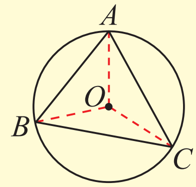
3-2 三角形與多邊形的心

本節性質與公式摘要

1. 三角形的外心：

三角形三邊的中垂線交於一點，此點稱為三角形的外心，外心到三頂點的距離相等，且外心也是此三角形外接圓的圓心。

例 如圖，$\triangle ABC$ 中，O 點為外心，則 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$。



2. 三角形外心的位置：

(1)銳角三角形的外心在三角形內部。

(2)直角三角形的外心在三角形的斜邊中點。

(3)鈍角三角形的外心在三角形外部。

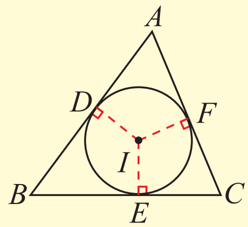
3. 多邊形的外心：

如果一個多邊形各邊的中垂線交於同一點，此點稱為多邊形的外心，外心到各頂點的距離相等，且外心也是此多邊形外接圓的圓心。

4. 三角形的內心：

三角形三內角的角平分線交於一點，此點稱為三角形的內心，內心到三邊的距離相等，且內心也是此三角形內切圓的圓心。

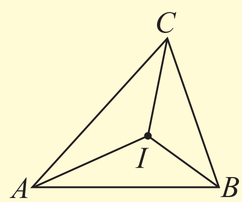
例 如圖，$\triangle ABC$ 中，I 點為內心，則 $\overline{ID}=\overline{IE}=\overline{IF}$。



5. 三角形內心與面積：

若 I 點為 $\triangle ABC$ 的內心，則$\triangle AIB：\triangle BIC：\triangle CIA=\overline{AB}：\overline{BC}：\overline{CA}$。

例 如圖 $\triangle ABC$ 中，I 點為內心，若$\triangle AIB$、$\triangle BIC$、$\triangle CIA$ 的面積分別為 13、11、14，則 $\overline{AB}：\overline{BC}：\overline{CA}=13：11：14$。



6. 三角形面積與內切圓半徑：

若 r 為三角形的內切圓半徑，S 為三角形的周長，

則此三角形的面積為 $\frac{1}{2}rS$。

7. 直角三角形的內切圓半徑：

若 r 為直角三角形的內切圓半徑，則兩股和＝斜邊長＋$2r$，

即 $r=\dfrac{\text{兩股和}-\text{斜邊長}}{2}$。

8. 多邊形的內心：

如果一個多邊形各內角的角平分線交於同一點，此點稱為多邊形的內心，內心到各邊的距離相等，且內心也是此多邊形內切圓的圓心。

9. 三角形的重心：

(1)三角形的三條中線交於一點，此點為三角形的重心。

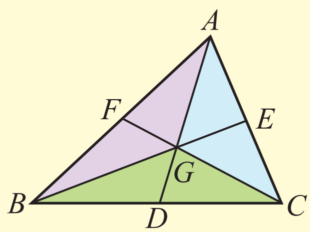
(2)如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$、$\overline{BE}$、$\overline{CF}$ 為三條中線，G 點為重心，則：

① $\overline{AG}:\overline{GD}=2:1$，$\overline{BG}:\overline{GE}=2:1$，$\overline{CG}:\overline{GF}=2:1$。

② $\triangle AGB=\triangle BGC=\triangle CGA=\frac{1}{3}\triangle ABC$。

③ $\triangle AGF=\triangle BGF=\triangle AGE=\triangle CGE$

$=\triangle BGD=\triangle CGD=\frac{1}{6}\triangle ABC$。



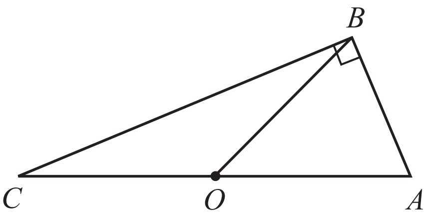
10. 正多邊形的外心、內心與重心：

正多邊形的外心、內心與重心是同一點。

基礎題

1 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=90^\circ$，$\overline{AB}=5$，$\triangle ABC$ 的面積為 30，若 O 點為外心，求 $\overline{OB}$。

