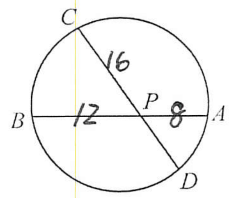
國九上 數學 週末作業 2-2(3) 圓冪、3-1 推理證明(1)　　108/12/06

班級:　　座號:　　姓名

1. 如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 交於 P 點，若 $\overline{PA}=8$，$\overline{PC}=16$，$\overline{PB}=12$，求 $\overline{PD}$。

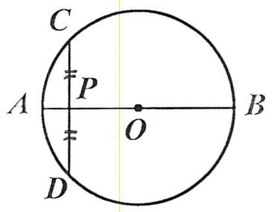


$\because \overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

$\therefore 8\times12=16\times\overline{PD}$

$\overline{PD}=6$ #

2. 如圖，$\overline{AB}$ 為直徑，$\overline{AB}$ 垂直弦 $\overline{CD}$ 於 P 點，若 $\overline{AP}=2$，$\overline{BP}=13$，則 $\overline{CD}=$？



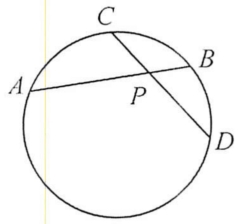
$\because \overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

且 $\overline{PC}=\overline{PD}$

$\therefore 2\times13=\overline{PC}^2=26$

$\overline{PC}=\sqrt{26}\Rightarrow\overline{CD}=\sqrt{26}\times2=2\sqrt{26}$ #

3. 如圖，圓內兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 交於 P 點，若 $\overline{PA}=x+2$，$\overline{PB}=4$，$\overline{PC}=x-3$，$\overline{PD}=8$，求 x 的值。



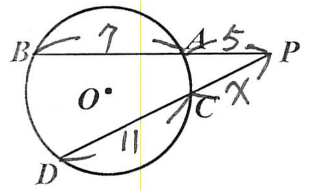
$\because \overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

$\therefore (x+2)\times4=(x-3)\times8$

$4x+8=8x-24$

$4x=32$　$x=8$ #

4. 如圖，若 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 為兩弦，其延長線於圓外相交於 P 點，且 $\overline{AB}=7$，$\overline{PA}=5$，$\overline{CD}=11$，則 $\overline{PC}=$？



設 $\overline{PC}=x$

$\because \overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

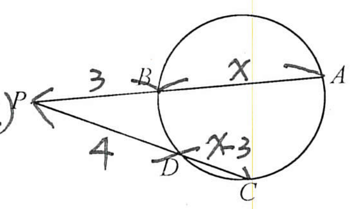
$\therefore 5\times(5+7)=x(x+11)$

$\Rightarrow x^2+11x-60=0$

$(x+15)(x-4)=0$ → $x=-15$ or 4 (不合)

$\Rightarrow \overline{PC}=4$ #

5. 如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$，其延長線交於圓外 P 點，若 $\overline{AB}=x$，$\overline{PB}=3$，$\overline{CD}=x-3$，$\overline{PD}=4$，求 x 的值。



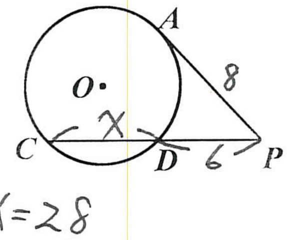
$\because \overline{PB}\times\overline{PA}=\overline{PD}\times\overline{PC}$

$\therefore 3(x+3)=4(x-3+4)$

$3x+9=4x+4$

$x=5$ #

6. 如圖，若 $\overline{PA}$ 切圓 O 於 A 點，$\overline{PC}$ 為割線，且 $\overline{PA}=8$，$\overline{PD}=6$，則 $\overline{CD}=$？



設 $\overline{CD}=x$

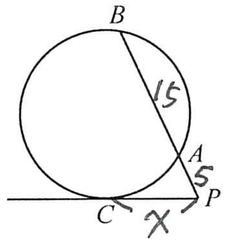
$\because \overline{PA}^2=\overline{PD}\times\overline{PC}$

$\therefore 8^2=6(x+6)$

$64=6x+36$ → $6x=28$

$x=\frac{14}{3}$ $\Rightarrow \overline{CD}=\frac{14}{3}$ #

7. 如圖，$\overline{PB}$ 割圓於 A 點，$\overleftrightarrow{PC}$ 為圓的切線，若 $\overline{AB}=15$，$\overline{PA}=5$，求 $\overline{PC}=$？。



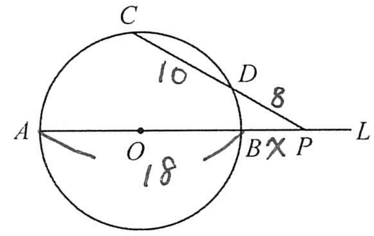
設 $\overline{PC}=x$

$x^2=5\times(5+15)$

$x^2=100$

$x=10\Rightarrow\overline{PC}=10$ #

8. 如圖，圓 O 半徑為 9，直線 L 通過圓心 O 點。若 $\overline{CD}=10$，$\overline{PD}=8$，$\overline{AB}=18$，求 $\overline{PB}$=?



