

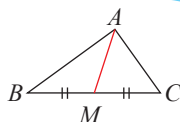
1-3

相似三角形的應用

在前一節中，利用 AA (AAA)、 SAS 、 SSS 等相似性質判別兩個三角形是否相似。接下來，將進一步探討四個主題：

- (1) 兩相似三角形的對應邊與對應高、對應角平分線、對應中線之間的關係，及對應邊與面積的關係。
- (2) 直角三角形母子相似性質。
- (3) 簡易測量。
- (4) 相似形在一次函數圖形的應用。

$\triangle ABC$ 中， $\overline{BC}$ 的中點為 M ，則稱 $\overline{AM}$ 為 $\overline{BC}$ 邊上的中線。



1 相似三角形的對應關係

對應能力指標 9-s-03

兩個相似三角形對應邊上的高稱為對應高；對應角的角平分線稱為對應角平分線；對應邊上的中線稱為對應中線。例如：圖 1-21 中， $\overline{AD}$ 、 $\overline{A'D'}$ 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{B'C'}$ 上的高， $\overline{AT}$ 、 $\overline{A'T'}$ 分別為 $\angle BAC$ 、 $\angle B'A'C'$ 的角平分線， $\overline{AM}$ 、 $\overline{A'M'}$ 分別為 $\overline{BC}$ 、 $\overline{B'C'}$ 上的中線，如果 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，則稱 $\overline{AD}$ 與 $\overline{A'D'}$ 為對應高； $\overline{AT}$ 與 $\overline{A'T'}$ 為對應角平分線； $\overline{AM}$ 與 $\overline{A'M'}$ 為對應中線。

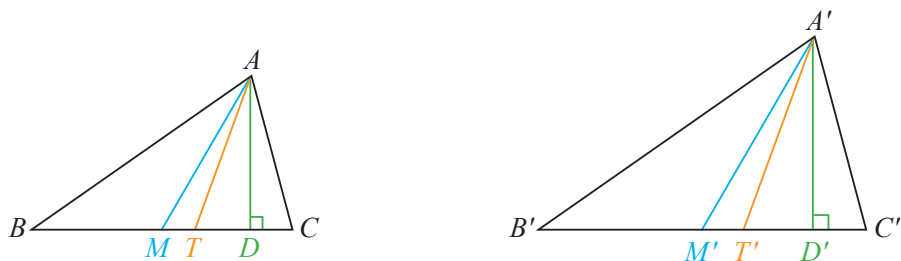
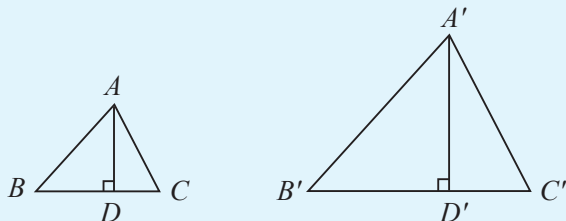


圖 1-21

例 1 相似三角形對應高的比 = 對應邊的比

搭配習作 P14 基礎題 1(1)

如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點， $\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D' 點，
說明 $\overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$ 。



說明 (1) $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$,

$$\therefore \angle B = \angle B'.$$

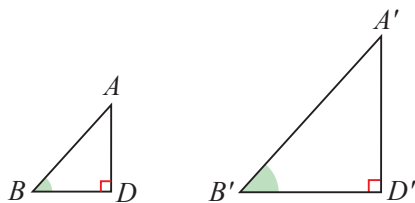
(2) 在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle A'B'D'$ 中，

$$\therefore \angle B = \angle B',$$

$$\angle ADB = \angle A'D'B' = 90^\circ \quad (\because \overline{AD} \perp \overline{BC} \text{ 且 } \overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}),$$

$$\therefore \triangle ABD \sim \triangle A'B'D' \text{ (AA 相似性質)},$$

$$\text{故 } \overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}.$$



隨堂練習

如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點， $\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D' 點，
若 $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{B'C'} = 9$ ， $\overline{AD} = 4$ ，求：

(1) $\overline{AB} : \overline{A'B'}$ 。

(2) $\overline{A'D'}$ 的長。

(1) $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$,

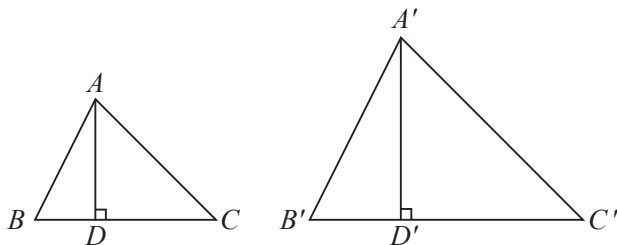
$$\begin{aligned} \therefore \overline{AB} : \overline{A'B'} &= \overline{BC} : \overline{B'C'} \\ &= 6 : 9 = 2 : 3. \end{aligned}$$

(2) $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$,

$$\therefore \overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{AB} : \overline{A'B'} \text{ (由例 1 可知)}$$

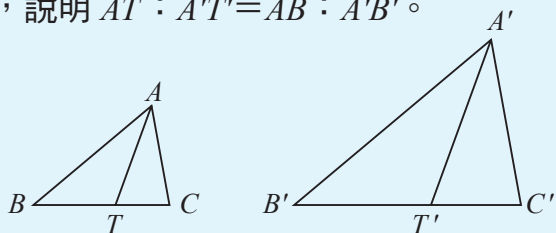
$$4 : \overline{A'D'} = 2 : 3$$

$$\overline{A'D'} = 6.$$



例 2 相似三角形對應角平分線的比＝對應邊的比

如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， $\overline{AT}$ 平分 $\angle BAC$ ，且交 $\overline{BC}$ 於 T 點， $\overline{A'T'}$ 平分 $\angle B'A'C'$ ，且交 $\overline{B'C'}$ 於 T' 點，說明 $\overline{AT} : \overline{A'T'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$ 。



