

2-1 點、線、圓

1 點與圓的位置關係

對應能力指標 9-s-07

在平面上和一個定點等距離的所有點所形成的圖形稱為圓，而此定點稱為圓心，圓心到圓上任一點的距離稱為半徑。如圖 2-1，以點 O 為圓心， r 為半徑畫圓，因為圓心為 O ，所以稱此圓為圓 O 。



圖 2-1

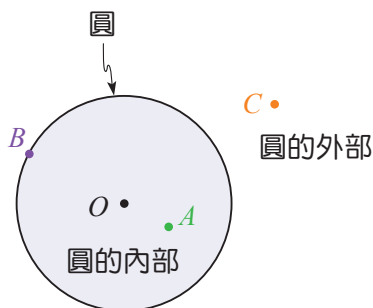


圖 2-2

一圓將所在的平面分成圓的內部、圓、圓的外部。如圖 2-2， A 點在圓內、 B 點在圓上、 C 點在圓外。要知道點與圓的位置關係，可以由此點到圓心的距離與半徑的大小關係來判斷。

點與圓的位置關係	在圓內	在圓上	在圓外
圖示			
點到圓心的距離	小於半徑 ($\overline{OA} < r$)	等於半徑 ($\overline{OB} = r$)	大於半徑 ($\overline{OC} > r$)

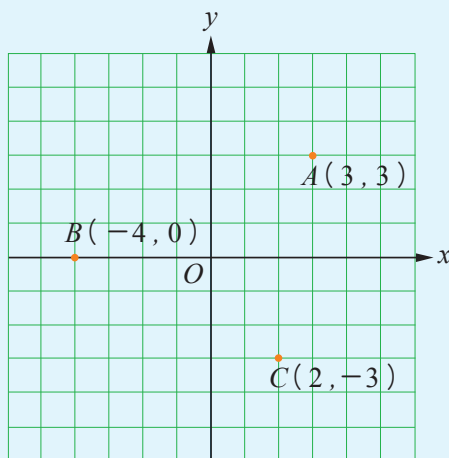
隨堂練習

已知圓 O 的半徑為 5， D 、 E 、 F 三點與此圓心 O 的距離分別為 4、5、8，
判別 D 、 E 、 F 三點與圓 O 的位置關係：(填入圓內、圓上或圓外)

(1) D 點在 圓內。 (2) E 點在 圓上。 (3) F 點在 圓外。

例 1 點與圓的位置關係

如圖，坐標平面上 $A(3, 3)$ 、 $B(-4, 0)$ 、 $C(2, -3)$ 三點。
若圓 O 的圓心是原點 O ，半徑為 4，判別 A 、 B 、 C 三點與圓 O 的位置關係。



解 $\because O(0, 0)$ 為圓心，由兩點距離公式知：

$$(1) \overline{OA} = \sqrt{(3-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{18} > 4 \text{ (半徑)},$$

$\therefore A$ 點在圓外。

$$(2) \overline{OB} = |0 - (-4)| = 4 \text{ (半徑)},$$

$\therefore B$ 點在圓上。

$$(3) \overline{OC} = \sqrt{(2-0)^2 + (-3-0)^2} = \sqrt{13} < 4 \text{ (半徑)},$$

$\therefore C$ 點在圓內。



已知 $A(x_1, y_1)$ 、 $B(x_2, y_2)$ ，
則 $\overline{AB} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ 。

隨堂練習

在坐標平面上，若圓 O 的圓心在原點， $A(-3, 4)$ 在圓 O 上，
求圓 O 的半徑。

$\because A$ 點在圓上，

$$\therefore \text{圓 } O \text{ 的半徑} = \overline{OA} = \sqrt{(-3-0)^2 + (4-0)^2} = 5。$$

2 直線與圓的位置關係

對應能力指標 9-s-06、9-s-07

在平面上，一個圓與一條直線的位置關係有三種情形：

① 不相交：

如圖 2-3，若直線 L 與圓 O 不相交，則 L 上的點都在圓 O 外。

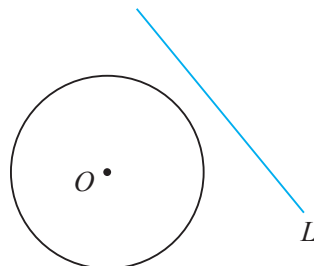


圖 2-3

② 只交於一點：

如圖 2-4，若直線 L 與圓 O 只交於一點 P ，則 L 稱為圓 O 的**切線**， P 點稱為**切點**。

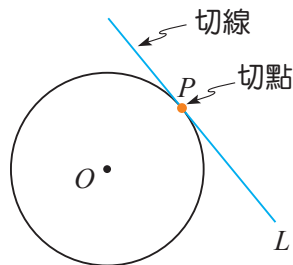


圖 2-4

③ 交於兩點：

如圖 2-5，若直線 L 與圓 O 交於 A 、 B 兩點，則 L 稱為圓 O 的**割線**。

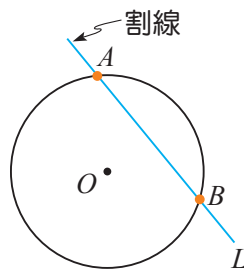


圖 2-5

前面學過，可以用「點到圓心的距離與圓半徑的大小關係」，判別點與圓的位置關係。同樣的，也可以用「圓心到直線的距離與圓半徑的大小關係」，判別直線與圓的位置關係。如圖 2-6， $\overleftrightarrow{CD}$ 通過圓心 O ，交圓 O 於 C 、 D 兩點，且直線 L 垂直 $\overleftrightarrow{CD}$ 。接下來，我們透過直線 L 的移動來觀察直線與圓的位置關係，如圖 2-6 到圖 2-8。

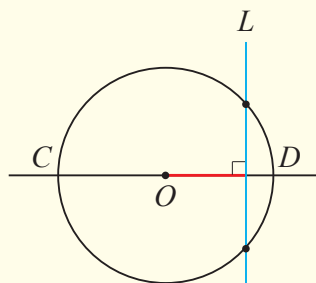


圖 2-6

直線 L 與圓 O 交於兩點，此時圓心 O 到 L 的距離小於半徑。

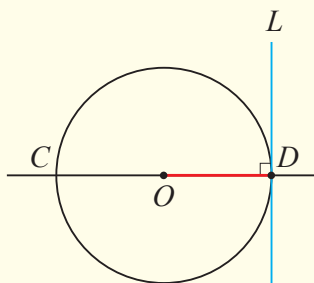


圖 2-7

將直線 L 逐漸向右往 D 點移動，並保持與 $\overleftrightarrow{CD}$ 垂直。當 L 通過 D 點時，圓心 O 到 L 的距離等於半徑。

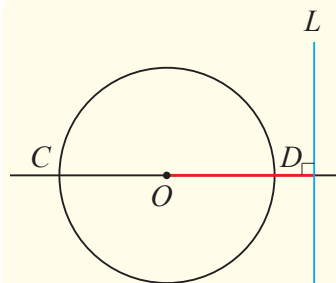


圖 2-8

再將直線 L 向右移動，並保持與 $\overleftrightarrow{CD}$ 垂直。當 L 與圓 O 不相交時，圓心 O 到 L 的距離大於半徑。

在圖 2-7 中，當直線 L 通過圓 O 上的一點 D ，且垂直半徑 $\overline{OD}$ ，此時 L 是否為圓 O 的切線呢？

說明 如圖 2-9，已知直線 $L \perp \overline{OD}$ ，若在 L 上任取異於 D 的一點 Q ，則 O 、 D 、 Q 三點可形成一個直角三角形，其中 $\overline{OQ}$ 為斜邊，所以 $\overline{OQ} >$ 半徑 $\overline{OD}$ ，故 Q 點在圓外。也就是說， L 與圓 O 不可能有除了 D 點之外的第二個交點，故 L 為圓 O 的切線。



