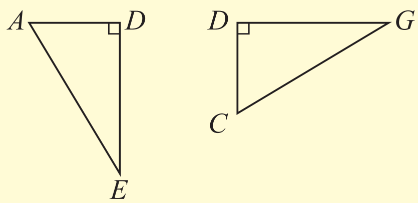
2. **已知** 如圖，四邊形 $ABCD$、$DEFG$ 均為正方形。

求證 $\overline{AE}=\overline{CG}$。



思路分析

要證明 $\overline{AE}=\overline{CG}$，
先找到分別以 $\overline{AE}$、$\overline{CG}$ 為一邊的兩個三角形，
再證明這兩個三角形全等。



證明 在$\triangle ADE$ 與$\triangle CDG$ 中，

$\because$ __$\overline{AD}=\overline{CD}$__（四邊形 $ABCD$ 為正方形），

$\overline{DE}=\overline{DG}$（__四邊形 $DEFG$ 為正方形__），

__$\angle ADE=\angle CDG$__$=90^\circ$（四邊形 $ABCD$、$DEFG$ 均為正方形），

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDG$（__SAS__ 全等性質），

故 $\overline{AE}=\overline{CG}$（__對應邊相等__）。

幾何證明題的呈現方式，常將 已知 的形式改用其他敘述取代，而推理的過程或結論也常分成幾個步驟來說明，並以⑴、⑵、⑶、…… 表示。

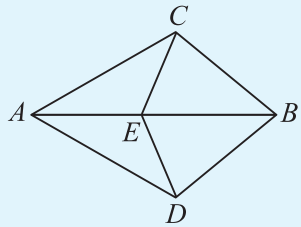
例 4 兩次全等證明

搭配習作 P40 基礎題 5

如圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 中，$\overline{AC}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{BD}$，若 E 為 $\overline{AB}$ 上任一點，求證：

⑴ $\angle ABC=\angle ABD$。

⑵ $\overline{EC}=\overline{ED}$。



思路分析

1. 要證明 $\angle ABC=\angle ABD$，需先找出包含 $\angle ABC$ 與 $\angle ABD$ 的兩個全等三角形。
2. 要證明 $\overline{EC}=\overline{ED}$，需先找出包含 $\overline{EC}$ 與 $\overline{ED}$ 為邊的兩個全等三角形。

證明

⑴在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABD$ 中，

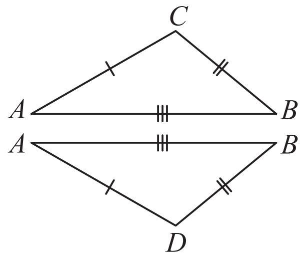
$\because \overline{AC}=\overline{AD}$（已知），

$\overline{BC}=\overline{BD}$（已知），

$\overline{AB}=\overline{AB}$（公用邊），

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ABD$（$SSS$ 全等性質），

故 $\angle ABC=\angle ABD$（對應角相等）。



⑵在 $\triangle EBC$ 與 $\triangle EBD$ 中，

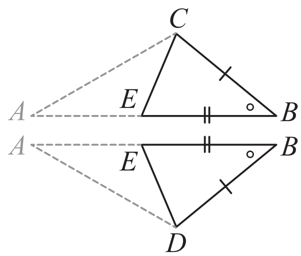
$\because \overline{BC}=\overline{BD}$（已知），

$\angle ABC=\angle ABD$（對應角相等），

$\overline{EB}=\overline{EB}$（公用邊），

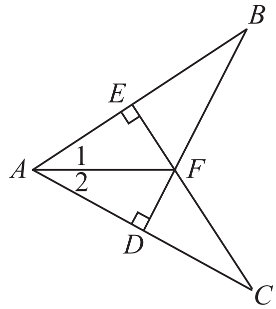
$\therefore \triangle EBC \cong \triangle EBD$（$SAS$ 全等性質），