說明

(1) $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$,

$\therefore \angle BAC = \angle B'A'C'$, $\angle B = \angle B'$,

故 $\angle BAT = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \angle B'A'C'$

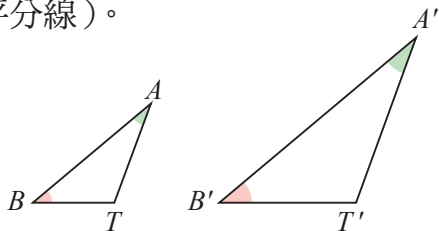
$= \angle B'A'T' (\because \overline{AT}, \overline{A'T'}$ 為角平分線)。

(2) 在 $\triangle ABT$ 與 $\triangle A'B'T'$ 中，

$\because \angle B = \angle B'$, $\angle BAT = \angle B'A'T'$,

$\therefore \triangle ABT \sim \triangle A'B'T'$ (AA 相似性質)，

故 $\overline{AT} : \overline{A'T'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$ 。



隨堂練習

如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， $\overline{AT}$ 平分 $\angle BAC$ ，且交 $\overline{BC}$ 於 T 點， $\overline{A'T'}$ 平分 $\angle B'A'C'$ ，且交 $\overline{B'C'}$ 於 T' 點，若 $\overline{BC} = 12$ ， $\overline{B'C'} = 9$ ， $\overline{A'T'} = 6$ ，求：

(1) $\overline{AB} : \overline{A'B'}$ 。

(2) $\overline{AT}$ 的長。

(1) $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$,

$\therefore \overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$

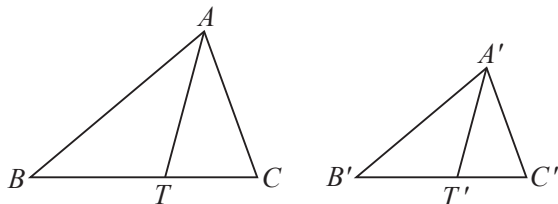
$= 12 : 9 = 4 : 3$ 。

(2) $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$,

$\therefore \overline{AT} : \overline{A'T'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$ (由例 2 可知)

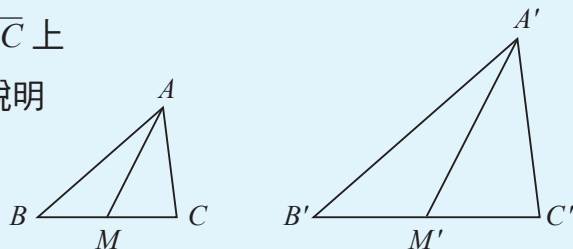
$\overline{AT} : 6 = 4 : 3$

$\overline{AT} = 8$ 。



例 3 相似三角形對應中線的比＝對應邊的比 搭配習作 P14 基礎題 1(2)

如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， $\overline{AM}$ 為 $\overline{BC}$ 上的中線， $\overline{A'M'}$ 為 $\overline{B'C'}$ 上的中線，說明 $\overline{AM} : \overline{A'M'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}$ 。



說明 (1) $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$,

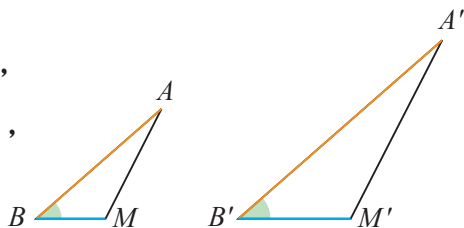
$$\begin{aligned} \therefore \angle B &= \angle B', \overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BC} : \overline{B'C'} = \frac{1}{2} \overline{BC} : \frac{1}{2} \overline{B'C'} \\ &= \overline{BM} : \overline{B'M'} (\because \overline{AM}, \overline{A'M'} \text{ 為中線}). \end{aligned}$$

(2) 在 $\triangle ABM$ 與 $\triangle A'B'M'$ 中，

$$\because \angle B = \angle B', \overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{BM} : \overline{B'M'},$$

$$\therefore \triangle ABM \sim \triangle A'B'M' \text{ (SAS 相似性質)},$$

$$\text{故 } \overline{AM} : \overline{A'M'} = \overline{AB} : \overline{A'B'}.$$



隨堂練習

如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， $\overline{AM}$ 為 $\overline{BC}$ 上的中線， $\overline{A'M'}$ 為 $\overline{B'C'}$ 上的中線，若 $\overline{BC} = 12$ ， $\overline{B'C'} = 18$ ， $\overline{A'M'} = 10$ ，求：

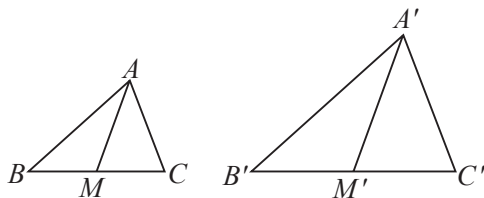
(1) $\overline{AC} : \overline{A'C'}$ 。 (1) $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$,

(2) $\overline{AM}$ 的長。 $\therefore \overline{AC} : \overline{A'C'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$
 $= 12 : 18 = 2 : 3。$

(2) $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$,

$$\therefore \overline{AM} : \overline{A'M'} = \overline{AC} : \overline{A'C'} \text{ (由例 3 可知)}$$

$$\overline{AM} : 10 = 2 : 3, \overline{AM} = \frac{20}{3}。$$



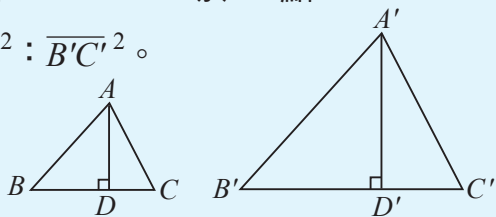
相似三角形的對應關係

兩個相似三角形，

對應邊的比＝對應高的比＝對應角平分線的比＝對應中線的比。

例 4 相似三角形面積的比＝對應邊的平方比 搭配習作 P14 基礎題 1(3)