要說明直線 L 為圓 O 的切線，須先確認直線 L 與圓 O 只有一個交點。

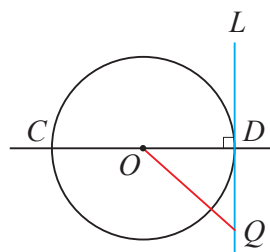


圖 2-9

反過來說，若直線 L 切圓 O 於 D 點，那麼直線 L 是否與 $\overline{OD}$ 垂直呢？

說明 如圖 2-10，若 L 是圓 O 的切線，則除了 D 點外， L 上的其他任一點 Q' 都會在圓外，因此 $\overline{OQ'} >$ 半徑 $\overline{OD}$ 。也就是說，圓心 O 到直線 L 上任一點的距離，以 $\overline{OD}$ 最短，所以 $\overline{OD} \perp L$ 。

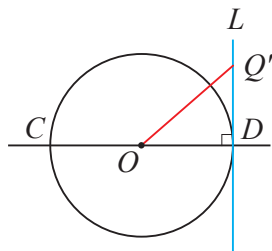
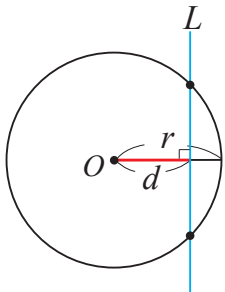
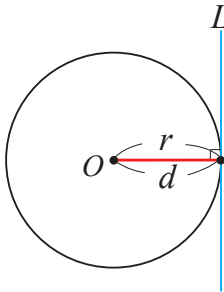
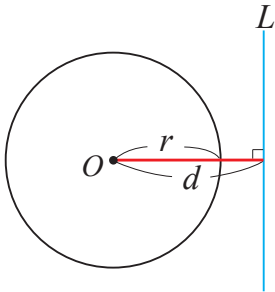


圖 2-10

由前面的討論，如果以 r 表示圓的半徑， d 表示圓心到直線的距離，則直線與圓的位置關係有下列三種情形：

直線與圓的位置關係	交於兩點 (直線 L 是圓的割線)	交於一點(相切) (直線 L 是圓的切線)	不相交
圖示			
圓心到直線的距離	小於半徑 ($d < r$)	等於半徑 ($d = r$)	大於半徑 ($d > r$)



圓與切線的關係

1. 一個圓的切線必垂直於圓心與切點的連線。
2. 圓心到切線的距離等於圓的半徑。

隨堂練習

搭配習作 P24 基礎題 1

圓 O 的半徑為 10，若圓心到三條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 的距離分別為 5、10、13，則 L_1 、 L_2 、 L_3 與圓 O 分別有幾個交點？

- (1) 圓心到 L_1 的距離為 $5 <$ 圓 O 的半徑為 10，
 $\therefore L_1$ 與圓 O 有 2 個交點。
- (2) 圓心到 L_2 的距離為 $10 =$ 圓 O 的半徑為 10，
 $\therefore L_2$ 與圓 O 只有 1 個交點。
- (3) 圓心到 L_3 的距離為 $13 >$ 圓 O 的半徑為 10，
 $\therefore L_3$ 與圓 O 沒有交點。

如圖 2-11，從圓外一點 P 作此圓的一條切線， A 為切點，則 $\overline{PA}$ 稱為 P 點到圓 O 的**切線段長**。

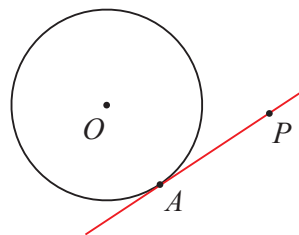
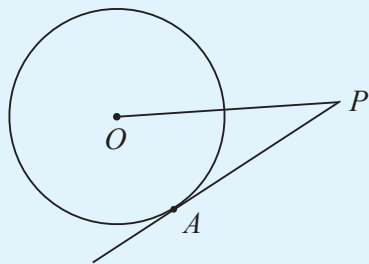


圖 2-11

例 2 求切線段長

如圖， $\overleftrightarrow{PA}$ 與圓 O 切於 A 點，已知圓 O 的半徑為 5， $\overline{OP}=10$ ，求切線段長 $\overline{AP}$ 。



解 如圖，連接 $\overline{OA}$ 。

$\because \overleftrightarrow{PA}$ 與圓相切於 A 點，

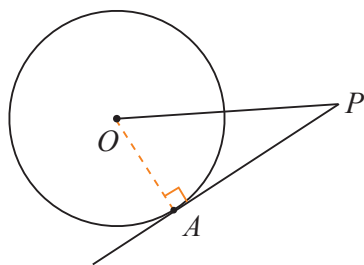
$\therefore \overline{OA} \perp \overleftrightarrow{PA}$ ，故 $\triangle OPA$ 為直角三角形。

又 $\overline{OA}$ 為圓 O 的半徑，

$\therefore \overline{OA}=5$ ，

根據畢氏定理：

$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{10^2 - 5^2} = 5\sqrt{3}。$$



隨堂練習

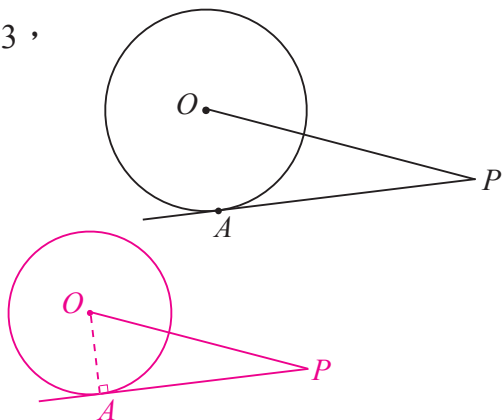
搭配習作 P24 基礎題 2

如圖， $\overleftrightarrow{AP}$ 與圓 O 切於 A 點，已知 $\overline{OP}=13$ ， $\overline{AP}=12$ ，求圓 O 的半徑。

連接 $\overline{OA}$ ，則 $\overline{OA} \perp \overleftrightarrow{AP}$ ，

$$\therefore \overline{OA} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{AP}^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5，$$

故圓 O 的半徑為 5。



如圖 2-12，已知 $\overrightarrow{PA}$ 為圓 O 的切線， A 為切點。以 $\overline{OP}$ 為對稱軸，沿著 $\overline{OP}$ 對摺，可找到 A 點的對稱點 B ，且 $\triangle OBP$ 是 $\triangle OAP$ 的對稱圖形。（搭配附件 7 操作）

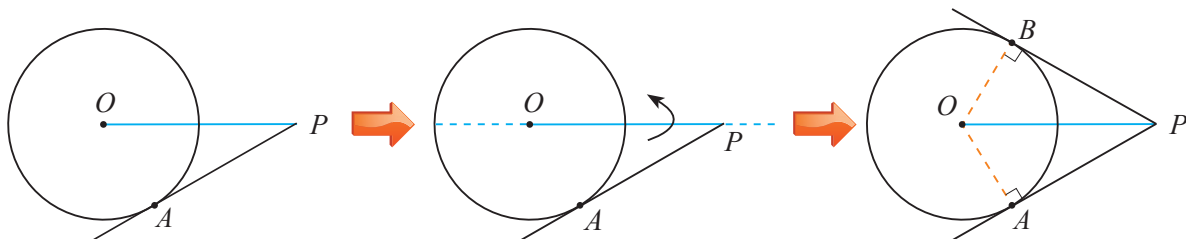


圖 2-12

因此 B 在圓上， $\overrightarrow{PB}$ 為圓 O 的切線， B 為切點，
且 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ， $\angle APO = \angle BPO$ 。

由 $\triangle OBP$ 是 $\triangle OAP$ 的對稱圖形可知： $\overline{OB} = \overline{OA}$ ，
 $\angle OBP = \angle OAP = 90^\circ$ 。

動動腦

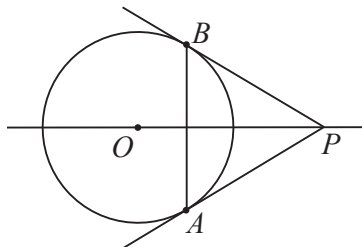
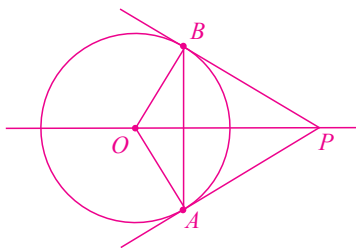
如圖，若 $\overrightarrow{PA}$ 、 $\overrightarrow{PB}$ 為圓 O 的兩切線， A 、 B 為切點，
則 $\overrightarrow{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 有什麼關係呢？（搭配附件 8 操作）

