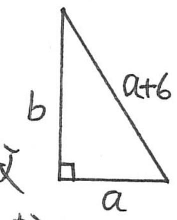
國九上 數學 週末作業 3-1 推理證明(2)　　108/12/13

班級：　　座號：　　姓名

1. 已知直角三角形中，$a+6$ 為斜邊長，a、b 為兩股長，其中 a、b 為正整數， 求證 b^2 為 12 的倍數。



pf:

$a^2+b^2=(a+6)^2$

$b^2=(a+6)^2-a^2$

$=a^2+12a+36-a^2$

$=12a+36$

$=12(a+3)$

∵ $a+3$ 為整數

∴ b^2 為 12 倍數

2. 已知 b 為正整數，$a^2+5^2=(4b+29)^2$，則 a^2 一定是哪一個數的倍數？ B

(A) 6　(B) 8　(C) 10　(D) 12

pf: $a^2=(4b+29)^2-5^2$

$=(4b+29+5)(4b+29-5)$

$=(4b+34)(4b-24)$

$=8(2b+17)(b-6)$

∵ $(2b+17)(b-6)$ 為整數

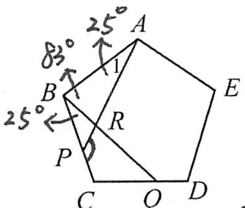
∴ a^2 為 8 倍數

A: (B)

3. 如圖，$ABCDE$ 為正五邊形，若 $\angle 1=25°$，$\overline{BP}=\overline{CQ}$，

(1) $\triangle ABP\cong\triangle$ BCQ (SAS 全等)

(2) 求 $\angle BRA$ 與 $\angle RPC$。



(1) pf: $\triangle ABP$ 和 $\triangle BCQ$ 中

∵ $\overline{AB}=\overline{BC}$、$\overline{BP}=\overline{CQ}$

$\angle ABP=\angle BCQ=108°$

∴ $\triangle ABP\cong\triangle BCQ$ (SAS)

(2) $\angle CBQ=\angle 1=25°$、$\angle ABR=108°-25°=83°$

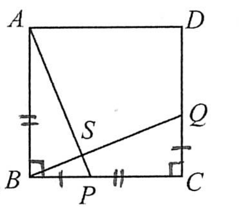
$\angle BRA=180°-83°-25°=72°$ #

$\angle RPC=108°+25°=133°$ #

4. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為正方形，P、Q 兩點分別在 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 上，若 $\overline{CP}=\overline{DQ}$，

(1) 求證 $\triangle ABP\cong\triangle BCQ$

(2) 若 $\angle SBP=22°$，求 $\angle BAS$。



(1) pf: ∵ $\overline{BC}=\overline{CD}$、$\overline{CP}=\overline{DQ}$

∴ $\overline{BP}=\overline{BC}-\overline{CP}=\overline{CD}-\overline{DQ}=\overline{CQ}$

$\triangle ABP$ 和 $\triangle BCQ$ 中

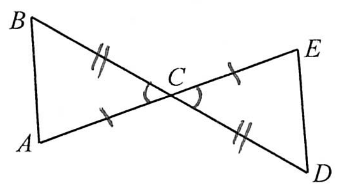
∵ $\overline{BP}=\overline{CQ}$、$\overline{AB}=\overline{BC}$、$\angle ABP=\angle BCQ=90°$

∴ $\triangle ABP\cong\triangle BCQ$ (SAS)

(2) ∵ 全等

∴ $\angle BAS=\angle SBP=22°$ #

5. 如圖，$\overline{AE}$、$\overline{BD}$ 互相平分於 C 點，求證 $\overline{AB}\,//\,\overline{DE}$



pf: $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 中

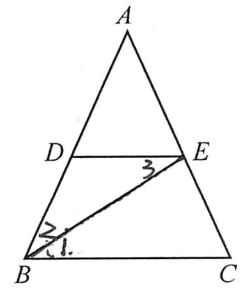
∵ $\overline{AC}=\overline{EC}$、$\overline{BC}=\overline{DC}$、$\angle ACB=\angle ECD$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle EDC$ (SAS)

⇒ $\angle A=\angle E$ (對應角相等)

⇒ $\overline{AB}\,//\,\overline{DE}$ (內錯角相等)

6. 如圖，$\overline{BE}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線，$\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$，求證 $\triangle BDE$ 為等腰三角形。



pf: ∵ $\overline{BE}$ 為 $\angle ABC$ 的分角線

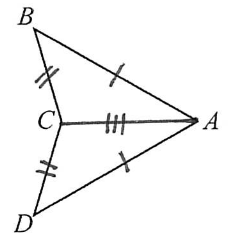
∴ $\angle 1=\angle 2$ —①

又 $\overline{DE}\,//\,\overline{BC}$

∴ $\angle 1=\angle 3$ —②

由①② $\angle 2=\angle 3$ ⇒ $\triangle BDE$ 為等腰△

7. 如圖，$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{CD}$，求證 $\angle ABC=\angle ADC$。



pf: 連 $\overline{AC}$

$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 中

∵ $\overline{AB}=\overline{AD}$

$\overline{BC}=\overline{CD}$

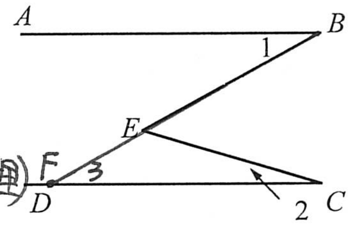
$\overline{AC}=\overline{AC}$

∴ $\triangle ABC\cong\triangle ADC$ (SSS)