如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點， $\overline{A'D'} \perp \overline{B'C'}$ 於 D' 點，
說明 $\triangle ABC$ 的面積： $\triangle A'B'C'$ 的面積 $= \overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2$ 。



說明 $\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，

$\therefore \overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{BC} : \overline{B'C'}$ 。 ← 對應高的比＝對應邊的比

$$\begin{aligned} \text{因此 } \frac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'} &= \frac{\frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AD}}{\frac{1}{2} \times \overline{B'C'} \times \overline{A'D'}} = \frac{\overline{BC} \times \overline{AD}}{\overline{B'C'} \times \overline{A'D'}} \\ &= \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \times \frac{\overline{AD}}{\overline{A'D'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \times \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{BC}^2}{\overline{B'C'}^2} \end{aligned}$$

$\therefore \triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{BC}^2 : \overline{B'C'}^2$ 。

同理，若 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，

則 $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = \overline{AB}^2 : \overline{A'B'}^2 = \overline{AC}^2 : \overline{A'C'}^2$ 。



相似三角形面積的比

兩個相似三角形，面積的比＝對應邊的平方比。

隨堂練習

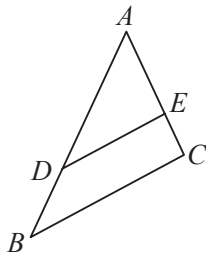
如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 兩點分別在 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 上， $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，
若 $\overline{AD}=4$ ， $\overline{BD}=2$ ， $\triangle ADE$ 的面積為 3，求 $\triangle ABC$ 的面積。

$\because \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

故 $\triangle ADE : \triangle ABC = \overline{AD}^2 : \overline{AB}^2$

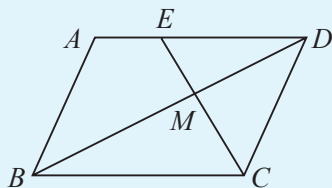
$$3 : \triangle ABC = 4^2 : (4+2)^2$$

$$\triangle ABC = \frac{27}{4}。$$



例5 相似三角形面積比的應用

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AE} = \frac{1}{3} \overline{BC}$ ，
求 $\triangle EMD$ 與 $\triangle CMB$ 的面積比。



解 (1) 在 $\triangle EMD$ 與 $\triangle CMB$ 中，
 $\because \angle EDM = \angle CBM (\overline{DE} \parallel \overline{BC})$ ，
 $\angle EMD = \angle CMB$ (對頂角)，
 $\therefore \triangle EMD \sim \triangle CMB$ (AA 相似性質)。

(2) $\because \overline{AE} = \frac{1}{3} \overline{BC}$ ，
 $\therefore \overline{AE} : \overline{BC} = 1 : 3$ ，
 故 $\overline{DE} : \overline{BC} = 2 : 3$ 。

由(1)、(2)知：

$\triangle EMD : \triangle CMB = \overline{DE}^2 : \overline{BC}^2 = 4 : 9$ 。 ← 相似三角形面積的比 = 對應邊的平方比

隨堂練習

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， E 為 $\overline{CD}$ 中點，
 $\overline{AE}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 F 點，回答下列問題：

(1) $\triangle ADE$ 與 $\triangle FBA$ 中，
 $\because \angle DAE = \angle F$ (理由： $\overline{AD} \parallel \overline{BF}$)，
 $\angle DEA = \angle BAF$ (理由： $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$)，
 $\therefore$ 根據 **AA** 相似性質，可知 $\triangle ADE \sim \triangle FBA$ 。

(2) 若 $\triangle ADE$ 的面積為 12，求 $\triangle FBA$ 的面積。

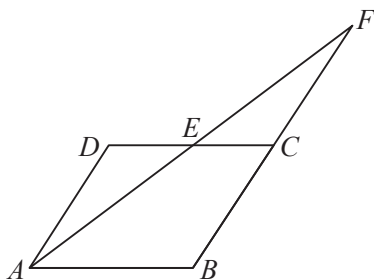
$\because \overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{CD} = \frac{1}{2} \overline{AB}$ ， $\therefore \overline{DE} : \overline{AB} = 1 : 2$ ，

又 $\triangle ADE \sim \triangle FBA$ ，

$\therefore \triangle ADE : \triangle FBA = \overline{DE}^2 : \overline{AB}^2$

$12 : \triangle FBA = 1^2 : 2^2$

$\triangle FBA = 48$ 。



2 直角三角形母子相似性質

對應能力指標 9-s-03

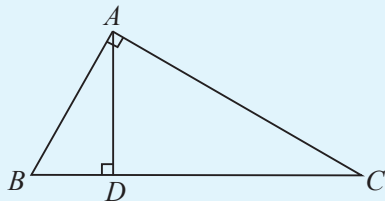
例 6 母子相似性質

如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，

(1) 說明 $\triangle ABC \sim \triangle DBA$ 。(搭配附件 5 操作)

(2) 說明 $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$ 。

(3) 若 $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BD}=2$ ，求 $\overline{BC}$ 。



說明

(1) 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBA$ 中，

$$\because \angle BAC = \angle ADB = 90^\circ, \angle B = \angle B,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DBA \text{ (AA 相似性質)}.$$