故 $\overline{EC}=\overline{ED}$（對應邊相等）。



隨堂練習

如圖，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{CE}\perp\overline{AB}$，$\overline{BD}\perp\overline{AC}$，$\overline{BD}$ 與 $\overline{CE}$ 交於 F 點，求證：



(1) $\overline{AD}=\overline{AE}$。

思路分析

要證明 $\overline{AD}=\overline{AE}$，需先找出包含 $\overline{AD}$、$\overline{AE}$ 為邊的兩個全等三角形。

證明 (1)在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACE$ 中，

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle ADB=\angle AEC=90^\circ$，

$\angle BAD=\angle CAE$，

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle ACE$（$AAS$ 全等性質），

故 $\overline{AD}=\overline{AE}$（對應邊相等）。

(2) $\angle 1=\angle 2$。

思路分析

要證明 $\angle 1=\angle 2$，需先找出包含 $\angle 1$、$\angle 2$ 的兩個全等三角形。

證明 (2)在 $\triangle AEF$ 與 $\triangle ADF$ 中，

$\because \overline{AE}=\overline{AD}$，$\angle AEF=\angle ADF=90^\circ$，$\overline{AF}=\overline{AF}$，

$\therefore \triangle AEF\cong\triangle ADF$（$RHS$ 全等性質），

故 $\angle 1=\angle 2$（對應角相等）。

數學小語錄

在數學中最令我欣喜之處，是那些能夠被證明的東西。

—羅素（Bertrand Russell，1872-1970）

3 輔助線

對應能力指標 9-s-04、9-s-12

幾何推理進行中，有時需要在原圖形上添加一些線條或圖形，協助進行推理證明或計算。例如：圖 3-1，在第二章求外公切線段長時，作 $\overline{O_2H}\perp\overline{O_1A}$ 於 H 點，這種添加的線條或圖形就稱為**輔助線**，輔助線常用虛線表示。如圖 3-1 中，$\overline{O_2H}$ 就是輔助線。

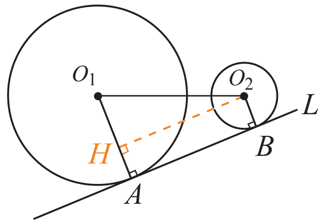


圖 3-1

我們再以等腰三角形的底角相等為例，用摺紙的方式來進行觀察：如圖 3-2，$\triangle ABC$ 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，將$\triangle ABC$ 對摺，使得 B 點與 C 點疊合，此時 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 完全疊合，所以 $\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$。

