

2-2 圓心角、圓周角與弦切角

本節性質與公式摘要

1. 圓心角、圓周角、弦切角、圓內角、圓外角與弧的關係：

名稱	圓心角	圓周角	弦切角
圖示			
性質	$\angle AOB = \widehat{AB}$	$\angle ACB = \frac{1}{2} \widehat{AB}$	$\angle BAC = \frac{1}{2} \widehat{AB}$

名稱	圓內角	圓外角
圖示		
性質	$\angle APC = \frac{1}{2} (m^\circ + n^\circ)$	$\angle P = \frac{1}{2} (m^\circ - n^\circ)$

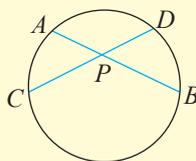
2. 圓內接四邊形：

圓內接四邊形的對角互補。

3. 內幕性質：

如圖，圓上兩弦 \overline{AB} 、 \overline{CD} 交於 P 點，

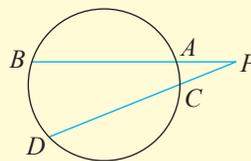
則 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ 。



4. 外幕性質：

如圖，圓上兩弦 \overline{AB} 、 \overline{CD} ，其延長線交於圓外 P 點，

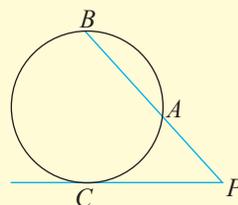
則 $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ 。



5. 切割線性質：

如圖， \overline{PB} 交圓於 A 、 B 兩點， \overline{PC} 為圓的切線，

C 為切點，則 $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$ 。



基礎題

- ① 如圖，直徑 \overline{AB} 、 \overline{CD} 把圓 O 分成四個弧，若圓 O 的半徑為 10，且 $\widehat{AC} : \widehat{AD} : \widehat{DB} : \widehat{BC} = 1 : 3 : 1 : 3$ ，求 $\angle AOC$ 與 \widehat{BC} 的長。

課 P98 例 1

10 分 8 分

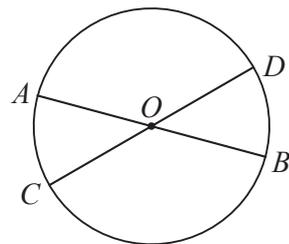
$$(1) \because \widehat{AC} : \widehat{AD} : \widehat{DB} : \widehat{BC} = 1 : 3 : 1 : 3,$$

$$\therefore \angle AOC = \widehat{AC} = 360^\circ \times \frac{1}{1+3+1+3} = 45^\circ.$$

$$(2) \angle BOC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\widehat{BC} \text{ 的長} = (2 \times 10 \times \pi) \times \frac{135}{360} = \frac{15}{2} \pi.$$

答：(1) 45° ，(2) $\frac{15}{2} \pi$ 。



- ② 如圖，已知 \overline{AB} 為圓 O 上的一弦，在圓 O 上找出三點 C 、 D 、 E ，使得：(1) $\angle ABC$ 為直角，(2) $\angle ABD$ 為銳角，(3) $\angle ABE$ 為鈍角。

課 P104

15 分 12 分

(1) 連接 \overline{AO} 交圓 O 於 C 點，可得

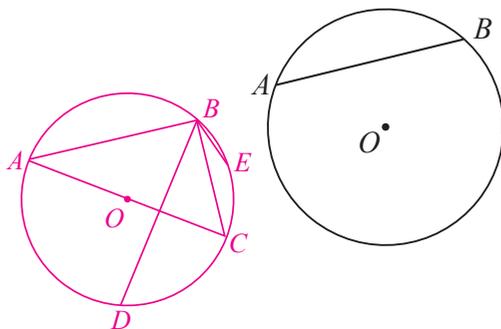
$\angle ABC$ 為直角，則 C 點即為所求。

(2) 在優弧 \widehat{BAC} 上任取一點 D ，可得

$\angle ABD$ 為銳角，則 D 點即為所求。

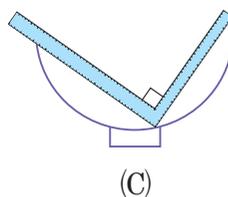
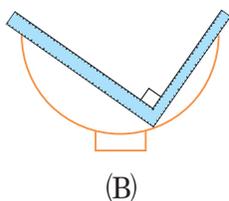
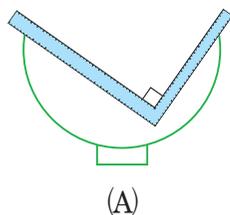
(3) 在劣弧 \widehat{BC} 上任取一點 E ，可得