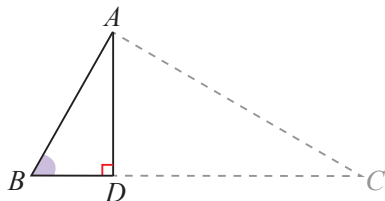
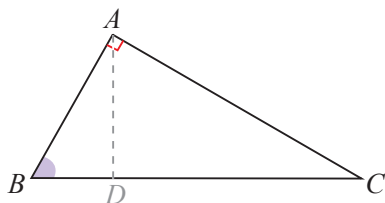
(2) $\because \triangle ABC \sim \triangle DBA$,

$$\therefore \overline{AB} : \overline{BD} = \overline{BC} : \overline{AB},$$

$$\text{即 } \overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}.$$

$$(3) 4^2 = 2 \times \overline{BC},$$

$$\therefore \overline{BC} = 8.$$



隨堂練習

如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，

(1) 說明 $\triangle ABC \sim \triangle DAC$ 。(搭配附件 6 操作)

(2) 說明 $\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB}$ 。

(3) 若 $\overline{AC}=6$ ， $\overline{BC}=12$ ，求 $\overline{CD}$ 。

(1) 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DAC$ 中，

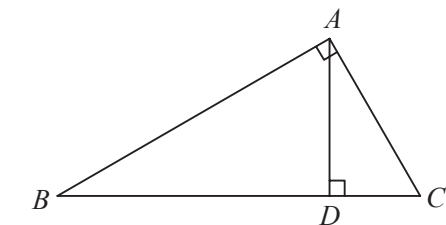
$$\because \angle BAC = \angle ADC = 90^\circ, \angle C = \angle C,$$

$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle DAC \text{ (AA 相似性質)}.$$

(2) $\because \triangle ABC \sim \triangle DAC$,

$$\therefore \overline{AC} : \overline{CD} = \overline{CB} : \overline{AC},$$

$$\text{即 } \overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB}.$$



$$(3) 6^2 = \overline{CD} \times 12$$

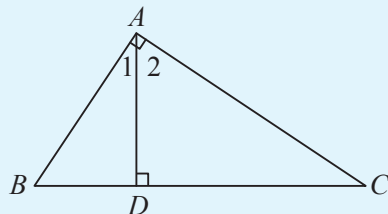
$$\therefore \overline{CD} = 3.$$

例 7 母子相似性質

如圖，直角三角形 ABC 中，
 $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，

(1) 說明 $\triangle ADB \sim \triangle CDA$ 。(搭配附件 5 操作)

(2) 說明 $\overline{AD}^2 = \overline{DB} \times \overline{DC}$ 。



說明

(1) $\angle 1 + \angle B = 90^\circ$ ($\overline{AD} \perp \overline{BC}$)

$\angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$ ($\angle BAC = 90^\circ$) $\Rightarrow \angle B = \angle 2$

在 $\triangle ADB$ 與 $\triangle CDA$ 中，

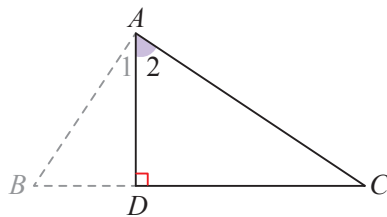
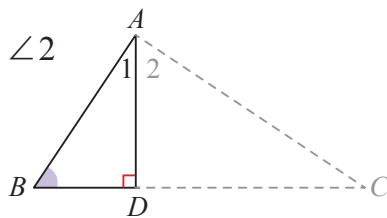
$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ ， $\angle B = \angle 2$ ，

$\therefore \triangle ADB \sim \triangle CDA$ (AA 相似性質)。

(2) $\because \triangle ADB \sim \triangle CDA$ ，

$\therefore \overline{AD} : \overline{DC} = \overline{DB} : \overline{AD}$ ，

即 $\overline{AD}^2 = \overline{DB} \times \overline{DC}$ 。



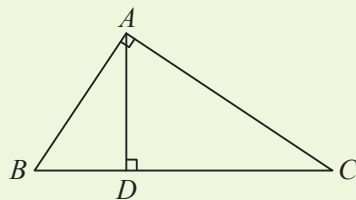
直角三角形母子相似性質

如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，

則：(1) $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$ 。

(2) $\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB}$ 。

(3) $\overline{AD}^2 = \overline{DB} \times \overline{DC}$ 。



隨堂練習

搭配習作 P14 基礎題 2

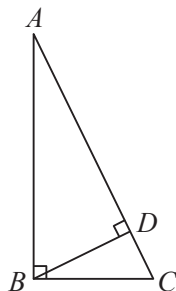
如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle ABC = 90^\circ$ ， $\overline{BD} \perp \overline{AC}$ 於 D 點，

若 $\overline{CD} = 3$ ， $\overline{AD} = 12$ ，求 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{BD}$ 。

$\overline{AB}^2 = \overline{AD} \times \overline{AC} = 12 \times (12 + 3) = 180$ ， $\overline{AB} = 6\sqrt{5}$ 。

$\overline{BC}^2 = \overline{CD} \times \overline{CA} = 3 \times (12 + 3) = 45$ ， $\overline{BC} = 3\sqrt{5}$ 。

$\overline{BD}^2 = \overline{DC} \times \overline{DA} = 3 \times 12 = 36$ ， $\overline{BD} = 6$ 。



3 簡易測量

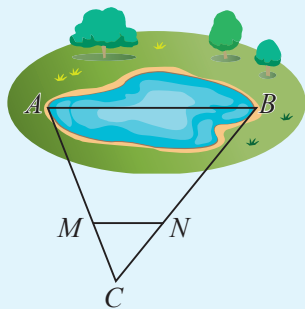
對應能力指標 9-s-05

利用相似三角形對應邊成比例，可以測量湖寬、距離、樹高、……等。

例 8 測量湖寬

搭配習作 P15 基礎題 3

如圖，湖邊有 A 、 B 兩點，志明想知道它們之間的距離。首先他在湖邊的空地找另一點 C ，分別在 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BC}$ 上，找到 M 、 N 兩點，並測得 $\overline{AC}=75$ 公尺， $\overline{MC}=25$ 公尺， $\overline{BC}=90$ 公尺， $\overline{NC}=30$ 公尺， $\overline{MN}=28$ 公尺，求湖寬 $\overline{AB}$ 。