連接 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ ，

則四邊形 $OAPB$ 為箏形，

$\therefore \overrightarrow{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 會互相垂直，

且 $\overrightarrow{OP}$ 會平分 $\overline{AB}$ 。



過圓外一點的兩切線性質

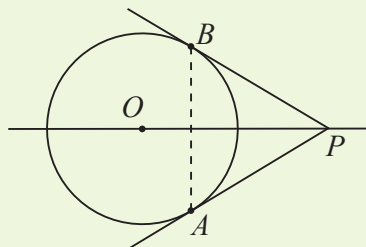
如圖， $\overrightarrow{PA}$ 、 $\overrightarrow{PB}$ 為圓 O 的兩條切線， A 、 B 為切點，則：

(1) 過圓外一點 P 的兩切線段長相等，

即 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 。

(2) $\overrightarrow{OP}$ 平分 $\angle APB$ ，即 $\angle APO = \angle BPO$ 。

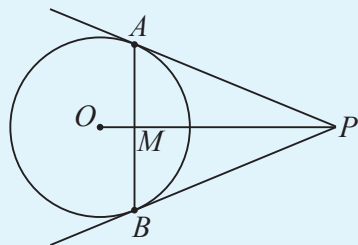
(3) $\overrightarrow{OP}$ 垂直平分 $\overline{AB}$ 。



例 3 過圓外一點的切線應用

搭配習作 P24 基礎題 3

如圖， $\overrightarrow{PA}$ 、 $\overrightarrow{PB}$ 切圓 O 於 A 、 B 兩點，
 $\overline{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 交於 M 點，若圓 O 半徑為 5，
 $\overline{OP}=13$ ，求 $\overline{AB}$ 。



解 如圖，連接 $\overline{OA}$ ，則 $\overline{OA}=5$ 。

$\because \overrightarrow{PA}$ 切圓 O 於 A 點，

$\therefore \angle OAP=90^\circ$ ，

則 $\triangle OAP$ 是直角三角形，

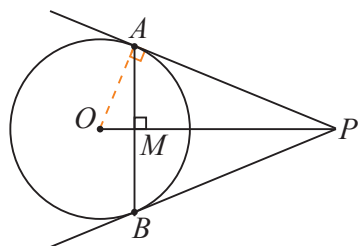
$$\overline{AP} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12。$$

又 $\overrightarrow{OP}$ 垂直平分 $\overline{AB}$ ，← 過圓外一點的兩切線性質

$\therefore \overline{AM}$ 是直角三角形 OAP 斜邊上的高，

$$\text{故 } \overline{AM} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AP}}{\overline{OP}} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}，$$

$$\text{因此 } \overline{AB} = 2 \overline{AM} = 2 \times \frac{60}{13} = \frac{120}{13}。$$



直角三角形斜邊上的高
 $= \frac{\text{兩股乘積}}{\text{斜邊}}$

隨堂練習

如圖， $\overrightarrow{PA}$ 、 $\overrightarrow{PB}$ 切圓 O 於 A 、 B 兩點， $\overline{OP}$ 與 $\overline{AB}$ 相交於 M 點，
 若圓 O 半徑為 6， $\overline{AP}=8$ ，求 $\overline{AB}$ 。

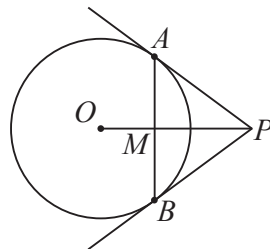
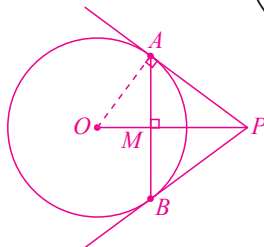
如圖，連接 $\overline{OA}$ ，

則 $\angle OAP=90^\circ$ ， $\triangle OAP$ 是直角三角形，

$$\overline{OP} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10，$$

$$\overline{AM} = \frac{\overline{OA} \times \overline{AP}}{\overline{OP}} = \frac{6 \times 8}{10} = \frac{24}{5}，$$

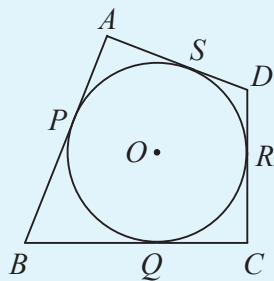
$$\text{故 } \overline{AB} = 2 \overline{AM} = 2 \times \frac{24}{5} = \frac{48}{5}。$$



例 4 圓外切四邊形

搭配習作 P25 基礎題 4

如圖，四邊形 $ABCD$ 的四邊分別與圓 O 切於 P 、 Q 、 R 、 S 四點，說明 $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$ 。

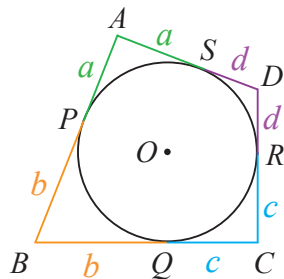


說明

(1) $\because$ 圓外一點到此圓的兩切線段長相等，

$\therefore$ 可令 $\overline{AP} = \overline{AS} = a$ ， $\overline{BP} = \overline{BQ} = b$ ， $\overline{CQ} = \overline{CR} = c$ ， $\overline{DR} = \overline{DS} = d$ 。

$$\begin{aligned} (2) \overline{AB} + \overline{CD} &= (\overline{AP} + \overline{BP}) + (\overline{CR} + \overline{DR}) \\ &= (a + b) + (c + d) = a + b + c + d \\ \overline{AD} + \overline{BC} &= (\overline{AS} + \overline{DS}) + (\overline{BQ} + \overline{CQ}) \\ &= (a + d) + (b + c) = a + b + c + d \\ \text{故 } \overline{AB} + \overline{CD} &= \overline{AD} + \overline{BC}。 \end{aligned}$$



在例題 4 中，四邊形 $ABCD$ 的四邊分別與圓 O 相切，稱四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的**外切四邊形**，且稱圓 O 為四邊形 $ABCD$ 的**內切圓**。



圓外切四邊形的性質

圓外切四邊形兩組對邊長之和相等。



隨堂練習

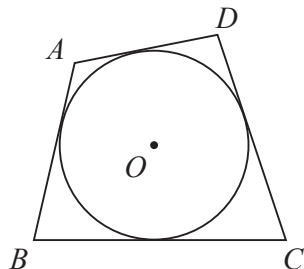
如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的外切四邊形，
 $\overline{AB} = 2x + 1$ ， $\overline{BC} = 2x + 3$ ， $\overline{CD} = 4x - 2$ ，
 $\overline{AD} = 3x - 2$ ，求 x 的值。

$\because$ 四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的外切四邊形，

$\therefore \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC}$

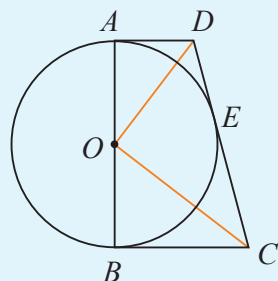
$$(2x + 1) + (4x - 2) = (3x - 2) + (2x + 3)$$

$$x = 2。$$



例 5 切線段長的應用

如圖， $\overline{AD}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 分別切圓 O 於 A 、 B 、 E 三點， $\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑，已知 $\overline{AD}=3$ ， $\overline{BC}=5$ ，回答下列問題：



- (1) 求 $\overline{CD}$ 。
- (2) 連接 $\overline{OD}$ 、 $\overline{OC}$ ，說明 $\angle DOC=90^\circ$ 。