$\angle ABE$ 為鈍角，則 E 點即為所求。



- ③ 如圖， A 、 B 、 C 三個碗的剖面圖都是圓弧，同時每一個碗內都擺放一把直角的曲尺。根據曲尺擺放的情形，判別哪一個碗的圓弧必是半圓？

10 分 4 分 課 P104



答：(B) 碗。

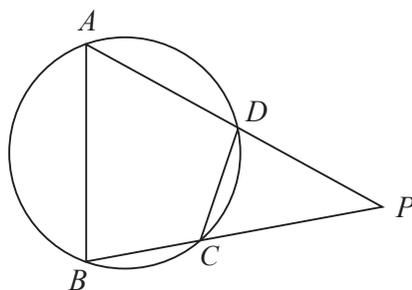
- ④ 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形， \overleftrightarrow{AD} 、 \overleftrightarrow{BC} 交於 P 點，若 $\angle P=40^\circ$ ， $\angle ADC=100^\circ$ ，求 $\angle A$ 。

10分 8分 課 P107 隨堂

$$\angle B = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ,$$

$\triangle ABP$ 中，

$$\begin{aligned}\angle A &= 180^\circ - \angle B - \angle P \\ &= 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ \\ &= 60^\circ.\end{aligned}$$

答： 60° 。

- ⑤ 如圖， \overline{PA} 切圓 O 於 P 點， \overline{OA} 交圓於 B 點，若 $\angle A=40^\circ$ ，求 $\angle APB$ 。

10分 8分 課 P111 例 8

$\because \overline{AP}$ 切圓 O 於 P 點，

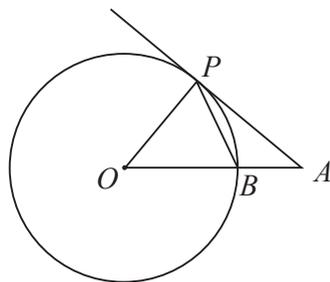
$$\therefore \angle OPA = 90^\circ,$$

$\triangle APO$ 中，

$$\angle POB = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ,$$

則 $\widehat{BP} = \angle POB = 50^\circ$ ，

$$\text{故 } \angle APB = \frac{1}{2} \widehat{BP} = \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ.$$

答： 25° 。

- ⑥ 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓內接梯形，且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，若 \overline{CD} 為直徑， $\angle ACD=24^\circ$ ，求 \widehat{AB} 的度數、 $\angle CAD$ 和 $\angle CED$ 。

15分 10分 課 P112 例 9

$$(1) \widehat{AD} = 2\angle ACD = 2 \times 24^\circ = 48^\circ,$$

$$\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}, \therefore \widehat{BC} = \widehat{AD} = 48^\circ.$$

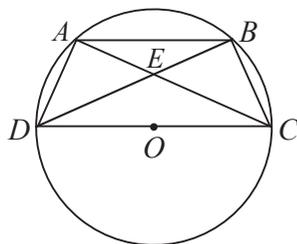
又 \overline{CD} 為直徑，

$$\text{則 } \widehat{AB} = 180^\circ - \widehat{BC} - \widehat{AD} = 180^\circ - 48^\circ - 48^\circ = 84^\circ.$$

(2) $\because \overline{CD}$ 為直徑，

$$\therefore \angle CAD = 90^\circ.$$

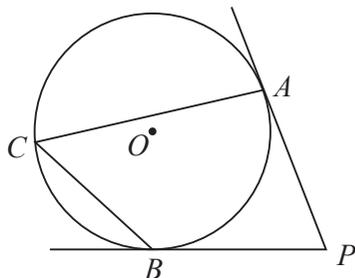
$$(3) \angle CED = \frac{1}{2} (\widehat{CD} + \widehat{AB}) = \frac{1}{2} (180^\circ + 84^\circ) = 132^\circ.$$

答： $\widehat{AB} = 84^\circ$ ， $\angle CAD = 90^\circ$ ， $\angle CED = 132^\circ$ 。

- ⑦ 如圖， \overrightarrow{PA} 、 \overrightarrow{PB} 切圓 O 於 A 、 B 兩點，若 $\angle P=70^\circ$ ，求 $\angle C$ 。 課 P115 例 12

10分 10分

$$\begin{aligned}\angle P &= \frac{1}{2} (\widehat{ACB} - \widehat{AB}) \\ 70^\circ &= \frac{1}{2} (360^\circ - \widehat{AB} - \widehat{AB}) \\ 140^\circ &= 360^\circ - 2\widehat{AB} \\ \widehat{AB} &= 110^\circ \\ \angle C &= \frac{1}{2} \widehat{AB} = \frac{1}{2} \times 110^\circ = 55^\circ.\end{aligned}$$