解 在 $\triangle CMN$ 與 $\triangle CAB$ 中，

$$\begin{aligned} \because \overline{CM} : \overline{CA} &= 25 : 75 = 1 : 3 \\ \overline{CN} : \overline{CB} &= 30 : 90 = 1 : 3 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \because \overline{CM} : \overline{CA} &= 25 : 75 = 1 : 3 \\ \overline{CN} : \overline{CB} &= 30 : 90 = 1 : 3 \end{aligned}} \right\} \overline{CM} : \overline{CA} = \overline{CN} : \overline{CB}$$

$\angle C = \angle C$ (公用角)，

$\therefore \triangle CMN \sim \triangle CAB$ (SAS 相似性質)。

$$\overline{MN} : \overline{AB} = \overline{CM} : \overline{CA}$$

$$28 : \overline{AB} = 25 : 75$$

$$\overline{AB} = 84, \text{ 故湖寬 } \overline{AB} = 84 \text{ (公尺)}。$$

隨堂練習

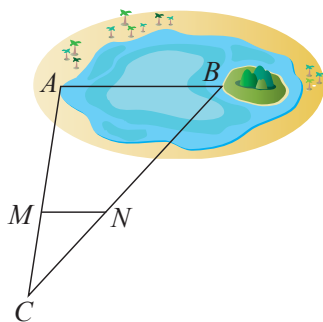
如圖，宜君想知道湖邊 A 點到湖中小島 B 點的距離，她在湖外找了一點 C ，分別在 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ 上，找到 M 、 N 兩點，並測得 $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$ ， $\overline{AC}=20$ 公尺， $\overline{MC}=8$ 公尺， $\overline{MN}=6$ 公尺，求 A 、 B 兩點的距離。

在 $\triangle ABC$ 中， $\because \overline{MN} \parallel \overline{AB}$ ，

$$\therefore \overline{MC} : \overline{AC} = \overline{MN} : \overline{AB}$$

$$8 : 20 = 6 : \overline{AB}, \overline{AB} = 15,$$

故 A 、 B 兩點的距離為 15 公尺。

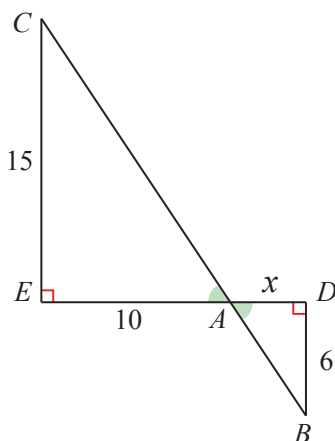


例 9 測量距離

搭配習作 P15 基礎題 4

一群海盜在無名島上藏了三批珠寶，先在島上 A 地藏第一批珠寶，然後向東走 x 公里，再向南走 6 公里到 B 地藏第二批珠寶，再循原路回到 A 地後，向西走 10 公里，再向北走 15 公里到 C 地藏第三批珠寶，如果 A 、 B 、 C 三地恰好在同一條直線上，求 x 的值是多少？

解 依題意畫出右圖，
 在 $\triangle ADB$ 與 $\triangle AEC$ 中，
 $\because \angle D = \angle E = 90^\circ$ ，
 $\angle BAD = \angle CAE$ ，
 $\therefore \triangle ADB \sim \triangle AEC$ (AA 相似性質)，
 因此 $\overline{AD} : \overline{AE} = \overline{BD} : \overline{CE}$
 $x : 10 = 6 : 15$
 $x = 4$ 。

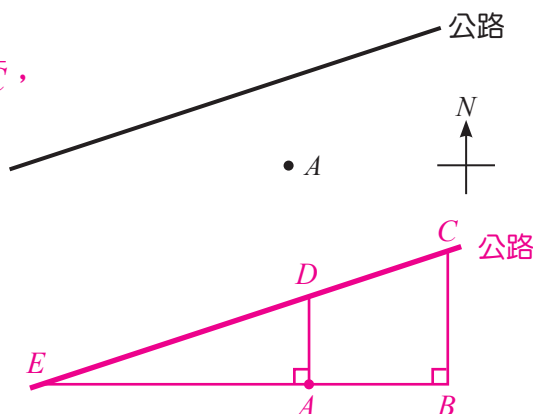


隨堂練習

如圖，有 A 村與一條直線型的公路，今以 A 村為基準點，向北走 6 公里可到達公路。若由 A 村向東走 9 公里，再向北走 9 公里也可到達公路，則由 A 村向西走多少公里可到達公路？

如圖， $\overline{AD} = 6$ ， $\overline{AB} = 9$ ， $\overline{BC} = 9$ ，
 $\because \overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 皆垂直於 $\overline{BE}$ ， $\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，
 在 $\triangle EBC$ 中，
 $\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，
 $\therefore \overline{EA} : \overline{EB} = \overline{AD} : \overline{BC}$
 $\overline{EA} : (\overline{EA} + 9) = 6 : 9$
 $\overline{EA} = 18$

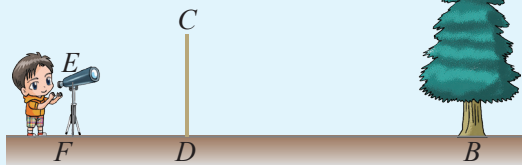
故由 A 村向西走 18 公里可到達公路。



例 10 測量樹高

搭配習作 P16 基礎題 5

如圖，志豪想要測量樹高 $\overline{AB}$ ，他在樹前 5 公尺的 D 點垂直豎立了一根長 1.8 公尺的木棍，並從木棍後方 2 公尺的觀測點 E ，觀察到木棍的頂端 C 點與樹梢 A 點成一直線，且 E 點至地面的高度 $\overline{EF}$ 為 1 公尺，求樹高 $\overline{AB}$ 。