10 分 8 分 課 P147 例 1



$\triangle ABC$ 的面積$=\overline{AB}\times\overline{BC}\div 2$

$30=5\times\overline{BC}\div 2$

$\overline{BC}=12$

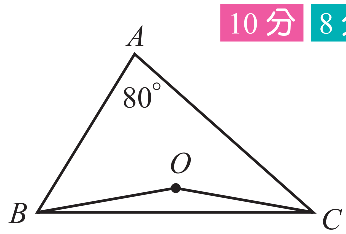
$\overline{AC}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$，

$\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times 13=\dfrac{13}{2}$。

答：$\dfrac{13}{2}$。

2 如圖，$\triangle ABC$ 中，O 點為外心，若 $\angle A=80^\circ$，求 $\angle BOC$。

課 P149 例 3 10 分 8 分

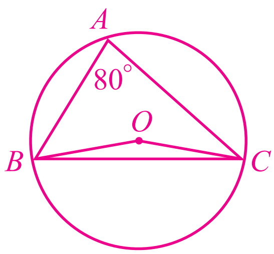


$\because$ O 點為$\triangle ABC$ 的外心，

$\therefore \angle BOC=2\angle A$

$=2\times 80^\circ$

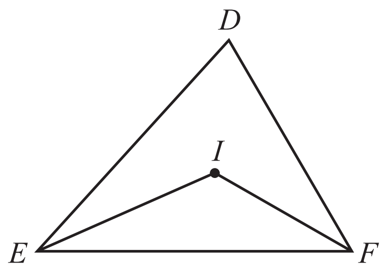
$=160^\circ$。



答：160°。

3 如圖，$\triangle DEF$ 中，I 點為內心，若 $\angle EIF=126^\circ$，求 $\angle D$。

課 P156 例 5 10 分 8 分



$\angle 1+\angle 2=180^\circ-\angle EIF=180^\circ-126^\circ=54^\circ$，

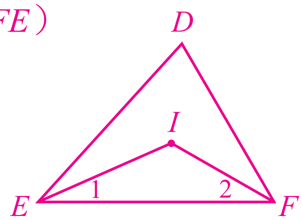
$\because$ I 點為$\triangle DEF$ 的內心，

$\therefore \angle 1=\dfrac{1}{2}\angle DEF$，$\angle 2=\dfrac{1}{2}\angle DFE$，

$\angle D=180^\circ-(\angle DEF+\angle DFE)$

$=180^\circ-2(\angle 1+\angle 2)$

$=180^\circ-2\times 54^\circ=72^\circ$。



答：72°。

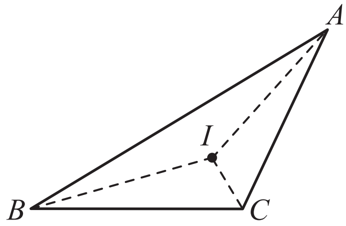
④ 如圖，I 點為 $\triangle ABC$ 的內心，已知 $\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=4$，求 $\triangle AIB$ 與 $\triangle AIC$ 的面積比。 10 分 8 分 課 P157 隨堂

$\because$ I 點為 $\triangle ABC$ 的內心，

$\therefore$ $\triangle AIB$ 的面積：$\triangle AIC$ 的面積 $=\overline{AB}:\overline{AC}$

$=8:4$

$=2:1$。



答：$2:1$。

⑤ 已知$\triangle ABC$ 的面積為 24，若 $\overline{AB}=7$，內切圓半徑為 2，求 $\overline{BC}+\overline{CA}$。 10 分 8 分 課 P158 例 6

$\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\times$ 內切圓半徑 $\times$ 三角形的周長