答：55°。

- ⑧ 如圖，圓內兩弦 \overline{AB} 、 \overline{CD} 交於 P 點，若 $\overline{PA}=18$ ， $\overline{PB}=8$ ， $\overline{PC}:\overline{PD}=1:4$ ，求 \overline{PD} 。 課 P116 例 13

10分 10分

設 $\overline{PC}=x$ ，則 $\overline{PD}=4x$ ，

由圓的內幕性質可知

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$

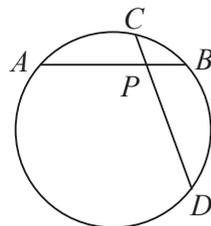
$$18 \times 8 = x \times 4x$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6 \text{ 或 } -6 \text{ (不合)}$$

$$\overline{PD} = 4x = 4 \times 6 = 24。$$

答：24。



- ⑨ 如圖， \overline{PA} 交圓於 A 、 B 兩點， \overrightarrow{PC} 為圓的切線， C 為切點，若 $\overline{AB}=3$ ， $\overline{PB}=2$ ，求 \overline{PC} 。 課 P118 例 15

10分 10分

由圓的切割線性質可知

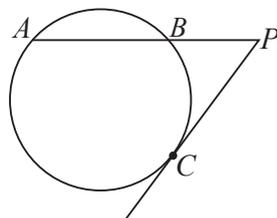
$$\overline{PC}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$$

$$= (3+2) \times 2$$

$$= 10$$

$$\overline{PC} = \sqrt{10} \text{ 或 } -\sqrt{10} \text{ (不合)}。$$

答： $\sqrt{10}$ 。



精熟題

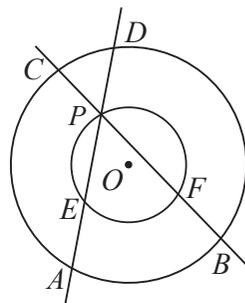
- ① 如圖，大小兩個同心圓中， A 、 B 、 C 、 D 為大圓上相異四點， \overrightarrow{AD} 、 \overrightarrow{BC} 分別與小圓交於 E 、 F 兩點，且 \overrightarrow{AD} 與 \overrightarrow{BC} 的交點 P 剛好落在小圓上，若 $\widehat{AB}=80^\circ$ ， $\widehat{CD}=30^\circ$ ，求 \widehat{EF} 的度數。 10分

$$\begin{aligned}\angle APB &= \frac{1}{2} (\widehat{AB} + \widehat{CD}) \\ &= \frac{1}{2} (80^\circ + 30^\circ) = 55^\circ,\end{aligned}$$

又 $\angle EPF$ 為小圓的圓周角，

$$\therefore \angle EPF = \frac{1}{2} \widehat{EF},$$

$$\begin{aligned}\text{故 } \widehat{EF} &= 2\angle EPF = 2\angle APB \\ &= 2 \times 55^\circ = 110^\circ.\end{aligned}$$



答：110°。

- ★ ② 如圖，有一個圓通過 $\triangle ABC$ 的三個頂點，且 \overline{BC} 的中垂線與 \widehat{AC} 相交於 D 點，若 $\angle B=78^\circ$ ， $\angle C=42^\circ$ ，求 \widehat{AD} 的度數。 10分

如圖， $\because \overline{BC}$ 為圓的一弦，

$\therefore \overline{BC}$ 的中垂線會通過圓心，

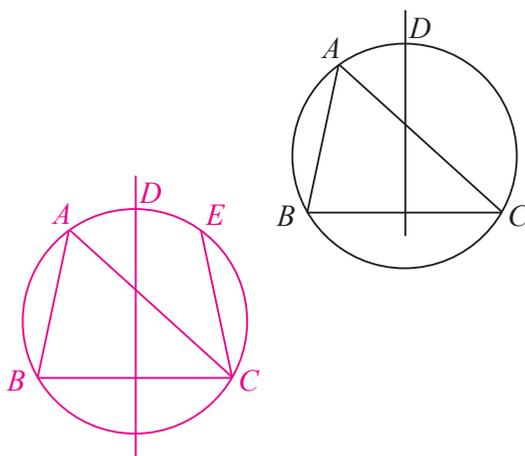
以 \overline{BC} 的中垂線為對稱軸，

作圓上一點 A 的對稱點 E ，

則 E 點也會在圓上，

$$\widehat{AD} = \widehat{DE}, \quad \angle ECB = \angle ABC = 78^\circ,$$

$$\begin{aligned}\text{故 } \widehat{AD} &= \frac{1}{2} \widehat{AE} = \angle ECA \\ &= \angle ECB - \angle ACB \\ &= 78^\circ - 42^\circ \\ &= 36^\circ.\end{aligned}$$



答：36°。