⇒ $\angle ABC=\angle ADC$

8. 已知：如圖，$\angle BEC=\angle 1+\angle 2$。

求證：$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$。



pf: 延長 $\overleftrightarrow{BE}$ 交 $\overline{CD}$ 於 F

∵ $\angle BEC=\angle 2+\angle 3$ (外角定理)

又 $\angle BEC=\angle 1+\angle 2$

∴ $\angle 1+\angle 2=\angle 2+\angle 3$

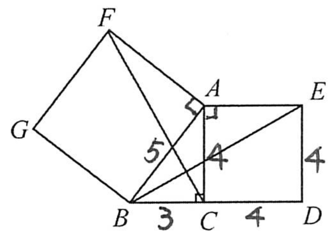
⇒ $\angle 1=\angle 3$

⇒ $\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$ (內錯角相等)

9. 如圖，四邊形 $ABGF$ 與 $ACDE$ 都是正方形，$\angle ACB=90°$，

(1) $\triangle AFC\cong\triangle$ ABE (SAS 全等)

(2)若 $\overline{BC}=3$，$\overline{AB}=5$，求 $\overline{CF}$。



(1) pf: $\triangle AFC$ 和 $\triangle ABE$ 中

∵ $\overline{AF}=\overline{AB}$、$\overline{AC}=\overline{AE}$

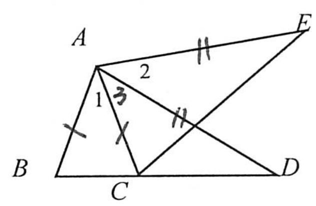
又 $\angle FAC=90°+\angle BAC=\angle BAE$

∴ $\triangle AFC\cong\triangle ABE$ (SAS)

(2) $\overline{AC}=\sqrt{5^2-3^2}=4$

⇒ $\overline{CF}=\overline{BE}=\sqrt{4^2+(3+4)^2}=\sqrt{16+49}=\sqrt{65}$ #

10. 如圖，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}=\overline{AE}$，$\angle 1=\angle 2$，求證 $\overline{BD}=\overline{CE}$



pf: $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACE$ 中

∵ $\overline{AB}=\overline{AC}$、$\overline{AD}=\overline{AE}$

又 $\angle BAD=\angle 1+\angle 3$

$=\angle 2+\angle 3$

$=\angle CAE$

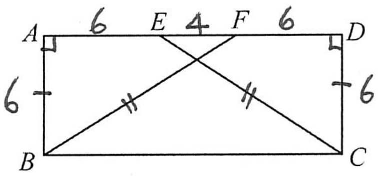
∴ $\triangle ABD\cong\triangle ACE$ (SAS)

⇒ $\overline{BD}=\overline{CE}$

11. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為長方形，E、F 皆在 $\overline{AD}$ 上，$\overline{CE}=\overline{BF}$，回答下列問題：

(1) 求證△ABF≅△DCE。

(2) 若 $\overline{AB}=6$，$\overline{DE}=10$，$\overline{EF}=4$，求 $\overline{AE}$ 與 $\overline{CE}$。



(1) pf：△ABF和△DCE中

∵ $\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{BF}=\overline{CE}$

$\angle A=\angle D=90^\circ$

∴ △ABF≅△DCE(SAS)

(2) ∵全等

∴ $\overline{AF}=\overline{DE}=10$

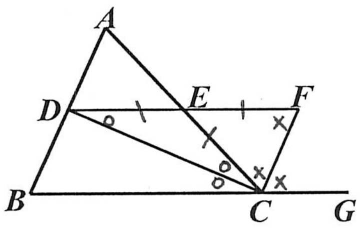
⇒ $\overline{AE}=10-4=6$ #

$\overline{CE}=\sqrt{10^2+6^2}$

$=\sqrt{136}$

$=2\sqrt{34}$ #

12. △ABC 中，C 介於 B、G 之間，且∠ACB之分角線交 $\overline{AB}$ 於 D，過 D 作 $\overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E，交∠ACG的分角線於 F，若 $\overline{CE}=4$，則 $\overline{CD}^2+\overline{CF}^2=$？



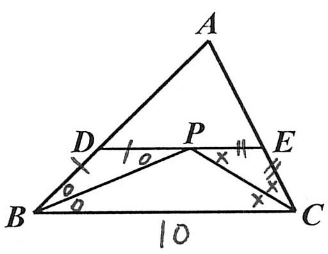
∵ $\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{CE}=4$

