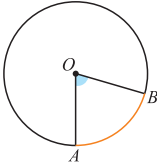
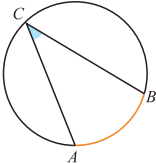
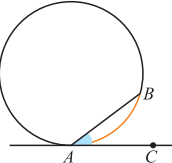
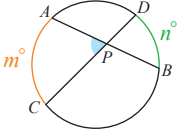
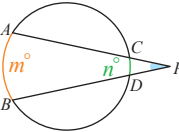


# 2-2 圓心角、圓周角與弦切角

## 本節性質與公式摘要

### 1. 圓心角、圓周角、弦切角、圓內角、圓外角與弧的關係：

| 名稱 | 圓心角                                                                               | 圓周角                                                                               | 弦切角                                                                                 |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 圖示 |  |  |  |
| 性質 | $\angle AOB = \widehat{AB}$                                                       | $\angle ACB = \frac{1}{2} \widehat{AB}$                                           | $\angle BAC = \frac{1}{2} \widehat{AB}$                                             |

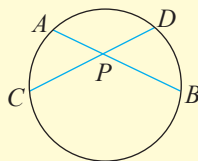
| 名稱 | 圓內角                                                                                | 圓外角                                                                                |
|----|------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|
| 圖示 |  |  |
| 性質 | $\angle APC = \frac{1}{2} (m^\circ + n^\circ)$                                     | $\angle P = \frac{1}{2} (m^\circ - n^\circ)$                                       |

### 2. 圓內接四邊形：

圓內接四邊形的對角互補。

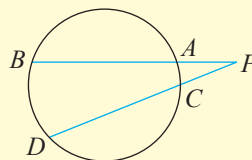
### 3. 內幕性質：

如圖，圓上兩弦  $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$  交於  $P$  點，  
則  $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ 。



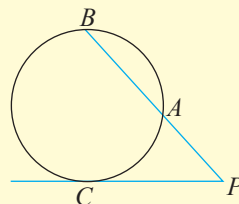
### 4. 外幕性質：

如圖，圓上兩弦  $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ ，其延長線交於圓外  $P$  點，  
則  $\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$ 。



### 5. 切割線性質：

如圖， $\overline{PB}$  交圓於  $A$ 、 $B$  兩點， $\overline{PC}$  為圓的切線，  
 $C$  為切點，則  $\overline{PC}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$ 。



## 基礎題

- ① 如圖，直徑  $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$  把圓  $O$  分成四個弧，若圓  $O$  的半徑為 10，且  $\widehat{AC} : \widehat{AD} : \widehat{DB} : \widehat{BC} = 1 : 3 : 1 : 3$ ，求  $\angle AOC$  與  $\widehat{BC}$  的長。

課 P98 例 1

10 分 8 分

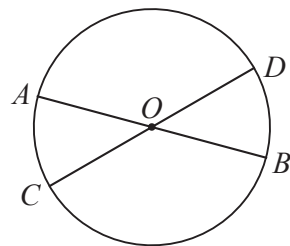
$$(1) \because \widehat{AC} : \widehat{AD} : \widehat{DB} : \widehat{BC} = 1 : 3 : 1 : 3,$$

$$\therefore \angle AOC = \widehat{AC} = 360^\circ \times \frac{1}{1+3+1+3} = 45^\circ.$$

$$(2) \angle BOC = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ,$$

$$\widehat{BC} \text{ 的長} = (2 \times 10 \times \pi) \times \frac{135}{360} = \frac{15}{2} \pi.$$

$$\text{答：(1) } 45^\circ, (2) \frac{15}{2} \pi.$$



- ② 如圖，已知  $\overline{AB}$  為圓  $O$  上的一弦，在圓  $O$  上找出三點  $C$ 、 $D$ 、 $E$ ，使得：(1)  $\angle ABC$  為直角，(2)  $\angle ABD$  為銳角，(3)  $\angle ABE$  為鈍角。

課 P104

15 分 12 分

(1) 連接  $\overrightarrow{AO}$  交圓  $O$  於  $C$  點，可得

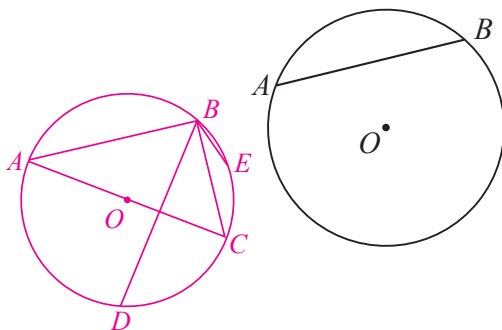
$\angle ABC$  為直角，則  $C$  點即為所求。

(2) 在優弧  $\widehat{BAC}$  上任取一點  $D$ ，可得

$\angle ABD$  為銳角，則  $D$  點即為所求。

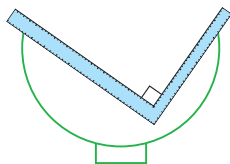
(3) 在劣弧  $\widehat{BC}$  上任取一點  $E$ ，可得

$\angle ABE$  為鈍角，則  $E$  點即為所求。

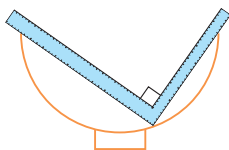


- ③ 如圖， $A$ 、 $B$ 、 $C$  三個碗的剖面圖都是圓弧，同時每一個碗內都擺放一把直角的曲尺。根據曲尺擺放的情形，判別哪一個碗的圓弧必是半圓？

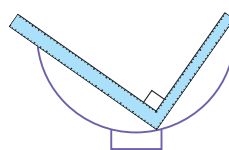
10 分 4 分 課 P104



(A)