解 依題意畫出右圖，

$\because \overline{CD}$ 與 $\overline{AB}$ 皆垂直於 $\overline{BD}$ ， $\therefore \overline{CD} \parallel \overline{AB}$ ，

在 $\triangle AEH$ 中，

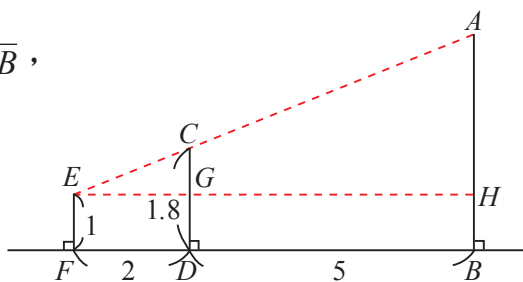
$\because \overline{CG} \parallel \overline{AH}$ ，

$\therefore \overline{EG} : \overline{EH} = \overline{CG} : \overline{AH}$

$2 : (2+5) = (1.8-1) : \overline{AH}$

$\overline{AH} = 2.8$

則 $\overline{AB} = 2.8 + 1 = 3.8$ ，故樹高 $\overline{AB} = 3.8$ (公尺)。



隨堂練習

如圖，心平到郊外騎腳踏車，看見前方 8 公尺處有一座高塔 $\overline{EF}$ ，高塔和心平之間有一棵樹 $\overline{CD}$ ，且 A 、 C 、 E 三點恰好在同一直線上。若 $\overline{AB} = 1.6$ 公尺， $\overline{CD} = 4$ 公尺， $\overline{BD} : \overline{DF} = 3 : 5$ ，求塔高 $\overline{EF}$ 。

$\because \overline{CD}$ 與 $\overline{EF}$ 皆垂直於 $\overline{DF}$ ， $\therefore \overline{CD} \parallel \overline{EF}$ ，

在 $\triangle AEH$ 中， $\because \overline{CG} \parallel \overline{EH}$ ，

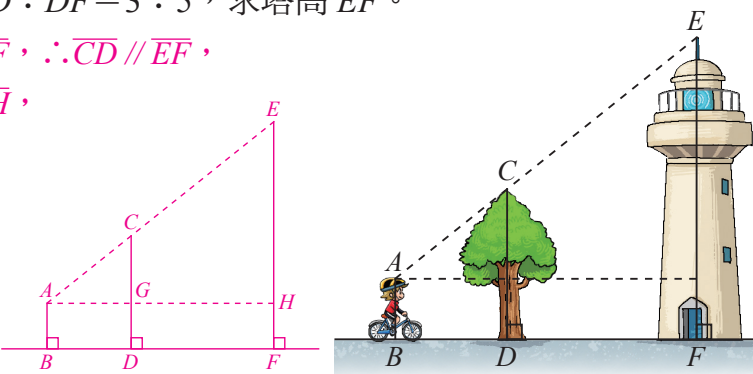
$\therefore \overline{AG} : \overline{AH} = \overline{CG} : \overline{EH}$

$3 : 8 = (4 - 1.6) : \overline{EH}$

$\overline{EH} = 6.4$

則 $\overline{EF} = 6.4 + 1.6 = 8$ ，

故塔高 $\overline{EF} = 8$ (公尺)。



4 相似形在一次函數圖形的應用

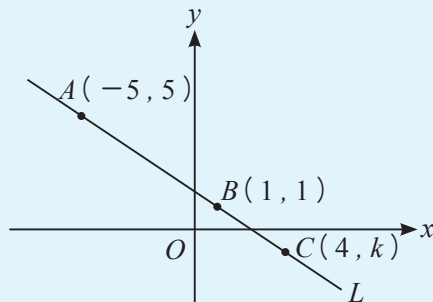
對應能力指標 9-s-05

在第二冊，我們已經知道一次函數的圖形是直線。接下來，我們要利用相似形對應邊成比例的概念，配合一次函數的圖形解決某些問題。

例 11 三點共線求點坐標

搭配習作 P16 基礎題 6

如圖，坐標平面上 $A(-5, 5)$ 、 $B(1, 1)$ 、 $C(4, k)$ 為直線 L 上相異三點，求 k 的值。



解 如圖，取 $D(-5, 1)$ 、 $E(1, k)$ ，連接 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CE}$ ，

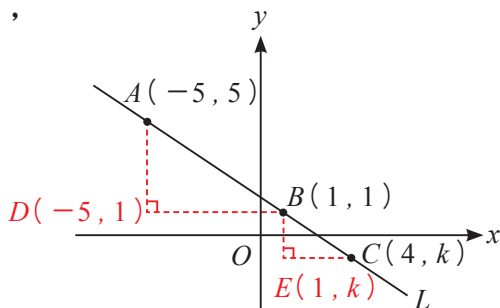
則 $\overline{AD}=4$ ， $\overline{BD}=6$ ， $\overline{BE}=1-k$ ， $\overline{CE}=3$ ，

由 AA 相似性質可知 $\triangle ABD \sim \triangle BCE$ ，

$$\therefore \overline{AD} : \overline{BE} = \overline{BD} : \overline{CE}$$

$$4 : (1-k) = 6 : 3$$

$$k = -1。$$



隨堂練習

如圖， $A(-1, -5)$ 、 $B(1, -2)$ 、 $C(k, 4)$ 為坐標平面上相異三點，若 A 、 B 、 C 三點在同一直線上，求 k 的值。

如圖，取 $D(1, -5)$ 、 $E(k, -2)$ ，

連接 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CE}$ ，

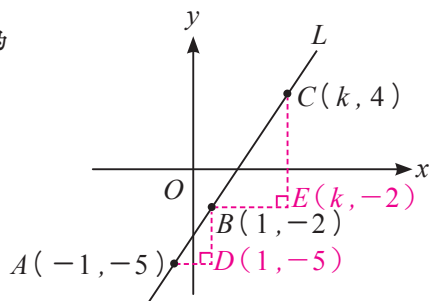
則 $\overline{AD}=2$ ， $\overline{BD}=3$ ， $\overline{BE}=k-1$ ， $\overline{CE}=6$ ，