$\overline{AB}=9\times2=18$

設 $\overline{PB}=x$

$\because \overline{PB}\times\overline{PA}=\overline{PD}\times\overline{PC}$

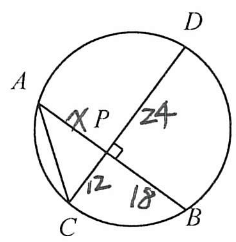
$\therefore x(x+18)=8(8+10)$

$x^2+18x-144=0$ → $(x-6)(x+24)=0$

$x=6$ or -24 (不合)

$\Rightarrow \overline{PB}=6$ #

9. 如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 P 點，$\overline{AB}\perp\overline{CD}$，若 $\overline{PB}=18$，$\overline{PC}=12$，$\overline{PD}=24$，求 $\overline{AC}$。



設 $\overline{PA}=x$

$x\times18=12\times24$

$18x=288$

$x=16$

$\overline{AC}=\sqrt{16^2+12^2}$

$=\sqrt{400}=20$ #

10. 若 a、b 為整數，寫出下列何者為奇數，何者為偶數？

(A) $8(a+4)$ 為＿偶＿。 (B) $2(a+3)+1$ 為＿奇＿。

(C) $4b+1$ 為＿奇＿。 (D) $6b+4$ 為＿偶＿。

(E) $10a-5$ 為＿奇＿。

(A) $2(4a+16)\Rightarrow$ 偶

(B) $2(a+3)+\underline{1}\Rightarrow$ 奇

(C) $2(2b)+\underline{1}\Rightarrow$ 奇

(D) $2(3b+2)\Rightarrow$ 偶

(E) $10a-5$

$=10a-6+1$

$=2(5a-3)+\underline{1}\Rightarrow$ 奇

11. 已知 a 為偶數，b 為奇數，求證 $2a+b$ 為奇數。

pf: 令 $a=2n$，n 為整數

$b=2m+1$，m 為整數

$2a+b=2(2n)+2m+1$

$=4n+2m+1$

$=2(2n+m)+\underline{1}$

$\because 2n+m$ 為整數

$\therefore 2a+b$ 為奇數

12. 已知：直角三角形的三邊長為 7、b、c（b、c 為正整數），其中 c 為斜邊。

求證：$(c+b)$是 49 的因數。

pf: ∵ $7^2+b^2=c^2$

∴ $49=c^2-b^2$

$=(c+b)(c-b)$

∵ $(c+b)$、$(c-b)$皆為整數

∴$(c+b)$是49的因數

13. 已知：a 是正整數，$B=(4a+3)^2+6(4a+3)+13$

求證：B 是 8 的倍數。

pf: $B=16a^2+24a+9+24a+18+13$

$=16a^2+48a+40$

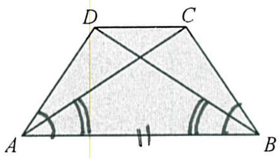
$=8(2a^2+6a+5)$

∵ $2a^2+6a+5$為整數

∴ B是8的倍數

14. 已知：如下圖，$\angle DAB=\angle CBA$，$\angle DBA=\angle CAB$。

求證：$\overline{AC}=\overline{BD}$。



證明：

在△ABC 和△BAD 中，

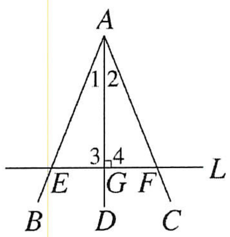
∵ $\begin{cases} \angle CBA=\angle DAB \text{（已知）} \\ \overline{AB}=\overline{AB} \text{（共用邊）} \\ \angle CAB=\angle DBA \text{（已知）} \end{cases}$

∴△ABC≅△BAD(ASA 全等性質)，

故 $\overline{AC}=\overline{BD}$ (對應邊相等)。

15. 已知：如圖，$\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線。

求證：若直線 $L\perp\overline{AD}$ 且交 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 於 E、F 兩點，則 $\overline{AE}=\overline{AF}$。



證明：

在△AEG 和△AFG 中，

∵ ∠1 = ∠2 （$\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線）

$\overline{AG}$ = $\overline{AG}$ （共用邊）

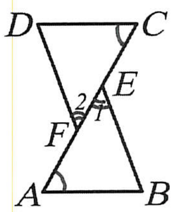
∠3 = ∠4 =90 度（$\overline{AD}\perp L$）

∴△AEG≅△AFG（ ASA 全等性質）

⇒ $\overline{AE}=\overline{AF}$ (對應邊相等)。

16. 已知：如圖，$\overline{AB}//\overline{CD}$，$\angle 1=\angle 2$，$\overline{AF}=\overline{CE}$。