$24=\dfrac{1}{2}\times 2\times(7+\overline{BC}+\overline{CA})$

$24=7+\overline{BC}+\overline{CA}$

$\overline{BC}+\overline{CA}=17$。

答：17。

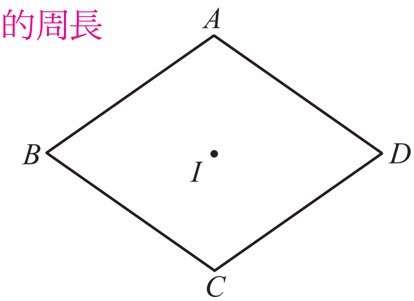
⑥ 如圖，菱形 $ABCD$ 中，I 點為內心，$\overline{AB}=6$，且菱形 $ABCD$ 的面積為 30，求內切圓的面積。 10 分 8 分 課 P163 例 8

菱形 $ABCD$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\times$ 內切圓半徑 $\times$ 菱形的周長

$30=\dfrac{1}{2}\times$ 內切圓半徑 $\times(6\times4)$

內切圓半徑 $=\dfrac{5}{2}$

內切圓的面積 $=\dfrac{5}{2}\times\dfrac{5}{2}\times\pi=\dfrac{25}{4}\pi$。



答：$\dfrac{25}{4}\pi$。

7 如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 為 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 的中點，且 $\overline{BD}$、$\overline{CE}$ 交於 G 點，若 $\overline{GG'}$ 與 $\overline{DD'}$ 皆垂直於 $\overline{BC}$，求 $\overline{GG'}:\overline{DD'}$。 12 分 10 分 課 P166 例 9

$\because D$、E 為 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 中點，且 $\overline{BD}$、$\overline{CE}$ 交於 G 點，

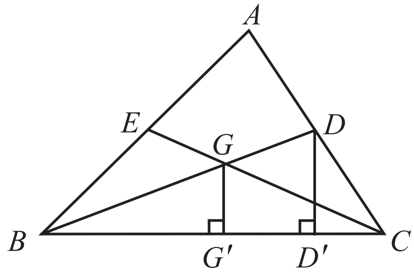
$\therefore G$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心，

則 $\overline{BG}:\overline{BD}=2:3$，

在 $\triangle BDD'$ 中，

$\because \overline{GG'}\,/\!/\,\overline{DD'}$，

$\therefore \overline{GG'}:\overline{DD'}=\overline{BG}:\overline{BD}=2:3$。

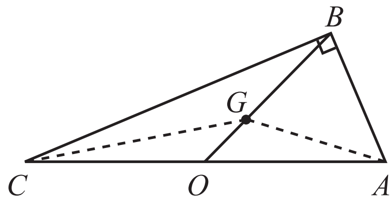


答：2：3。

8 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=12$，$\angle ABC=90^\circ$，G 點為重心，O 點為外心，求： 課 P169 例 12

(1) $\overline{GO}$。 8 分 6 分

(2) $\triangle GCA$ 的面積。 8 分 6 分



(1) $\overline{AC}=\sqrt{\overline{BC}^2+\overline{AB}^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13$，

$\because O$ 點為外心，

$\therefore$ 外接圓半徑 $\overline{OB}=\dfrac{1}{2}\overline{AC}=\dfrac{1}{2}\times 13=\dfrac{13}{2}$，

又 G 點為重心，

$\therefore \overline{GO}=\dfrac{1}{3}\overline{OB}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{13}{2}=\dfrac{13}{6}$。

(2) $\triangle GCA$ 的面積 $=\dfrac{1}{3}\triangle ABC$ 的面積

$=\dfrac{1}{3}\times 5\times 12\div 2=10$。

答：(1) $\dfrac{13}{6}$，(2) 10。

9 如圖，$\triangle ABC$ 為正三角形，其外接圓的面積為 100π，求 $\triangle ABC$ 內切圓的面積。 課 P171 例 13、隨堂 12 分 10 分

