

2-1 點、線、圓

本節性質與公式摘要

1. 圓與切線：

- (1) 圓心到切點的連線，必垂直於過此切點的切線。
- (2) 圓外一點到此圓的兩切線段長相等。

2. 兩圓位置關係與公切線數量：

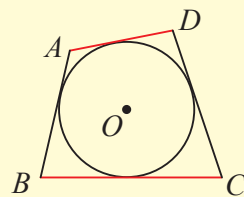
若圓 O_1 的半徑為 r_1 ，圓 O_2 的半徑為 r_2 ($r_1 > r_2$)，則：

兩圓的位置關係	連心線段 $\overline{O_1O_2}$ 與 r_1 、 r_2 的大小關係	外公切線數量	內公切線數量
外離	$\overline{O_1O_2} > r_1 + r_2$	2 條	2 條
外切	$\overline{O_1O_2} = r_1 + r_2$	2 條	1 條
交於兩點	$r_1 - r_2 < \overline{O_1O_2} < r_1 + r_2$	2 條	0 條
內切	$\overline{O_1O_2} = r_1 - r_2$	1 條	0 條
內離	$0 \leq \overline{O_1O_2} < r_1 - r_2$	0 條	0 條

3. 圓外切四邊形：

圓外切四邊形兩組對邊長之和相等。

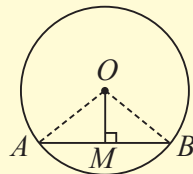
例 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓外切四邊形，則 $\overline{AD} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{DC}$ 。



4. 弦的性質：

- (1) 一弦的弦心距，必垂直平分此弦。
- (2) 弦的中垂線會通過圓心。

例 如圖， $\overline{OM}$ 為弦 $\overline{AB}$ 的弦心距，則 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{AM} = \overline{BM}$ 。



基礎題

每格 2 分，共 10 分 每格 2 分，共 10 分

- ① 已知圓 O 的半徑為 8，判別下列直線與圓 O 的交點個數：

課 P74 隨堂

	直線 L_1	直線 L_2	直線 L_3
圓心 O 到直線的距離	8	7	9
直線與圓 O 的交點個數	1	2	0

(1) 在 L_1 、 L_2 、 L_3 這三條直線中，哪一條是圓 O 的切線？答： L_1

(2) 在 L_1 、 L_2 、 L_3 這三條直線中，哪一條是圓 O 的割線？答： L_2

- ② 如圖， $\overrightarrow{AP}$ 與圓 O 切於 A 點， $\overrightarrow{OP}$ 與圓 O 交於 B 點，若 $\overline{PA}=12$ ， $\overline{PB}=8$ ，求圓 O 的半徑。

10 分 8 分 課 P75 隨堂

連接 $\overline{OA}$ ，則 $\overline{OA} \perp \overline{AP}$ ，

設 $\overline{OA} = \overline{OB} = x$ ，

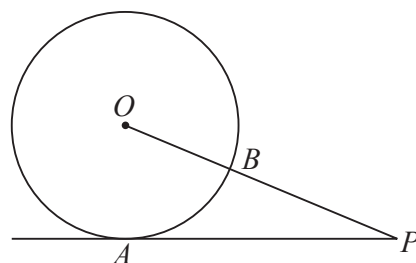
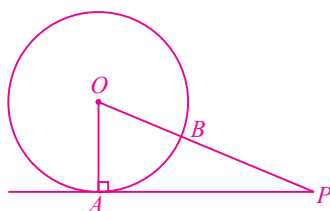
則 $\overline{OP}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AP}^2$

$$(x+8)^2 = x^2 + 12^2$$

$$x = 5$$

故圓 O 的半徑為 5。

答：5。



- ③ 如圖， $\overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$ 切圓 O 於 A 、 B 兩點，若圓 O 的半徑為 6， $\angle APB = 120^\circ$ ，求 $\overline{AB}$ 。

10 分 8 分 課 P77 例 3

連接 $\overline{OA}$ ，

$\because \overline{PA}$ 、 $\overline{PB}$ 切圓 O 於 A 、 B 兩點，

$\therefore \overline{OA} \perp \overline{PA}$ ， $\overline{OP}$ 平分 $\angle APB$ 且垂直平分 $\overline{AB}$ ，

則 $\angle APO = 60^\circ$ ， $\angle AOP = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ，