(B)



(C)

答：(B)碗。

- ④ 如圖，四邊形  $ABCD$  為圓內接四邊形， $\overrightarrow{AD}$ 、 $\overrightarrow{BC}$  交於  $P$  點，若  $\angle P=40^\circ$ ， $\angle ADC=100^\circ$ ，求  $\angle A$ 。

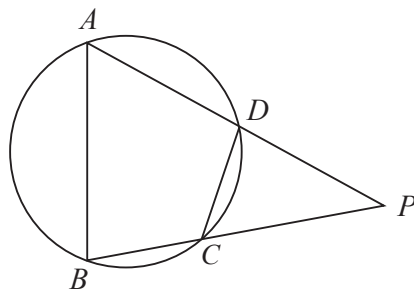
10分 8分 課 P107 隨堂

$$\angle B = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ,$$

$\triangle ABP$  中，

$$\begin{aligned}\angle A &= 180^\circ - \angle B - \angle P \\ &= 180^\circ - 80^\circ - 40^\circ \\ &= 60^\circ.\end{aligned}$$

答： $60^\circ$ 。



- ⑤ 如圖， $\overline{PA}$  切圓  $O$  於  $P$  點， $\overline{OA}$  交圓於  $B$  點，若  $\angle A=40^\circ$ ，求  $\angle APB$ 。

10分 8分 課 P111 例 8

$\because \overrightarrow{AP}$  切圓  $O$  於  $P$  點，

$$\therefore \angle OPA = 90^\circ,$$

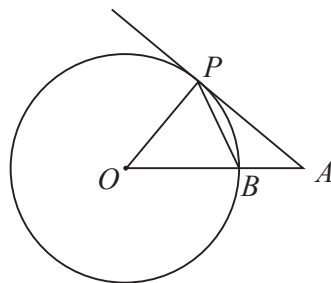
$\triangle APO$  中，

$$\angle POB = 180^\circ - 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ,$$

則  $\widehat{BP} = \angle POB = 50^\circ$ ，

$$\text{故 } \angle APB = \frac{1}{2} \widehat{BP} = \frac{1}{2} \times 50^\circ = 25^\circ.$$

答： $25^\circ$ 。



- ⑥ 如圖，四邊形  $ABCD$  為圓內接梯形，且  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，若  $\overline{CD}$  為直徑， $\angle ACD=24^\circ$ ，求  $\widehat{AB}$  的度數、 $\angle CAD$  和  $\angle CED$ 。

15分 10分 課 P112 例 9

$$(1) \widehat{AD} = 2\angle ACD = 2 \times 24^\circ = 48^\circ,$$

$$\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}, \therefore \widehat{BC} = \widehat{AD} = 48^\circ.$$

又  $\overline{CD}$  為直徑，

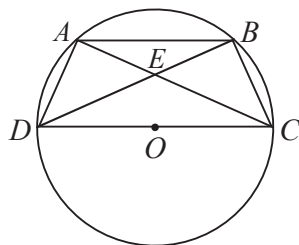
$$\text{則 } \widehat{AB} = 180^\circ - \widehat{BC} - \widehat{AD} = 180^\circ - 48^\circ - 48^\circ = 84^\circ.$$

(2)  $\because \overline{CD}$  為直徑，

$$\therefore \angle CAD = 90^\circ.$$

$$(3) \angle CED = \frac{1}{2} (\widehat{CD} + \widehat{AB}) = \frac{1}{2} (180^\circ + 84^\circ) = 132^\circ.$$

答： $\widehat{AB} = 84^\circ$ ， $\angle CAD = 90^\circ$ ， $\angle CED = 132^\circ$ 。

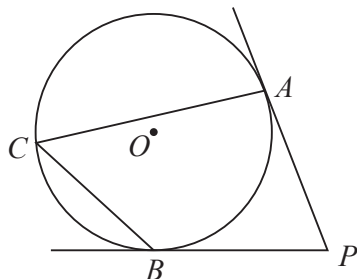


- ⑦ 如圖， $\overrightarrow{PA}$ 、 $\overrightarrow{PB}$ 切圓  $O$  於  $A$ 、 $B$  兩點，若  $\angle P = 70^\circ$ ，求  $\angle C$ 。 課 P115 例 12

10 分 10 分

$$\begin{aligned}\angle P &= \frac{1}{2} (\widehat{ACB} - \widehat{AB}) \\ 70^\circ &= \frac{1}{2} (360^\circ - \widehat{AB} - \widehat{AB}) \\ 140^\circ &= 360^\circ - 2\widehat{AB} \\ \widehat{AB} &= 110^\circ \\ \angle C &= \frac{1}{2} \widehat{AB} = \frac{1}{2} \times 110^\circ = 55^\circ.\end{aligned}$$