求證：$\overline{BE}=\overline{DF}$。



pf: △ABE和△CDF中

∵ $\overline{AB}//\overline{CD}$ ⇒ ∠A=∠C (內錯角相等)

∠1=∠2

又 $\overline{AE}=\overline{AF}+\overline{EF}=\overline{CE}+\overline{EF}=\overline{CF}$

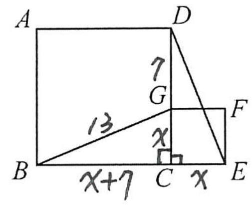
∴△ABE≅△CDF(ASA)

⇒ $\overline{BE}=\overline{DF}$ (對應邊相等)

17. 如圖，四邊形 $ABCD$ 與 $CEFG$ 都是正方形

(1) 求證△BCG≅△DCE

(2) 若 $\overline{DG}=7$，$\overline{BG}=13$，求 $\overline{CE}$。



(1) pf: △BCG和△DCE中

∵ ∠BCG=∠DCE=90°

$\overline{BC}=\overline{DC}$ (ABCD為正方形)

$\overline{GC}=\overline{EC}$ (CEFG為正方形)

∴△BCG≅△DCE(SAS)

(2) 設 $\overline{CG}=\overline{CE}=x$

⇒ $\overline{BC}=\overline{DC}=x+7$

$(x+7)^2+x^2=13^2$

$x^2+14x+49+x^2=169$

$2x^2+14x-120=0$

$x^2+7x-60=0$

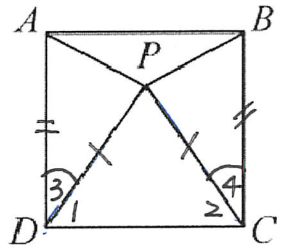
$(x-5)(x+12)=0$

$x=5$ or -12 (不合)

⇒ $\overline{CE}=5$ #

18. 已知：正方形 $ABCD$ 中，$\overline{PD}=\overline{PC}$，

求證：$\overline{PA}=\overline{PB}$



pf: △ADP和△BCP中

∵ $\overline{PD}=\overline{PC}$

$\overline{AD}=\overline{BC}$

又 $\overline{PD}=\overline{PC}$ ⇒ ∠1=∠2

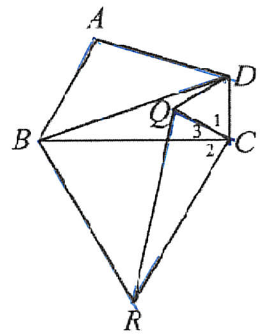
∠3=90°−∠1=90°−∠2=∠4

∴△ADP≅△BCP(SAS)

$\overline{PA}=\overline{PB}$

(對應角相等)

19. 如圖，四邊形 ABCD 中，分別以 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 為邊作正△BCR 與正△CDQ，證明 $\overline{BD}=\overline{RQ}$。



證明：

∵(1) △BCR、△CDQ 都是正三角形，

∴∠1=∠2= 60 度，

∠1+∠3= ∠2+∠3

即∠DCB=∠QCR。

(2)在△DCB 與△QCR 中

∵ $\overline{CD}=\overline{CQ}$ (△CDQ為正△)

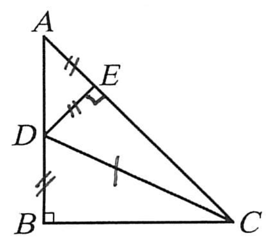
$\overline{BC}$ = $\overline{RC}$ (三角形RBC為正三角形)

∠DCB=∠QCR，

∴△DCB≅△QCR（ SAS 全等性質），

故 $\overline{BD}=\overline{RQ}$ (對應邊相等)。

20. 如圖，△ABC 為等腰三角形，∠B=90°，$\overline{AB}=\overline{BC}$，$\overline{DE}\perp\overline{AC}$，$\overline{AE}=\overline{BD}$。求證 $\overline{CD}$ 平分∠ACB。



pf: (1) $\angle A=\frac{180°-90°}{2}=45°$

⇒ ∠ADE=180°−90°−45°=45°

⇒ $\overline{DE}=\overline{AE}=\overline{BD}$

(2) △CBD和△CED中

∵ $\overline{BD}=\overline{DE}$

$\overline{CD}=\overline{CD}$

∠B=∠DEC=90°

∴ △CBD≅△CED (RHS)

⇒ ∠BCD=∠ECD

故 $\overline{CD}$ 平分∠ACB