又 $\angle ACO = 90^\circ$ ， $\angle OAC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ ，

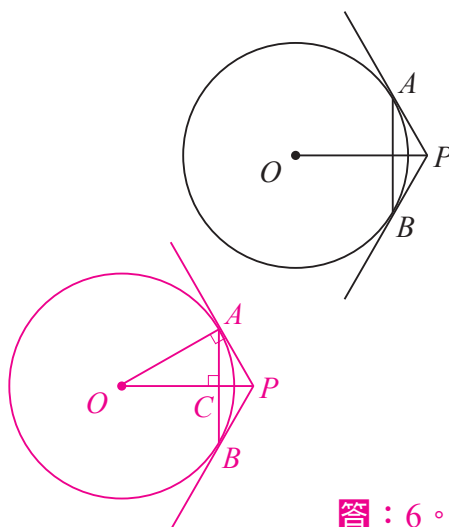
$\therefore \triangle OAC$ 為 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的直角三角形，

$\overline{AC} : \overline{OA} = 1 : 2$

$\overline{AC} : 6 = 1 : 2$ ， $\overline{AC} = 3$

故 $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} = 3 + 3 = 6$ 。

答：6。



- ④ 如圖，等腰梯形 $ABCD$ 為圓 O 的外切四邊形， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，若 $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 72$ ，求等腰梯形 $ABCD$ 的周長。

課 P78 例 4

10 分 8 分

$\because$ 四邊形 $ABCD$ 為等腰梯形，且 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，

$\therefore \overline{AD} = \overline{BC}$ ，

又等腰梯形 $ABCD$ 為圓 O 的外切四邊形，

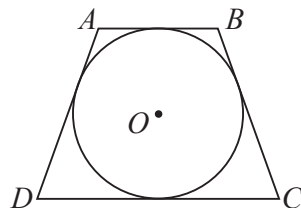
$\therefore \overline{AB} + \overline{CD} = \overline{AD} + \overline{BC} = 2\overline{BC}$ ，

$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} = 2\overline{BC} + \overline{BC} = 3\overline{BC} = 72$ ，

$\overline{BC} = 24$ ，

故等腰梯形 $ABCD$ 的周長 $= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA}$

$= 72 + 24 = 96$ 。 答：96。



- ★ ⑤ 如圖， $\overline{AB}$ 為圓 O 的直徑， $\overline{BC}$ 為圓 O 的一弦，自 O 點作 $\overline{BC}$ 的垂線，交 $\overline{BC}$ 於 D 點。若 $\overline{AB} = 30$ ， $\overline{BC} = 24$ ，求 $\triangle OBD$ 的面積。

課 P81 例 7

10 分 8 分

$\because \overline{AB}$ 為直徑，

$\therefore \overline{OA} = \overline{OB} = 30 \div 2 = 15$ ，

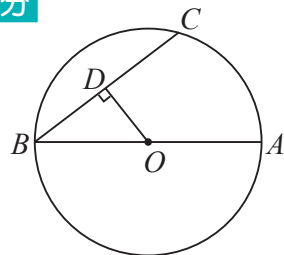
又 $\overline{OD} \perp \overline{BC}$ ，

$\therefore \overline{BD} = \overline{CD} = 24 \div 2 = 12$ ，

$\overline{OD} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{BD}^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$ ，

故 $\triangle OBD$ 的面積 $= 12 \times 9 \div 2 = 54$ 。

答：54。



- ⑥ 在坐標平面上，圓 O_1 和圓 O_2 的半徑分別為 10、5，其圓心坐標分別為 $O_1(2, 4)$ 和 $O_2(-1, 0)$ ，則圓 O_1 和圓 O_2 的位置關係為何？

課 P86 例 8

10 分 8 分

連心線段長 $\overline{O_1O_2} = \sqrt{[2 - (-1)]^2 + (4 - 0)^2} = 5$ ，

又圓 O_1 和圓 O_2 的半徑差為 $10 - 5 = 5$ ，

$\therefore$ 圓 O_1 和圓 O_2 的位置關係為內切。

答：內切。

- ⑦ 同一平面上的兩圓(大圓 O_1 與小圓 O_2)外切時, 連心線段長為 20; 當這兩圓內切時, 連心線段長為 6, 求圓 O_1 與圓 O_2 的半徑。