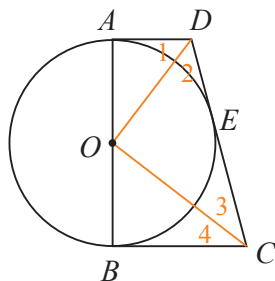
解

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \overline{CD} &= \overline{DE} + \overline{CE} \\
 &= \overline{AD} + \overline{BC} \quad \leftarrow \text{過圓外一點的兩切線段長相等} \\
 &= 3 + 5 = 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad &\because \overline{AD}、\overline{BC}、\overline{CD} \text{ 分別切圓 } O \text{ 於 } A、B、E \text{ 三點，} \\
 &\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\text{又 } \overline{AB} \text{ 為圓 } O \text{ 的直徑，} \therefore \overline{OA} \perp \overline{AD}, \overline{OB} \perp \overline{BC}, \\
 &\text{因此 } \overline{AD} \parallel \overline{BC}, \angle ADE + \angle BCE = 180^\circ \\
 &\quad (\angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) = 180^\circ \\
 &\quad 2\angle 2 + 2\angle 3 = 180^\circ \\
 &\quad \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ
 \end{aligned}$$

故 $\angle DOC=90^\circ$ 。



隨堂練習

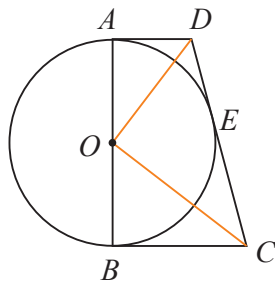
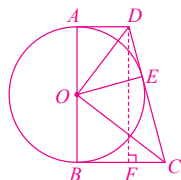
承例題 5，回答下列問題：

- (1) 求 $\overline{AB}$ 。
- (2) 說明 $\triangle DOC$ 的面積是梯形 $ABCD$ 面積的一半。

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &\text{作 } \overline{DF} \perp \overline{BC}, \text{ 則 } \overline{CF} = 5 - 3 = 2, \\
 &\text{故 } \overline{AB} = \overline{DF} = \sqrt{8^2 - 2^2} = 2\sqrt{15}.
 \end{aligned}$$

- (2) 連接 $\overline{OE}$ ，

由 SSS 全等性質可知 $\triangle AOD \cong \triangle EOD$ ， $\triangle EOC \cong \triangle BOC$ ，
故 $\triangle DOC$ 的面積 $= \triangle EOD + \triangle EOC =$ 梯形 $ABCD$ 面積的一半。



弦與弦心距

如圖 2-13， $\overline{AB}$ 為圓 O 的弦， $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ 於 M 點，則 $\overline{OM}$ 稱為 $\overline{AB}$ 的**弦心距**。在本教材中，弦心距表示圓心到此弦的垂直線段，也代表此線段的長度。

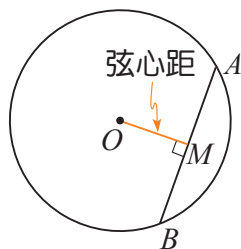
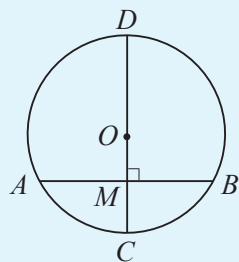


圖 2-13

例 6 弦心距垂直平分弦

如圖， $\overline{AB}$ 是圓 O 的一弦， $\overline{CD}$ 為直徑， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 於 M 點，說明 $\overline{AM} = \overline{BM}$ 。



說明 連接 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 。

在 $\triangle AOM$ 與 $\triangle BOM$ 中，

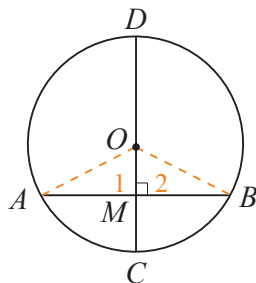
$\because \angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ ($\overline{CD} \perp \overline{AB}$)，

$\overline{OM} = \overline{OM}$ (公用邊)，

$\overline{OA} = \overline{OB}$ (半徑)，

$\therefore \triangle AOM \cong \triangle BOM$ (RHS 全等性質)，

故 $\overline{AM} = \overline{BM}$ 。



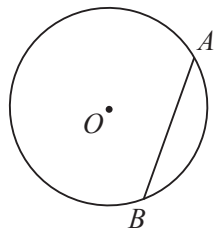
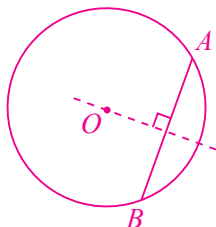
動動腦

如圖，若 $\overline{AB}$ 是圓 O 上的一弦，則 $\overline{AB}$ 的中垂線會通過圓心 O 嗎？

$\because \overline{AB}$ 的中垂線會垂直平分 $\overline{AB}$ ，

$\therefore \overline{AB}$ 的中垂線是此圓的對稱軸，

因此會通過圓心 O 。





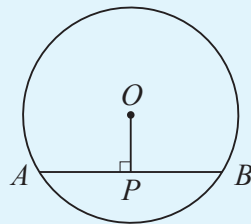
弦的性質

1. 一弦的弦心距垂直平分此弦。
2. 弦的中垂線會通過圓心。

例 7 弦心距的應用

搭配習作 P25 基礎題 5

如圖， $\overline{AB}$ 為圓 O 的一弦，若 $\overline{AB}$ 的弦心距 $\overline{OP}=3$ ， $\overline{AB}=6\sqrt{3}$ ，求圓 O 的半徑。



解

$\because \overline{OP}$ 為 $\overline{AB}$ 的弦心距，

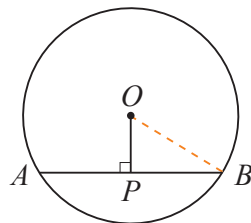
$\therefore \overline{OP}$ 垂直平分弦 $\overline{AB}$ ，

$$\overline{BP} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 6\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$$

連接 $\overline{OB}$ ，依據畢氏定理：

$$\overline{OB} = \sqrt{\overline{BP}^2 + \overline{OP}^2} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 + 3^2} = 6$$

故圓 O 的半徑為 6。



隨堂練習

已知 $\overline{AB}$ 為圓 O 的一弦，若 $\overline{AB}$ 的弦心距為 6，圓 O 的半徑為 10，求 $\overline{AB}$ 。

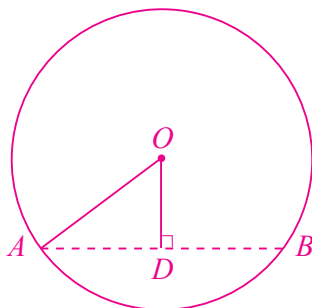
$$\overline{AD} = \sqrt{\text{半徑}^2 - \text{弦心距}^2}$$

$$= \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OD}^2}$$

$$= \sqrt{10^2 - 6^2}$$

$$= 8$$

$$\text{故 } \overline{AB} = \overline{AD} + \overline{DB} = 8 + 8 = 16。$$



接下來，我們來探討在同圓中，弦長與弦心距之間的關係：

● 等弦心距對等弦，等弦對等弦心距

如圖 2-14， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦，

$\overline{OM}$ 、 $\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的弦心距。

連接 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OC}$ ，則 $\overline{OA} = \overline{OC}$ 。

∵ 一弦的弦心距垂直平分此弦，

$$\therefore \overline{OM} \perp \overline{AB}, \overline{ON} \perp \overline{CD}, \overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB}, \overline{CN} = \frac{1}{2} \overline{CD}。$$

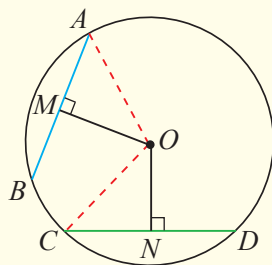


圖 2-14

(1) 等弦心距對等弦

若 $\overline{OM} = \overline{ON}$ ，由畢氏定理可知：

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OM}^2},$$

$$\overline{CN} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{ON}^2},$$

$$\therefore \overline{AM} = \overline{CN},$$

故 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 。

(2) 等弦對等弦心距

若 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，則 $\overline{AM} = \overline{CN}$ ，