由 AA 相似性質可知 $\triangle ABD \sim \triangle BCE$ ，

$$\text{故 } \overline{AD} : \overline{BE} = \overline{BD} : \overline{CE}$$

$$2 : (k-1) = 3 : 6$$

$$k = 5。$$





補給站 一次函數的圖形為何是一條直線？

在第二冊時，我們利用描點得到一次函數的圖形是一條直線，下面將利用相似形說明一次函數的圖形的確是一條直線。

要如何說明一次函數 $y=2x$ 的圖形是一條直線呢？首先，任取滿足 $y=2x$ 的兩點，例如： $O(0, 0)$ 與 $C(1, 2)$ ，連接 $\overrightarrow{OC}$ ，如圖 1-22。接著只要說明一次函數 $y=2x$ 圖形上的任一點都在 $\overrightarrow{OC}$ 上，就可以知道 $y=2x$ 的圖形是一條直線。

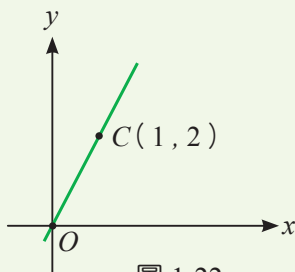


圖 1-22

如圖 1-23，設 $P(t, 2t)$ 為一次函數 $y=2x$ 圖形上的任意點， $\overline{PA}$ 、 $\overline{CB}$ 分別垂直 x 軸於 A 、 B 兩點。

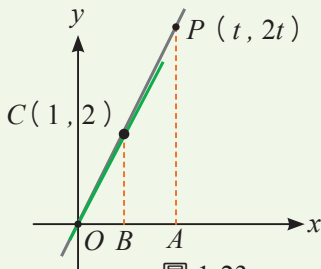


圖 1-23

$$\because \overline{OA} : \overline{OB} = t : 1$$

$$\overline{PA} : \overline{CB} = 2t : 2 = t : 1$$

$$\text{又 } \angle OAP = \angle OBC = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle OAP \sim \triangle OBC \text{ (SAS 相似性質),}$$

$$\text{故 } \angle AOP = \angle BOC \text{ (對應角相等),}$$

因此， $\overrightarrow{OP}$ 和 $\overrightarrow{OC}$ 是同一直線，

即 $y=2x$ 上任意點皆在 $\overrightarrow{OC}$ 上。

由此可知，一次函數 $y=2x$ 的圖形為一條直線。

同理，對於任意的數 a 、 b ，一次函數 $y=ax+b$ 的圖形也是一條直線。

重點回顧

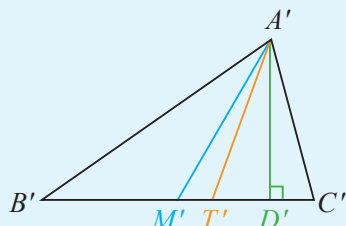
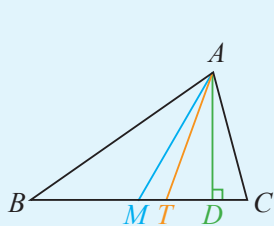
1 相似三角形的對應關係：

兩個相似三角形中，

(1) 對應邊的比 = 對應高的比 = 對應角平分線的比 = 對應中線的比。

(2) 面積的比 = 對應邊的平方比。

例 如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，若 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = 3 : 4$ ，
 $\overline{AD}$ 、 $\overline{A'D'}$ 分別為 $\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'C'$ 的高，
 $\overline{AT}$ 、 $\overline{A'T'}$ 分別為 $\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'C'$ 的角平分線，
 $\overline{AM}$ 、 $\overline{A'M'}$ 分別為 $\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'C'$ 的中線，
 則：(1) $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{AT} : \overline{A'T'} = \overline{AM} : \overline{A'M'} = 3 : 4$ 。
 (2) $\triangle ABC$ 面積 : $\triangle A'B'C'$ 面積 = $3^2 : 4^2 = 9 : 16$ 。



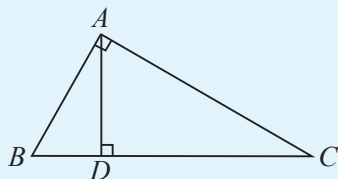
2 直角三角形母子相似性質：

如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，則：

(1) $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$ 。

(2) $\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB}$ 。

(3) $\overline{AD}^2 = \overline{DB} \times \overline{DC}$ 。



3 生活中無法直接求得的距離或長度，可利用相似三角形作簡易測量。

1-3 自我評量

- ① 如圖，已知 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ， A 、 B 、 C 的對應頂點為 D 、 E 、 F ，

若 $\triangle ABC$ 的周長為 45， $\triangle DEF$ 的周長為 60，求： 課 P54 隨堂

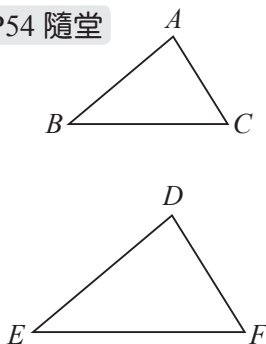
(1) $\overline{AB} : \overline{DE}$ 。

(2) $\triangle ABC$ 的面積： $\triangle DEF$ 的面積。

(1) $\overline{AB} : \overline{DE} = 45 : 60 = 3 : 4$ 。

(2) $\triangle ABC : \triangle DEF = \overline{AB}^2 : \overline{DE}^2 = 3^2 : 4^2 = 9 : 16$ 。