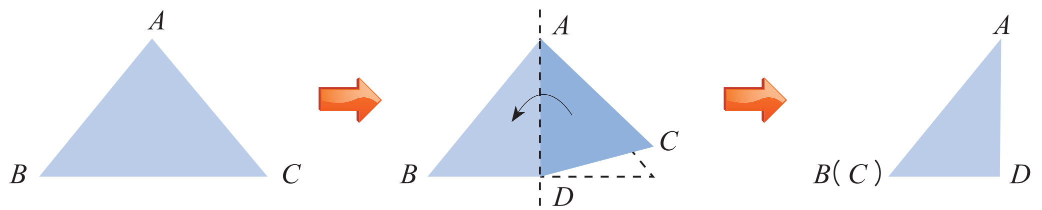


圖 3-2

如圖 3-3，把摺好的三角形打開，則 $\overline{AD}$ 為$\triangle ABC$ 的對稱軸。

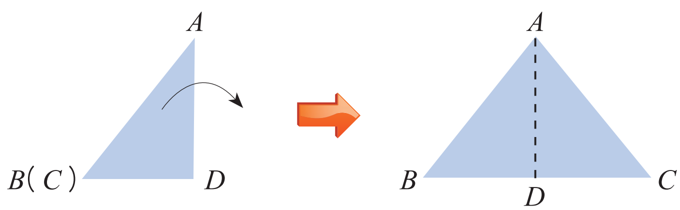


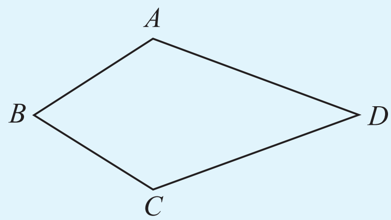
圖 3-3

由上面的過程可知：等腰三角形的對稱軸，就是它底邊上的高，且 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 全等，所以等腰三角形的底角相等。因此，如果要證明等腰三角形的底角相等，我們可作 $\overline{BC}$ 上的高 $\overline{AD}$，則所添加的 $\overline{AD}$ 即為輔助線。

例5 輔助線的應用

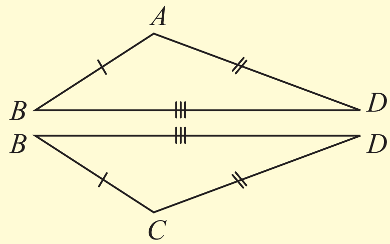
搭配習作 P41 基礎題 6

如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{AD}=\overline{CD}$，求證 $\angle A=\angle C$。



思路分析一

要證明 $\angle A=\angle C$，可試著連接 $\overline{BD}$，再證明 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CBD$ 全等。



證明一

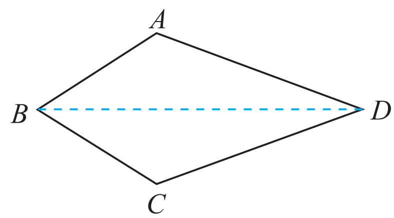
(1) 連接 $\overline{BD}$。

(2) 在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CBD$ 中，

$\because$ $\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{AD}=\overline{CD}$，$\overline{BD}=\overline{BD}$，

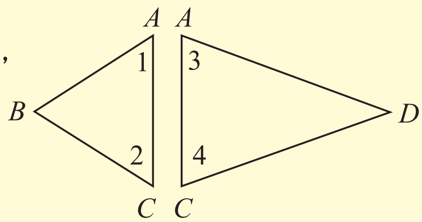
$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle CBD$（$SSS$ 全等性質），

故 $\angle A=\angle C$（對應角相等）。



思路分析二

連接 $\overline{AC}$，將 $\angle A$ 分成 $\angle 1+\angle 3$，$\angle C$ 分成 $\angle 2+\angle 4$，若能證明 $\angle 1=\angle 2$，$\angle 3=\angle 4$，即可推導出 $\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4$。



證明二

(1) 連接 $\overline{AC}$。

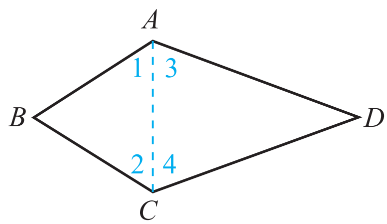
(2) $\because$ $\overline{AB}=\overline{BC}$，

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$（等腰三角形兩底角相等），

同理，$\angle 3=\angle 4$（$\overline{AD}=\overline{CD}$）。

(3) $\angle A=\angle 1+\angle 3=\angle 2+\angle 4=\angle C$，

故 $\angle A=\angle C$。

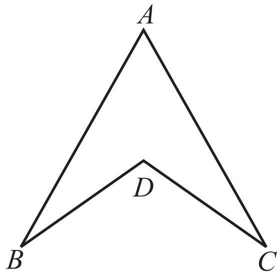


隨堂練習

利用不同的思路分析證明。

如圖，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$，

求證 $\angle ABD=\angle ACD$。



思路分析一

利用三角形的全等性質：
考慮 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$。

證明一

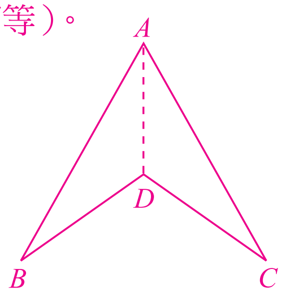
(1) 連接 $\overline{AD}$。

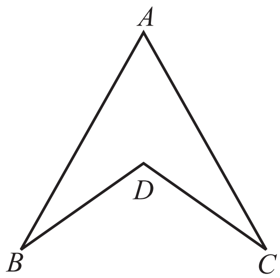
(2) 在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 中，