由畢氏定理可知：

$$\overline{OM} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AM}^2},$$

$$\overline{ON} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{CN}^2},$$

$$\therefore \overline{OM} = \overline{ON}。$$

● 大弦心距對小弦，小弦對大弦心距

如圖 2-15， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦，

$\overline{OM}$ 、 $\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的弦心距。

連接 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OC}$ ，則 $\overline{OA} = \overline{OC}$ 。

∵ 一弦的弦心距垂直平分此弦，

$$\therefore \overline{OM} \perp \overline{AB}, \overline{ON} \perp \overline{CD}, \overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB}, \overline{CN} = \frac{1}{2} \overline{CD}。$$

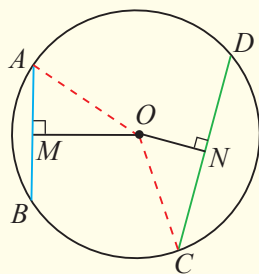


圖 2-15

(1) 大弦心距對小弦

若 $\overline{OM} > \overline{ON}$ ，由畢氏定理可知：

$$\overline{AM} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{OM}^2},$$

$$\overline{CN} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{ON}^2},$$

$$\therefore \overline{AM} < \overline{CN},$$

故 $\overline{AB} < \overline{CD}$ 。

(2) 小弦對大弦心距

若 $\overline{AB} < \overline{CD}$ ，則 $\overline{AM} < \overline{CN}$ ，

由畢氏定理可知：

$$\overline{OM} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AM}^2},$$

$$\overline{ON} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{CN}^2},$$

$$\therefore \overline{OM} > \overline{ON}。$$

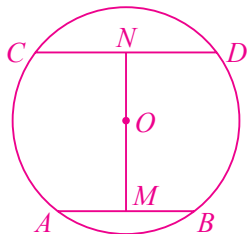
隨堂練習

1. 已知圓 O 的半徑為 10， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦， $\overline{OM}$ 、 $\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的弦心距，若 $\overline{AB}=12$ ， $\overline{CD}=16$ ，比較 $\overline{OM}$ 、 $\overline{ON}$ 的大小關係。

如圖，

$$\because \overline{AB} < \overline{CD},$$

由小弦對大弦心距可知 $\overline{OM} > \overline{ON}$ 。



2. 圓 O 與圓 O' 為半徑相等的兩圓，則圓 O 與圓 O' 稱為等圓。已知 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 分別為圓 O 、圓 O' 兩等圓上的弦， $\overline{OM}$ 為 $\overline{AB}$ 的弦心距， $\overline{O'N}$ 為 $\overline{CD}$ 的弦心距，回答下列問題，並填入 $>$ 、 $=$ 、 $<$ ：

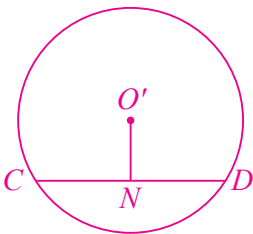
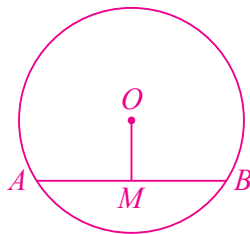
(1) 若 $\overline{OM} = \overline{O'N}$ ，則 $\overline{AB}$ $=$ $\overline{CD}$ 。

(2) 若 $\overline{OM} < \overline{O'N}$ ，則 $\overline{AB}$ $>$ $\overline{CD}$ 。

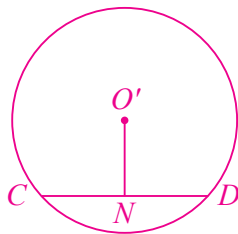
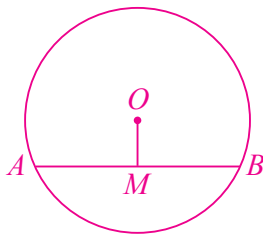
(3) 若 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，則 $\overline{OM}$ $=$ $\overline{O'N}$ 。

(4) 若 $\overline{AB} > \overline{CD}$ ，則 $\overline{OM}$ $<$ $\overline{O'N}$ 。

(1)(3)



(2)(4)



弦心距的性質

- 在同圓或等圓中，弦心距相等，則所對應的弦等長；反之，弦等長，則所對應的弦心距相等。
- 在同圓或等圓中，弦心距愈長，則所對應的弦愈短；反之，弦愈短，則所對應的弦心距愈長。

3 兩圓的位置關係

對應能力指標 9-s-07

前面討論過點與圓、直線與圓的位置關係，接著探討兩圓的位置關係。

同時通過兩圓圓心的直線稱為**連心線**，兩圓圓心間的距離稱為**連心線段長**。

如圖 2-16，直線 L 為圓 O_1 與圓 O_2 的連心線，而 $\overline{O_1O_2}$ 為連心線段長。（可搭配附件 9-1、9-2 操作）

1 外離

在圖 2-16 中，大小兩圓的半徑分別為 r_1 和 r_2 ($r_1 > r_2$)。若圓 O_1 與圓 O_2 不相交，圓 O_1 與圓 O_2 的位置關係稱為**外離**。此時 $\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$ 。

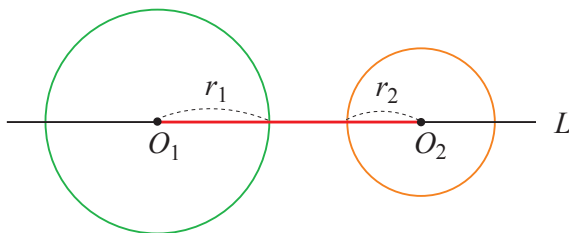


圖 2-16

2 外切

將圓 O_2 沿著連心線 L 往左移動逐漸靠近圓 O_1 ，直到兩圓恰好交於一點 (A 點)，如圖 2-17。圓 O_1 與圓 O_2 的位置關係稱為**外切**，兩圓的交點 A 稱為兩圓的切點，此時 $\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$ 。

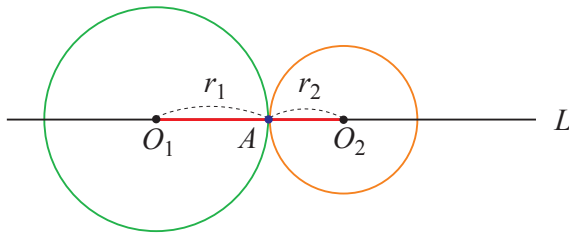


圖 2-17

3 相交於兩點

將圓 O_2 沿著連心線 L 繼續往左移動，此時兩圓交於 B 、 C 兩點，如圖 2-18。圓 O_1 與圓 O_2 的位置關係稱為**相交於兩點**。 B 、 O_1 、 O_2 三點可形成一個三角形，根據「三角形兩邊之和大於第三邊，兩邊之差小於第三邊」的性質，可得 $r_1 - r_2 < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$ 。

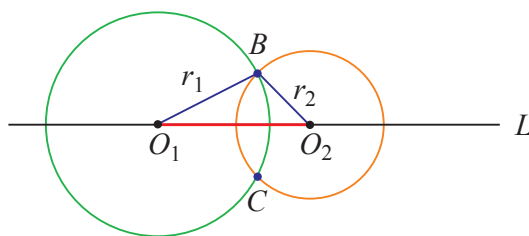


圖 2-18

4 內切

將圓 O_2 沿著連心線 L 繼續往左移動，直到圓 O_2 與圓 O_1 再度交於一點 (D 點)，如圖 2-19。圓 O_1 與圓 O_2 的位置關係稱為**內切**，兩圓的交點 D 也稱為兩圓的切點，此時 $\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2$ 。

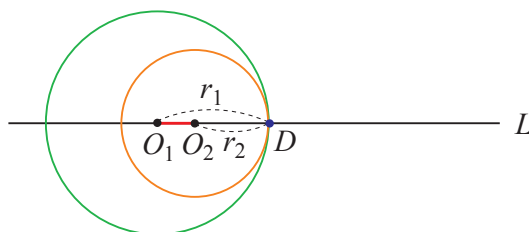


圖 2-19

5 內離

將圓 O_2 沿著連心線 L 繼續往左移動，直到圓 O_2 在圓 O_1 的內部，且兩圓不相交，如圖 2-20。圓 O_1 與圓 O_2 的位置關係稱為**內離**，此時 $0 \leq \overline{O_1O_2} < r_1 - r_2$ 。當兩圓心重疊時 (即 $\overline{O_1O_2} = 0$)，兩圓稱為**同心圓**，如圖 2-21。