答：(1) 3 : 4，(2) 9 : 16。



- ② 如圖， $\triangle ABC$ 中， D 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，若 $\triangle ABC$ 的面積為 16 平方公分，求 $\triangle ADE$ 的面積。

課 P55 例 5

$\because D$ 、 E 分別為 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 的中點，

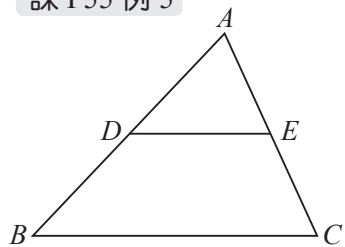
$\therefore \overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{DE} = \frac{1}{2} \overline{BC}$ ，

則 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，

故 $\triangle ADE : \triangle ABC = \overline{DE}^2 : \overline{BC}^2 = \left(\frac{1}{2} \overline{BC}\right)^2 : \overline{BC}^2 = \frac{1}{4} : 1$ ，

$\triangle ADE = \frac{1}{4} \triangle ABC = \frac{1}{4} \times 16 = 4$ 。

答：4 平方公分。



- ③ 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，若 $\overline{AC} = x - 2$ ，

$\overline{DC} = x - 4$ ， $\overline{BD} = 5$ ，求 $\overline{AC}$ 。

課 P56 隨堂

在 $\triangle ABC$ 中，

$\because \angle BAC = 90^\circ$ ，且 $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，

$\therefore \overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB}$

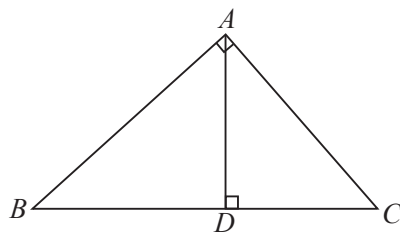
$(x - 2)^2 = (x - 4)(x - 4 + 5)$

$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 3x - 4$

$x = 8$

故 $\overline{AC} = x - 2 = 8 - 2 = 6$ 。

答：6。



- 4 如圖，忠明在地上放了一面鏡子(C 點)，透過鏡子的反射(即 $\angle 1 = \angle 2$)，他可以看見樹梢。已知忠明與鏡子的距離 $\overline{CD} = 1.2$ 公尺，鏡子與樹的距離 $\overline{BC} = 6$ 公尺，忠明眼睛(E 點)離地面的高度 $\overline{DE} = 150$ 公分，求樹高 $\overline{AB}$ 。

在 $\triangle EDC$ 與 $\triangle ABC$ 中，

$$\because \angle EDC = \angle ABC = 90^\circ, \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \triangle EDC \sim \triangle ABC \text{ (AA 相似性質),}$$

$$\text{則 } \overline{DC} : \overline{BC} = \overline{DE} : \overline{AB}$$

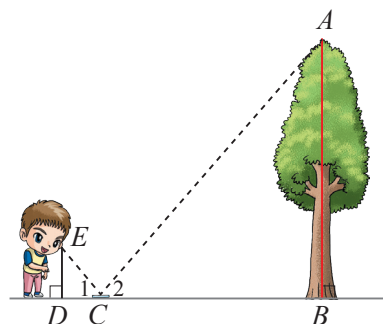
$$120 : 600 = 150 : \overline{AB}$$

$$\overline{AB} = 750$$

故樹高 $\overline{AB} = 750$ (公分)。

答：750 公分。

課 P59 例 9



- 5 如圖，朝會時老師、佩雲、美欣恰好站在同一排，已知佩雲、美欣的身高分別為 149 公分和 156 公分，且三人的頭頂恰好在同一直線上。若老師和美欣的距離恰好是佩雲和美欣距離的 3 倍，求老師的身高。

課 P60 隨堂

如圖，作 $\overline{AH} \perp \overline{EF}$ ，交 $\overline{CD}$ 於 G 點，

$$\because \overline{CD} \text{ 與 } \overline{EF} \text{ 皆垂直於 } \overline{DF}, \therefore \overline{CD} \parallel \overline{EF},$$

在 $\triangle AEH$ 中， $\because \overline{CG} \parallel \overline{EH}$ ，

$$\therefore \overline{AG} : \overline{AH} = \overline{CG} : \overline{EH}$$

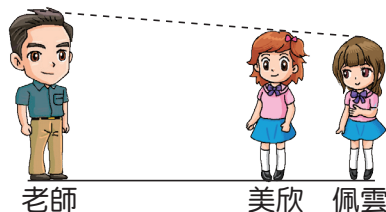
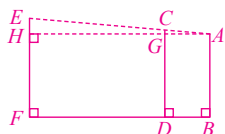
$$1 : 4 = (156 - 149) : \overline{EH}$$

$$\overline{EH} = 28$$

$$\text{則 } \overline{EF} = 149 + 28 = 177,$$

故老師的身高為 177 公分。

答：177 公分。



- 6 如圖，直線 L 通過 $A(0, 6)$ 、 $B(3, 0)$ 兩點，若 $C(5, k)$ 在直線 L 上，求 k 的值。

課 P61 例 11

如圖，取 $E(0, k)$ ，

連接 $\overline{CE}$ ，則 $\overline{AO} = 6$ ， $\overline{BO} = 3$ ， $\overline{AE} = 6 - k$ ， $\overline{CE} = 5$ ，

由 AA 相似性質可知 $\triangle AOB \sim \triangle AEC$ ，

$$\text{故 } \overline{AO} : \overline{AE} = \overline{BO} : \overline{CE}$$

$$6 : (6 - k) = 3 : 5$$

$$k = -4.$$

答：-4。