∴ $\overline{DF}=4+4=8$

∵ $\angle DCF=90^\circ$

∴ $\overline{CD}^2+\overline{CF}^2=\overline{DF}^2=8^2=64$ #

13. 如圖，$\overline{BP}$ 平分∠ABC，$\overline{CP}$ 平分∠ACB，$\overline{DE}$ 經過 P 點，且 $\overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$，若△$ADE$ 周長=25，且 $\overline{BC}=10$，求△ABC 周長



∵ $\overline{DB}=\overline{DP}$，$\overline{EC}=\overline{EP}$

∴ △ADE周長 $=\overline{AB}+\overline{AC}=25$

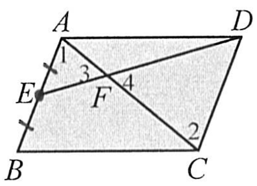
⇒ △ABC周長 $=\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}$

$=25+10$

$=35$ #

14. 已知：如下圖，在平行四邊形 $ABCD$ 中，E 為 $\overline{AB}$ 的中點，F 為 $\overline{AC}$ 與 $\overline{ED}$ 的交點

求證：$\overline{CF}=2\overline{AF}$。



證明：

(1) 在△AEF 和△CDF 中，

∵ $\begin{cases}\angle 1=\angle 2(\text{內錯角相等})\\ \angle 3=\angle 4(\text{對頂角相等})\end{cases}$

∴△AEF～△CDF（AA 相似性質）。

(2) E 為 $\overline{AB}$ 的中點，$\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{AB}$，

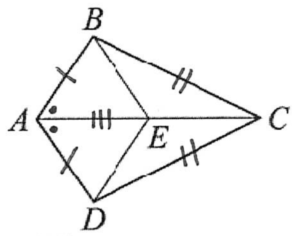
又 $\overline{AB}=\overline{CD}$，$\overline{AE}=\frac{1}{2}\overline{CD}$，

得 $\overline{AE}:\overline{CD}=1:2$，

又 $\overline{AF}:\overline{CF}=\overline{AE}:\overline{CD}=1:2$，

故 $\overline{CF}=2\overline{AF}$。

15. 如圖，$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$，證明 $\overline{BE}=\overline{DE}$ 的過程如下，則正確的證明順序為何？



答：乙.丁.戊.甲.丙

4 甲：$\overline{AB}=\overline{AD}$，∠BAC＝∠DAC，$\overline{AE}=\overline{AE}$

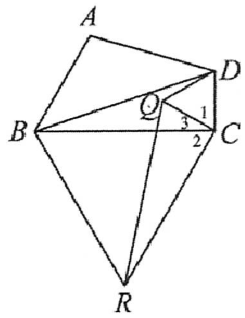
1 乙：$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{CB}=\overline{CD}$，$\overline{AC}=\overline{AC}$

5 丙：△ABE ≅ △ADE，故 $\overline{BE}=\overline{DE}$

2 丁：△ABC ≅ △ADC

3 戊：∠BAC＝∠DAC

16. 如圖，四邊形 ABCD 中，分別以 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 為邊作正△BCR 與正△CDQ，證明 $\overline{BD}=\overline{RQ}$。



證明:

∵(1) △BCR、△CDQ 都是正三角形，

∴∠1＝∠2＝ 60 度，

∠1＋∠3＝ ∠2+∠3

即∠DCB＝∠QCR。

(2)在△DCB 與△QCR 中

∵ $\overline{CD}=\overline{CQ}$（△CDQ為正△）

$\overline{BC}=\overline{RC}$（三角形RBC為正三角形）

∠DCB＝∠QCR，

∴△DCB ≅ △QCR（SAS 全等性質），故 $\overline{BD}=\overline{RQ}$

17. 如圖，$ABCD$ 為正方形色紙，若 $\overline{BE}=\overline{DF}$，證明△$ABE$≅△$ADF$ 的過程甲、乙兩生採用的方法如下：

（甲）$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BE}=\overline{DF}$，∠$B$＝∠$D$，

故△ABE≅△ADF。

（乙）將色紙由 $\overline{AC}$ 對摺，使 B、D 重疊，E、F 重疊，

故△ABE≅△ADF。

關於兩人的作法何者正確？

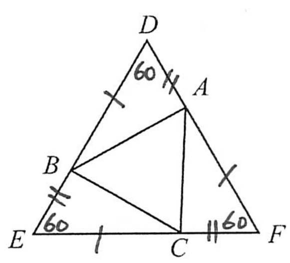
(A) 兩人都對

(B) 兩人都錯

(C) 甲對，乙錯

(D) 甲錯，乙對

18. 如圖，△DEF 為正三角形，$\overline{AF}=\overline{BD}=\overline{CE}$，求證△$ABC$ 為正三角形。



Pf：△ABD.△BCE和△CAF中

∵ $\angle D=\angle E=\angle F=60^\circ$

$\overline{DB}=\overline{EC}=\overline{FA}$

又 $\overline{DF}=\overline{DE}=\overline{EF}$

⇒ $\overline{DF}-\overline{AF}=\overline{DE}-\overline{DB}=\overline{EF}-\overline{EC}$

⇒ $\overline{DA}=\overline{EB}=\overline{FC}$

∴ △ABD≅△BCE≅△CAF(SAS)

⇒ $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CA}$

⇒ △ABC為正△