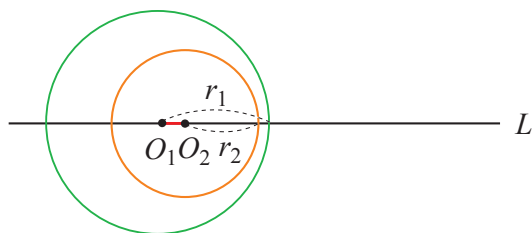


圖 2-20

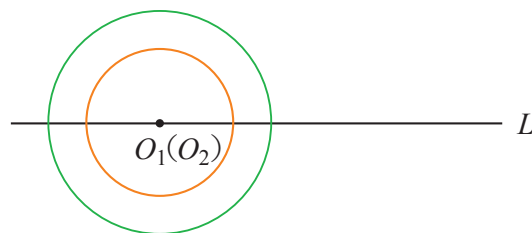


圖 2-21

由前面的說明可以知道：

比較兩圓的連心線段長與兩圓半徑的和或差，即可判別兩圓的位置關係。

當兩圓外切或內切時，切點在連心線上。



動動腦

在等圓中，兩圓的位置關係有下列哪幾種情形？

- ☒ 外離 ☒ 外切 ☒ 相交於兩點 ☐ 內切 ☐ 內離

例 8 兩圓的位置關係

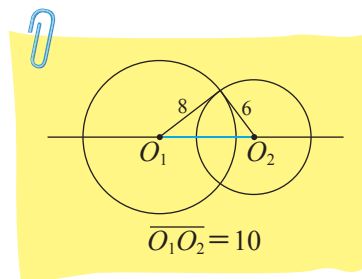
搭配習作 P25、26 基礎題 6、7

坐標平面上，圓 O_1 和圓 O_2 的半徑分別為 8 和 6，其連心線段長為 10，則圓 O_1 和圓 O_2 的位置關係為何？

解

$$\because 8 - 6 < 10 < 8 + 6,$$

$\therefore$ 圓 O_1 和圓 O_2 相交於兩點。



隨堂練習

已知圓 O_1 半徑為 9，圓 O_2 半徑為 5，根據圓 O_1 與圓 O_2 的連心線段長，判別兩圓的位置關係及交點個數。

$\overline{O_1O_2}$	20	14	8	4	2	0
位置關係	外離	外切	相交於兩點	內切	內離	同心圓 (內離)
交點個數	0	1	2	1	0	0

公切線

平面上，若一條直線同時與兩圓相切，且兩圓在此直線的**同側**，則此直線稱為這兩個圓的**外公切線**。如圖 2-22，直線 L 是圓 O_1 和圓 O_2 的外公切線， A 、 B 分別為兩圓的切點， $\overline{AB}$ 為兩圓的**外公切線段長**。

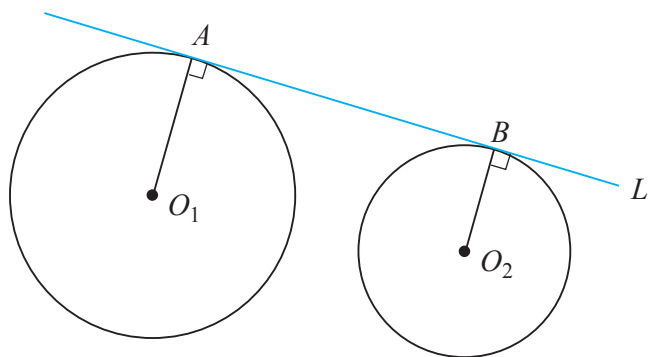


圖 2-22

平面上，若一條直線同時與兩圓相切，且兩圓在此直線的**異側**，則此直線稱為這兩個圓的**內公切線**。如圖 2-23，直線 M 是圓 O_1 和圓 O_2 的內公切線， C 、 D 分別為兩圓的切點， $\overline{CD}$ 為兩圓的**內公切線段長**。

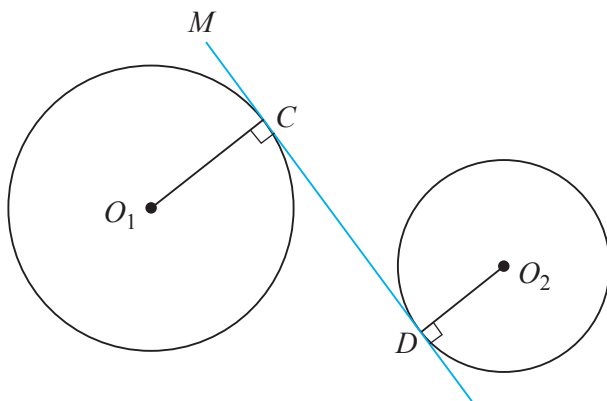


圖 2-23

兩圓的外公切線或內公切線，統稱為這兩圓的**公切線**。

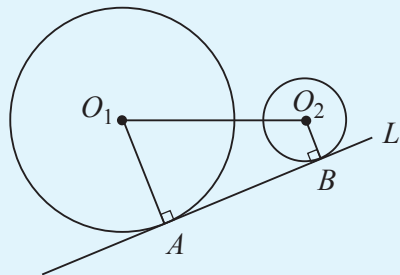
兩圓的位置與其內、外公切線數量的關係如下表：

兩圓的位置關係	圖示	外公切線的數量	內公切線的數量
外離		2 條	2 條
外切		2 條	1 條
相交於兩點		2 條	0 條
內切		1 條	0 條
內離		0 條	0 條

例9 求外公切線段長

搭配習作 P26 基礎題 8

如圖，直線 L 與兩圓分別切於 A 、 B 兩點，
已知 $\overline{O_1A}=8$ ， $\overline{O_2B}=3$ ， $\overline{O_1O_2}=13$ ，求 $\overline{AB}$ 。



思路分析

以外公切線段 $\overline{AB}$ 及圓 O_2 的半徑為長方形的兩邊，畫一個長方形，
即可找到以 $\overline{O_1O_2}$ 為斜邊的直角三角形。

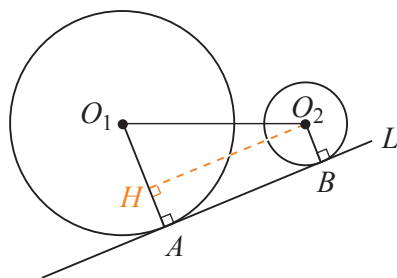
解 如圖，作 $\overline{O_2H} \perp \overline{O_1A}$ 於 H 點，
 $\therefore \angle O_1HO_2 = 90^\circ$ ，
又 $\angle HAB = \angle O_2BA = 90^\circ$ ，
 $\therefore$ 四邊形 HO_2BA 為長方形。

$$\begin{aligned}\overline{O_1H} &= \overline{O_1A} - \overline{HA} \\ &= \overline{O_1A} - \overline{O_2B} = 8 - 3 = 5\end{aligned}$$

在直角三角形 O_1O_2H 中：

$$\begin{aligned}\overline{O_2H} &= \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_1H}^2} \\ &= \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{O_2H} = 12。$$



連心線段 $\overline{O_1O_2}$ 是
直角三角形 O_1O_2H
的斜邊。



隨堂練習

如圖，直線 L 與兩圓分別切於 A 、 B 兩點，
已知 $\overline{O_1A}=5$ ， $\overline{O_2B}=2$ ， $\overline{AB}=6$ ，求 $\overline{O_1O_2}$ 。