答：55°。



- ⑧ 如圖，圓內兩弦  $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$  交於  $P$  點，若  $\overline{PA} = 18$ ， $\overline{PB} = 8$ ， $\overline{PC} : \overline{PD} = 1 : 4$ ，求  $\overline{PD}$ 。 課 P116 例 13

10 分 10 分

設  $\overline{PC} = x$ ，則  $\overline{PD} = 4x$ ，

由圓的內幕性質可知

$$\overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$$

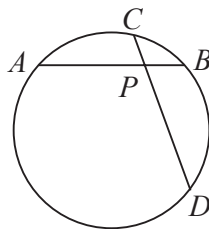
$$18 \times 8 = x \times 4x$$

$$x^2 = 36$$

$$x = 6 \text{ 或 } -6 \text{ (不合)}$$

$$\overline{PD} = 4x = 4 \times 6 = 24。$$

答：24。



- ⑨ 如圖， $\overline{PA}$  交圓於  $A$ 、 $B$  兩點， $\overrightarrow{PC}$  為圓的切線， $C$  為切點，若  $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{PB} = 2$ ，求  $\overline{PC}$ 。 課 P118 例 15

10 分 10 分

由圓的切割線性質可知

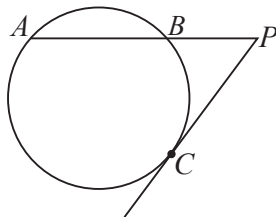
$$\overline{PC}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB}$$

$$= (3 + 2) \times 2$$

$$= 10$$

$$\overline{PC} = \sqrt{10} \text{ 或 } -\sqrt{10} \text{ (不合)}。$$

答：√10。



## 精熟題

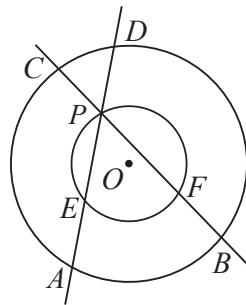
- ① 如圖，大小兩個同心圓中， $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$  為大圓上相異四點， $\overleftrightarrow{AD}$ 、 $\overleftrightarrow{BC}$  分別與小圓交於  $E$ 、 $F$  兩點，且  $\overleftrightarrow{AD}$  與  $\overleftrightarrow{BC}$  的交點  $P$  剛好落在小圓上，若  $\widehat{AB}=80^\circ$ ， $\widehat{CD}=30^\circ$ ，求  $\widehat{EF}$  的度數。 **10 分**

$$\begin{aligned}\angle APB &= \frac{1}{2}(\widehat{AB} + \widehat{CD}) \\ &= \frac{1}{2}(80^\circ + 30^\circ) = 55^\circ,\end{aligned}$$

又  $\angle EPF$  為小圓的圓周角，

$$\therefore \angle EPF = \frac{1}{2}\widehat{EF},$$

$$\begin{aligned}\text{故 } \widehat{EF} &= 2\angle EPF = 2\angle APB \\ &= 2 \times 55^\circ = 110^\circ.\end{aligned}$$



**答：** $110^\circ$ 。

- ★ ② 如圖，有一個圓通過  $\triangle ABC$  的三個頂點，且  $\overline{BC}$  的中垂線與  $\widehat{AC}$  相交於  $D$  點，若  $\angle B=78^\circ$ ， $\angle C=42^\circ$ ，求  $\widehat{AD}$  的度數。 **10 分**

如圖， $\because \overline{BC}$  為圓的一弦，

$\therefore \overline{BC}$  的中垂線會通過圓心，

以  $\overline{BC}$  的中垂線為對稱軸，

作圓上一點  $A$  的對稱點  $E$ ，

則  $E$  點也會在圓上，

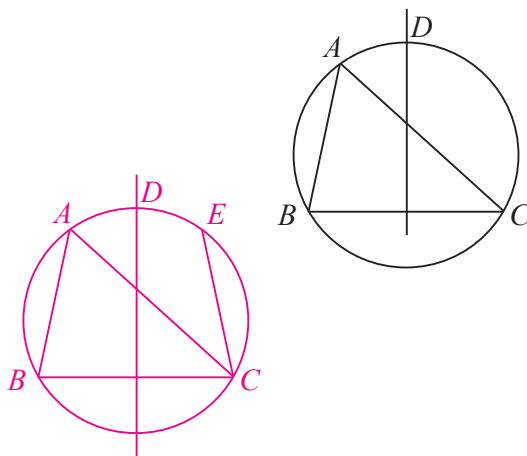
$$\widehat{AD} = \widehat{DE}, \angle ECB = \angle ABC = 78^\circ,$$

$$\text{故 } \widehat{AD} = \frac{1}{2}\widehat{AE} = \angle ECA$$

$$= \angle ECB - \angle ACB$$

$$= 78^\circ - 42^\circ$$

$$= 36^\circ.$$



**答：** $36^\circ$ 。