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{CD}$，$\overline{AD}=\overline{AD}$，

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$（$SSS$ 全等性質），

故 $\angle ABD=\angle ACD$（對應角相等）。





思路分析二

利用等腰三角形兩個底角相等：
考慮 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBC$。

證明二

(1) 連接 $\overline{BC}$。

(2) 在 $\triangle ABC$ 中，

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$，

$\therefore \angle ABD+\angle 1=\angle ACD+\angle 2$。

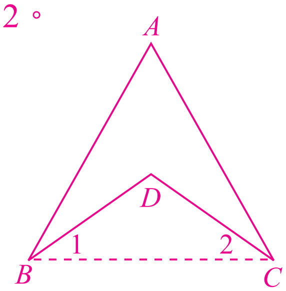
(3) 在 $\triangle BCD$ 中，

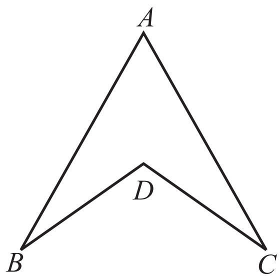
$\because \overline{BD}=\overline{CD}$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$。

(4) 由 (2)、(3) 可得：

$\angle ABD=\angle ACD$。





由例題 5 及隨堂練習可知：**不同的思路會產生不同的輔助線畫法與證法**。

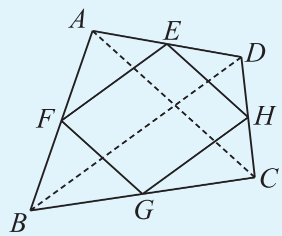
例 6 四邊形各邊中點連線性質

搭配習作 P41 基礎題 7

如圖，四邊形 $ABCD$ 中，E、F、G、H 為各邊中點，$\overline{AC}$、$\overline{BD}$ 為對角線，求證：

(1) 四邊形 $EFGH$ 為平行四邊形。

(2) 四邊形 $EFGH$ 的周長 $=\overline{BD}+\overline{AC}$。



證明

(1)在 $\triangle ABD$ 中，

$\because E$、F 為 $\overline{AD}$、$\overline{AB}$ 的中點，

$\therefore \overline{EF} /\!/ \overline{BD}$，$\overline{EF}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$。

在 $\triangle CBD$ 中，

$\because G$、H 為 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 的中點，

$\therefore \overline{GH} /\!/ \overline{BD}$，$\overline{GH}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$。

因此 $\overline{EF} /\!/ \overline{GH} /\!/ \overline{BD}$，$\overline{EF}=\overline{GH}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$，

故四邊形 $EFGH$ 為平行四邊形（一雙對邊平行且相等）。

(2) $\because \overline{EF}=\overline{GH}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$，

同理 $\overline{FG}=\overline{EH}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$，

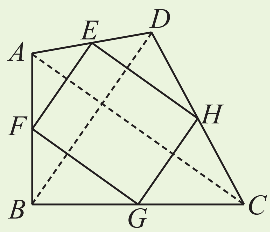
故四邊形 $EFGH$ 的周長 $=2(\overline{EF}+\overline{FG})$

$$=2\left(\frac{1}{2}\overline{BD}+\frac{1}{2}\overline{AC}\right)$$

$$=\overline{BD}+\overline{AC}。$$

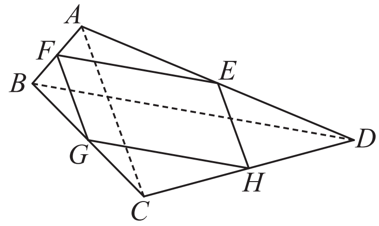
四邊形各邊中點連線性質

四邊形各邊中點連線所形成的四邊形是平行四邊形，其周長為原四邊形兩對角線的和。



隨堂練習

如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AC}=10$、$\overline{BD}=18$，E、F、G、H 為各邊中點，求四邊形 $EFGH$ 的周長。