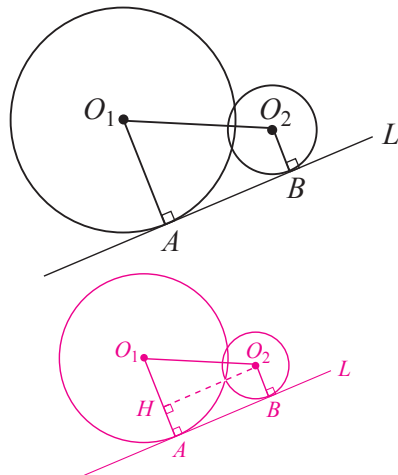
作 $\overline{O_2H} \perp \overline{O_1A}$ 於 H 點，

$\therefore$ 四邊形 HO_2BA 為長方形，

$$\overline{O_1H} = \overline{O_1A} - \overline{HA} = \overline{O_1A} - \overline{O_2B} = 5 - 2 = 3，$$

$$\overline{O_2H} = \overline{AB} = 6，$$

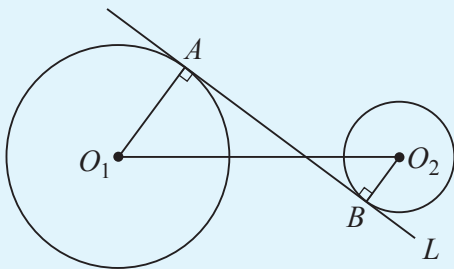
$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{\overline{O_1H}^2 + \overline{O_2H}^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}。$$



例 10 求內公切線段長

搭配習作 P26 基礎題 9

如圖，直線 L 與兩圓分別切於 A 、 B 兩點，
已知 $\overline{O_1A}=10$ ， $\overline{O_2B}=5$ ， $\overline{O_1O_2}=25$ ，
求 $\overline{AB}$ 。



思路分析

以內公切線段長 $\overline{AB}$ 及圓 O_1 的半徑為長方形的兩邊，畫一個長方形，
即可找到以 $\overline{O_1O_2}$ 為斜邊的直角三角形。

解 如圖，作 $\overline{O_1H} \perp \overline{O_2B}$ 於 H 點，

$$\therefore \angle O_1HO_2 = 90^\circ,$$

$$\text{又 } \angle O_1AB = \angle HBA = 90^\circ,$$

$\therefore$ 四邊形 $ABHO_1$ 為長方形。

$$\overline{O_2H} = \overline{O_2B} + \overline{BH}$$

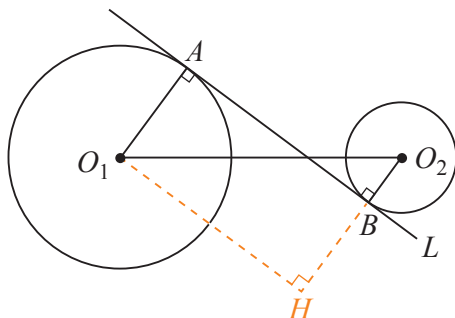
$$= \overline{O_2B} + \overline{AO_1} = 5 + 10 = 15$$

在直角三角形 O_1O_2H 中：

$$\overline{O_1H} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_2H}^2}$$

$$= \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$$

$$\therefore \overline{AB} = \overline{O_1H} = 20。$$



連心線段 $\overline{O_1O_2}$ 是
直角三角形 O_1O_2H
的斜邊。



隨堂練習

如圖，直線 L 與兩圓分別切於 A 、 B
兩點，已知 $\overline{O_1A}=5$ ， $\overline{O_2B}=3$ ，
 $\overline{AB}=10$ ，求 $\overline{O_1O_2}$ 。

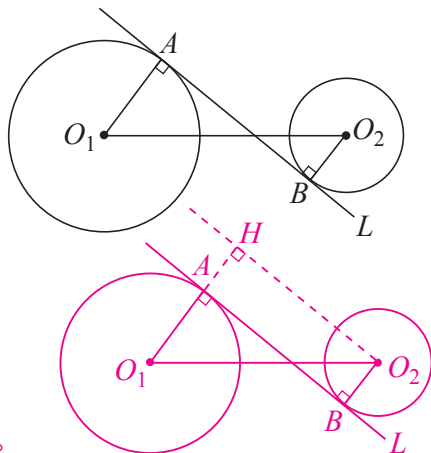
作 $\overline{O_2H} \perp \overline{O_1A}$ 於 H 點，

$\therefore$ 四邊形 ABO_2H 為長方形，

$$\overline{O_2H} = \overline{AB} = 10，$$

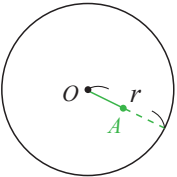
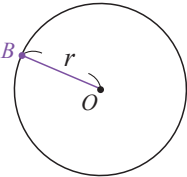
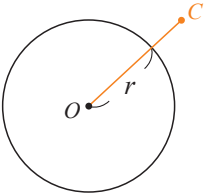
$$\overline{O_1H} = \overline{O_1A} + \overline{AH} = \overline{O_1A} + \overline{O_2B} = 5 + 3 = 8。$$

$$\overline{O_1O_2} = \sqrt{\overline{O_1H}^2 + \overline{O_2H}^2} = \sqrt{8^2 + 10^2} = 2\sqrt{41}。$$

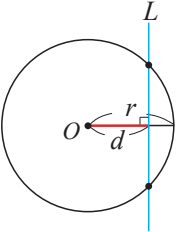
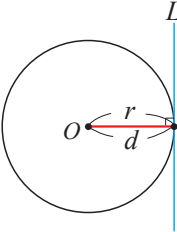
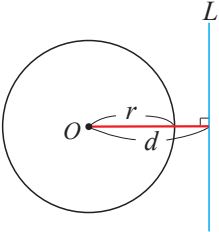


重點回顧

1 點與圓的位置關係：

點與圓的位置關係	在圓內	在圓上	在圓外
圖示			
點到圓心的距離	小於半徑 ($\overline{OA} < r$)	等於半徑 ($\overline{OB} = r$)	大於半徑 ($\overline{OC} > r$)

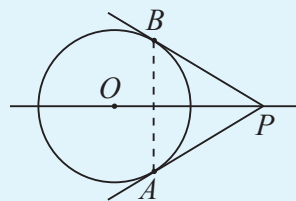
2 直線與圓的位置關係：

直線與圓的位置關係	交於兩點 (直線 L 是圓的割線)	交於一點(相切) (直線 L 是圓的切線)	不相交
圖示			
圓心到直線的距離	小於半徑 ($d < r$)	等於半徑 ($d = r$)	大於半徑 ($d > r$)

3 過圓外一點的兩切線性質：

如圖， $\overrightarrow{PA}$ 、 $\overrightarrow{PB}$ 為圓 O 的兩條切線， A 、 B 為切點，則：

- (1) 過圓外一點 P 的兩切線段長相等，即 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 。
- (2) $\overrightarrow{OP}$ 平分 $\angle APB$ ，即 $\angle APO = \angle BPO$ 。
- (3) $\overrightarrow{OP}$ 垂直平分 $\overline{AB}$ 。



4 圓外切四邊形的性質：

圓外切四邊形兩組對邊長之和相等。

5 弦與弦心距的性質：

- (1) 一弦的弦心距垂直平分此弦；弦的中垂線會通過圓心。
- (2) 在同圓或等圓中，弦心距相等，則所對應的弦等長；
反之，弦等長，則所對應的弦心距相等。
- (3) 在同圓或等圓中，弦心距愈長，則所對應的弦愈短；
反之，弦愈短，則所對應的弦心距愈長。

6 兩圓的位置關係與公切線數量：

如果圓 O_1 的半徑為 r_1 ，圓 O_2 的半徑為 r_2 ($r_1 > r_2$)，則：

兩圓的位置關係	圖示	連心線段 $\overline{O_1O_2}$ 與 r_1 、 r_2 的大小關係	公切線數量
外離		$\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$	4 條
外切		$\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$	3 條
相交於兩點		$r_1 - r_2 < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$	2 條
內切		$\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2$	1 條
內離		$0 \leq \overline{O_1O_2} < r_1 - r_2$	0 條