作 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，交 $\overline{BC}$ 於 D 點，

$\because \triangle ABC$ 為正三角形，

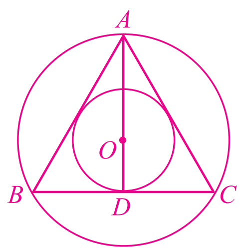
$\therefore O$ 點是 $\triangle ABC$ 的外心、內心與重心。

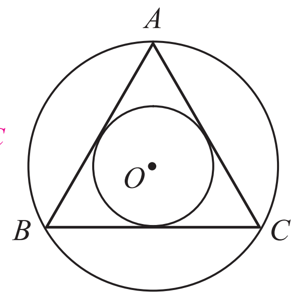
外接圓的面積 $=\overline{OA}\times\overline{OA}\times\pi=100\pi$，

$\overline{OA}=10$，

又 $\overline{OD}=\dfrac{1}{2}\overline{OA}=\dfrac{1}{2}\times 10=5$，

故內切圓的面積 $=5\times 5\times\pi=25\pi$。

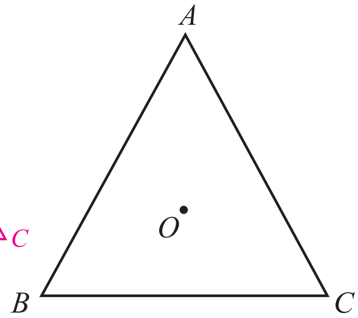




答：25π。

精熟題

1 如圖，O 點為 $\triangle ABC$ 的外心，$\overline{AB}=\overline{AC}=17$，$\overline{BC}=16$，求 $\overline{OA}$。 10 分



作 $\overline{AM}\perp\overline{BC}$，則 $\overline{BM}=\overline{CM}=8$，

$\overline{AM}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BM}^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15$。

$\because O$ 點為 $\triangle ABC$ 的外心，

設 $\overline{OA}=\overline{OB}=x$，$\overline{OM}=15-x$，

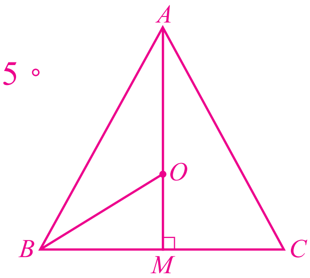
$\triangle OBM$ 中，$\overline{OB}^2=\overline{OM}^2+\overline{BM}^2$，

$x^2=(15-x)^2+8^2$

$x^2=225-30x+x^2+64$

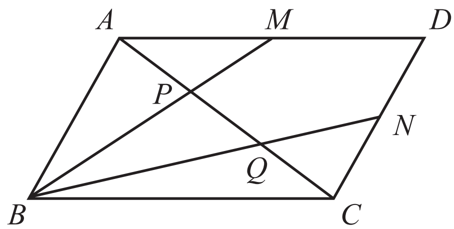
$30x=289$

$x=\dfrac{289}{30}$。



答：$\dfrac{289}{30}$。

2 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，M、N 分別為 $\overline{AD}$、$\overline{CD}$ 的中點，若 $\triangle PQB$ 的面積為 12，求五邊形 $PQNDM$ 的面積。 10 分



連接 $\overline{BD}$，交 $\overline{AC}$ 於 O 點，

則 $\overline{AP}=\dfrac{2}{3}\overline{AO}=\dfrac{2}{3}\overline{CO}=\overline{QC}=\dfrac{1}{3}\overline{AC}$，

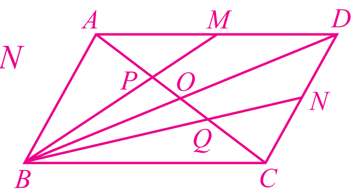
$\triangle ABC=3\times\triangle PQB=3\times 12=36$，

平行四邊形 $ABCD$ 的面積 $=2\times 36=72$，

$\triangle APM=\dfrac{1}{6}\times\triangle ABD=\dfrac{1}{6}\times\left(\dfrac{1}{2}\times 72\right)=6=\triangle QCN$

五邊形 $PQNDM$ 的面積 $=\triangle ACD-\triangle APM-\triangle QCN$

$=36-6-6=24$。



答：24。