∵E、F、G、H 為四邊形的各邊中點，

∴四邊形 $EFGH$ 的周長 $=\overline{AC}+\overline{BD}$

$=10+18$

$=28$。

重點回顧

1 推理與證明：

(1)將「題目所給的條件」寫在 **已知**。

(2)將「要說明的結論」寫在 **求證**。

(3)將「推導或說明的過程」寫在 **證明**。

2 思路分析與證明：

推理證明的思考與分析，可先從「結論」推論到「題目所給的條件」，但在寫作推理的過程中，則是依據分析的結果，由「題目所給的條件」逐步推理至「結論」。

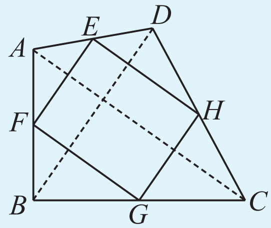
3 輔助線：

(1)幾何推理進行中，有時需要在原圖形上添加一些線條或圖形，協助進行推理證明或計算，這種添加的線條或圖形就稱為輔助線。

(2)不同的思路會產生不同的輔助線畫法與證法。

4 四邊形各邊中點連線性質：

四邊形各邊中點連線所形成的四邊形是平行四邊形，其周長為原四邊形兩對角線的和。



3-1 自我評量

1 已知 a 為奇數，b 為奇數，求證 $a\times b$ 是奇數。 課 P130 例 1

證明 $\because a$、b 為奇數，設 $a=2m+1$、$b=2n+1$，m、n 是整數，

$\therefore a\times b=(2m+1)(2n+1)$

$=4mn+2m+2n+1$

$=2(2mn+m+n)+1$

$\because 2mn+m+n$ 為整數，故 $a\times b$ 是奇數。

2 已知 a 是正整數，$A=(5a+7)^2+6(5a+7)+9$，求證 A 是 25 的倍數。 課 P131 隨堂

證明 $A=(5a+7)^2+6(5a+7)+9$

$=25a^2+70a+49+30a+42+9$

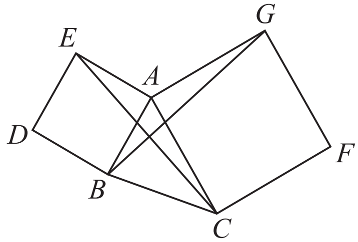
$=25a^2+100a+100$

$=25(a^2+4a+4)$

$\because a^2+4a+4$ 為正整數，

故 A 是 25 的倍數。

3 如圖，已知四邊形 $ABDE$、$ACFG$ 均為正方形，求證 $\triangle AEC\cong\triangle ABG$。 課 P133 例 3



證明 (1)在 $\triangle AEC$ 與 $\triangle ABG$ 中，

$\because \angle EAB=\angle GAC=$ ___90___ 度，

$\angle EAC=\angle EAB+$ ___$\angle BAC$___，

$\angle BAG=\angle GAC+$ ___$\angle BAC$___，

$\therefore \angle EAC=$ ___$\angle BAG$___。

(2)在 $\triangle AEC$ 與 $\triangle ABG$ 中，

$\because$ ___$\overline{AE}=\overline{AB}$___，

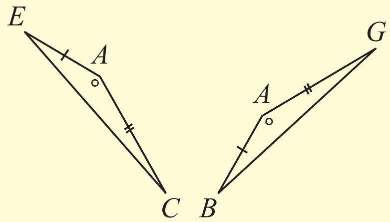
___$\angle EAC=\angle BAG$___，

___$\overline{AC}=\overline{AG}$___，

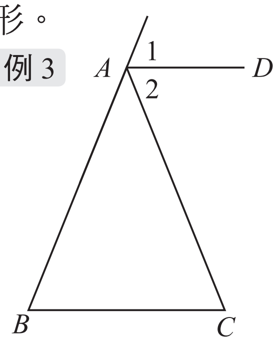
根據 ___SAS___ 全等性質，可知$\triangle AEC\cong\triangle ABG$。