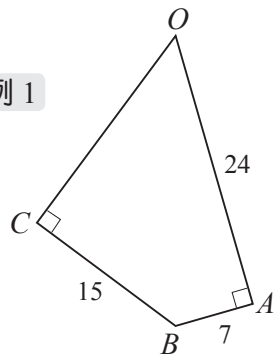
2-1 自我評量

1 如圖，四邊形 $OABC$ 中， $\angle A$ 和 $\angle C$ 均為直角，

$\overline{OA}=24$ ， $\overline{AB}=7$ ， $\overline{BC}=15$ ，回答下列問題： 課 P71 例 1

(1) 求 $\overline{OC}$ 。

(2) 若以 O 點為圓心， $\overline{OA}$ 為半徑畫圓，則 A 、 B 、 C 三點會分別落在圓內、圓上或圓外？



(1) 連接 $\overline{OB}$ ， $\overline{OB} = \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{24^2 + 7^2} = 25$ ，

$$\overline{OC} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20。$$

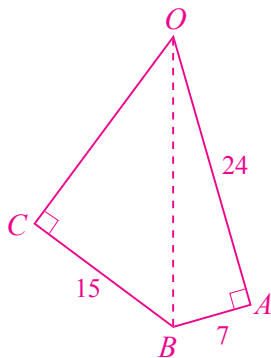
(2) $\overline{OA}$ = 半徑， $\therefore A$ 點在圓上。

$\overline{OB} = 25 >$ 半徑， $\therefore B$ 點在圓外。

$\overline{OC} = 20 <$ 半徑， $\therefore C$ 點在圓內。

答： (1) 20。

(2) A 點在圓上， B 點在圓外， C 點在圓內。



2 已知圓 O 的直徑為 10，圓心 O 到三條直線 L_1 、 L_2 、 L_3 的距離分別為 3、5、7，回答下列問題： 課 P74 隨堂

(1) 這三條直線中，哪一條是切線？哪一條是割線？

(2) 若直線 M 恰好與圓 O 交於一點，求圓心 O 到直線 M 的距離。

(1) 圓 O 的直徑為 10， $\therefore$ 半徑 = 5，

又圓心到 L_1 的距離為 $3 <$ 半徑，

圓心到 L_2 的距離為 $5 =$ 半徑，

圓心到 L_3 的距離為 $7 >$ 半徑，

故 L_2 為切線， L_1 為割線。

(2) 直線 M 與圓 O 只交於一點，

故直線 M 為切線， M 到圓心的距離 = 半徑 = 5。

答： (1) L_2 為切線， L_1 為割線。

(2) 5。

- 3 如圖， $\overleftrightarrow{AP}$ 與圓 O 切於 A 點，已知圓 O 的半徑為 6， $\overline{PO} = 12$ ，求 $\overline{PA}$ 及 $\triangle OPA$ 的面積。

課 P75 例 2

連接 $\overline{OA}$ ，則 $\overline{OA} \perp \overleftrightarrow{AP}$ ，

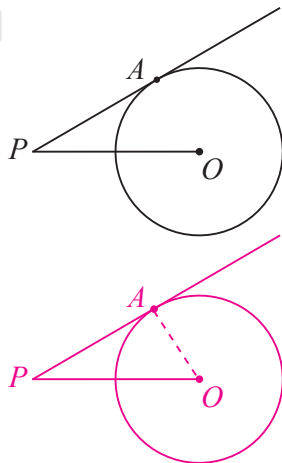
$$\overline{PA} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{OA}^2} = \sqrt{12^2 - 6^2} = 6\sqrt{3}，$$

$$\triangle OPA \text{ 的面積} = \overline{PA} \times \overline{OA} \div 2$$

$$= 6\sqrt{3} \times 6 \div 2$$

$$= 18\sqrt{3}。$$

答： $\overline{PA} = 6\sqrt{3}$ ， $\triangle OPA$ 的面積為 $18\sqrt{3}$ 。



- 4 如圖，等腰梯形 $ABCD$ 為圓 O 的外切四邊形，若 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AD} = 3$ ， $\overline{BC} = 5$ ，求圓 O 的半徑。

課 P78 隨堂

$\because$ 等腰梯形 $ABCD$ 為圓 O 的外切四邊形，

$$\therefore \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC} = 3 + 5 = 8，$$

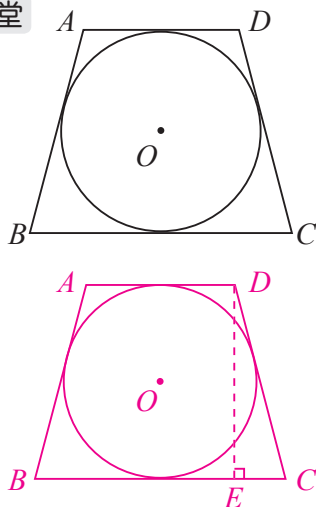
$$\text{又 } \overline{AB} = \overline{CD} = 4，$$

作 $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ 於 E 點， $\therefore \overline{CE} = 1$ ，

$$\overline{DE} = \sqrt{\overline{CD}^2 - \overline{CE}^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15}，$$

$$\text{圓 } O \text{ 的半徑} = \frac{1}{2} \overline{DE} = \frac{\sqrt{15}}{2}。$$

答： $\frac{\sqrt{15}}{2}。$



- 5 如圖， $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦， $\overline{OM}$ 、 $\overline{ON}$ 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的弦心距，若 $\overline{AB} = 16$ ， $\overline{OM} = 6$ ， $\overline{ON} = 8$ ，求 $\overline{CD}$ 。

課 P81 例 7

連接 $\overline{OA}$ 、 $\overline{OC}$ ，

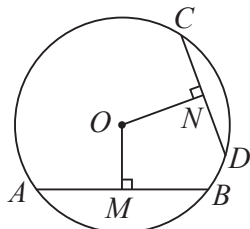
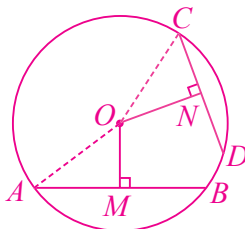
$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} \times 16 = 8，$$

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{AM}^2 + \overline{OM}^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10，$$

$$\text{又 } \overline{OA} = \overline{OC}，$$

$$\overline{CN} = \sqrt{\overline{OC}^2 - \overline{ON}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6，$$

$$\text{故 } \overline{CD} = 2\overline{CN} = 2 \times 6 = 12。$$



答：12。

- 6 已知半徑分別為 7、5 的兩圓相交於兩點，若此兩圓的連心線段長為 x ，求 x 的範圍。

課 P86 例 8

∵ 兩圓相交於兩點，

$$\therefore 7-5 < x < 7+5$$

$$2 < x < 12。$$

答： $2 < x < 12。$

- 7 在坐標平面上，圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別為 6、4，其圓心坐標分別為 $O_1(6, -3)$ 和 $O_2(0, 5)$ ，則圓 O_1 和圓 O_2 的位置關係為何？

課 P86 隨堂

$$\text{連心線段長 } \overline{O_1O_2} = \sqrt{(6-0)^2 + (-3-5)^2} = 10，$$

$$\text{又圓 } O_1 \text{ 與圓 } O_2 \text{ 的半徑和} = 6+4=10，$$

∴ 圓 O_1 與圓 O_2 的位置關係為外切。

答： 外切。

- 8 如圖，圓 O_1 和圓 O_2 兩圓外切，直線 L 與圓 O_1 和圓 O_2 分別切於 A 、 B 兩點，已知圓 O_1 半徑為 5，圓 O_2 半徑為 3，求 $\overline{AB}$ 。

課 P89 例 9

作 $\overline{O_2D} \perp \overline{O_1A}$ 於 D 點，

∴ 四邊形 ABO_2D 為長方形，

$$\overline{O_1D} = \overline{O_1A} - \overline{DA} = \overline{O_1A} - \overline{O_2B} = 5 - 3 = 2，$$

$$\overline{O_1O_2} = 5 + 3 = 8，$$

$$\begin{aligned} \overline{AB} = \overline{O_2D} &= \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_1D}^2} \\ &= \sqrt{8^2 - 2^2} = 2\sqrt{15}。 \end{aligned}$$

答： $2\sqrt{15}。$