思路分析

將 $\triangle AEC$ 與 $\triangle ABG$ 中，各組相等的對應邊或對應角用記號標出來。



4 如圖，$\angle 1=\angle 2$，$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$，求證$\triangle ABC$為等腰三角形。 課 P133 例 3



證明 $\because \overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$，

$\therefore \angle 2=\angle C$，$\angle 1=\angle B$，

又$\angle 1=\angle 2$，

$\therefore \angle B=\angle C$，

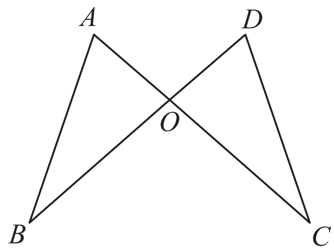
則 $\overline{AB}=\overline{AC}$，

故 $\triangle ABC$ 為等腰三角形。

5 如圖，$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AC}=\overline{BD}$。 課 P135、138 例 4、5

求證：(1) $\angle A=\angle D$。

(2) $\overline{AO}=\overline{DO}$。



證明 (1)連接 $\overline{BC}$，在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DCB$ 中，

$\because \overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AC}=\overline{BD}$，$\overline{BC}=\overline{BC}$，

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DCB$（$SSS$ 全等性質），

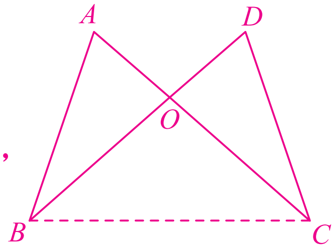
故$\angle A=\angle D$（對應角相等）。

(2)在 $\triangle AOB$ 與 $\triangle DOC$ 中，

$\because \angle A=\angle D$，$\angle AOB=\angle DOC$，$\overline{AB}=\overline{CD}$，

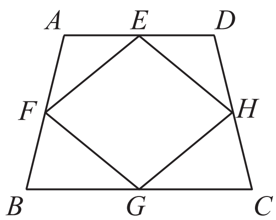
$\therefore \triangle AOB\cong\triangle DOC$（$AAS$ 全等性質），

故 $\overline{AO}=\overline{DO}$（對應邊相等）。



6 如圖，四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形，$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$，$\overline{AB}=\overline{DC}$，$E$、$F$、$G$、$H$ 為各邊中點，若 $\overline{BD}=20$，回答下列問題：

(1)求 $\overline{EH}$。(2)求四邊形 $EFGH$ 的周長。 課 P140 例 6



(1)連接 $\overline{AC}$，在 $\triangle ACD$ 中，

$\because E$、H 為 $\overline{AD}$、$\overline{CD}$ 的中點，

$\therefore \overline{AC}\,/\!/\,\overline{EH}$，$\overline{EH}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$，

又 $\overline{AC}=\overline{BD}$，

故 $\overline{EH}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$

$=10$。

(2) $\because \overline{EH}=\overline{FG}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}$

同理 $\overline{EF}=\overline{HG}=\dfrac{1}{2}\overline{BD}$

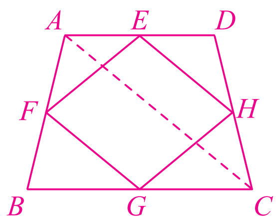
故四邊形 $EFGH$ 的周長

$=2(\overline{EH}+\overline{EF})$

$=2(\dfrac{1}{2}\overline{AC}+\dfrac{1}{2}\overline{BD})$

$=\overline{AC}+\overline{BD}$

$=40$。



答：(1) 10，(2) 40。