課 P86 例 8

10 分 10 分

設圓 O_1 的半徑為 R , 圓 O_2 的半徑為 r ,

$$\text{依題意可知 } \begin{cases} R+r=20 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ R-r=6 \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

可得 $R=13$, $r=7$,

故圓 O_1 的半徑為 13, 圓 O_2 的半徑為 7。

答: 圓 O_1 的半徑為 13, 圓 O_2 的半徑為 7。

- ⑧ 如圖, 圓 O_1 和圓 O_2 交於兩點, 直線 L 分別與圓 O_1 、圓 O_2 切於 A 、 B 兩點, 已知圓 O_1 的半徑為 7, 圓 O_2 的半徑為 5, $\overline{AB}=6$, 求 $\overline{O_1O_2}$ 。

課 P89 例 9

15 分 10 分

作 $\overline{O_2H} \perp \overline{O_1A}$ 於 H 點,

則四邊形 HO_2BA 為長方形,

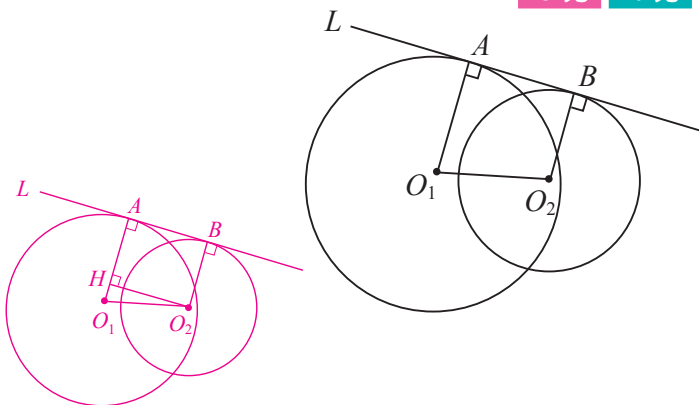
$$\overline{O_2H} = \overline{AB} = 6, \overline{O_2B} = \overline{HA} = 5,$$

$$\overline{O_1H} = \overline{O_1A} - \overline{HA} = 7 - 5 = 2,$$

在直角三角形 O_1O_2H 中,

$$\begin{aligned} \overline{O_1O_2} &= \sqrt{\overline{O_1H}^2 + \overline{O_2H}^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

答: $2\sqrt{10}$ 。



- ⑨ 如圖, 直線 L 分別與圓 O_1 、圓 O_2 切於 C 、 D 兩點, 且圓 O_1 和圓 O_2 的半徑分別為 5、3, $\overline{O_1O_2}=10$, 求 $\overline{CD}$ 。

15 分 10 分 課 P90 例 10

過 O_2 作 $\overline{O_2H} \perp \overline{O_1C}$ 於 H 點,

則四邊形 CDO_2H 為長方形,

$$\overline{O_2H} = \overline{CD}, \overline{O_2D} = \overline{CH} = 3,$$

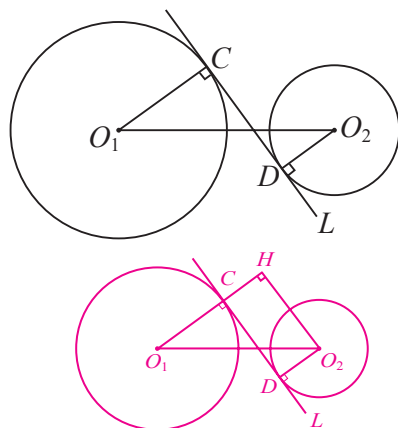
$$\overline{O_1H} = \overline{O_1C} - \overline{CH} = 5 - 3 = 2,$$

在直角三角形 O_1O_2H 中,

$$\overline{O_2H} = \sqrt{\overline{O_1O_2}^2 - \overline{O_1H}^2} = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6,$$

$\therefore$ 內公切線段長 $\overline{CD} = 6$ 。

答: 6。



精熟題

- ① 如圖，坐標平面上圓 I 通過 $A(2, 0)$ 、 $B(12, 0)$ 、 $C(0, 3)$ 、 $D(0, 8)$ ，求圓心 I 的坐標。 **10 分**

分別取 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CD}$ 的中點 M 、 N ，

$\therefore M$ 點的坐標為 $(\frac{2+12}{2}, 0) = (7, 0)$ ，

N 點的坐標為 $(0, \frac{3+8}{2}) = (0, \frac{11}{2})$ ，

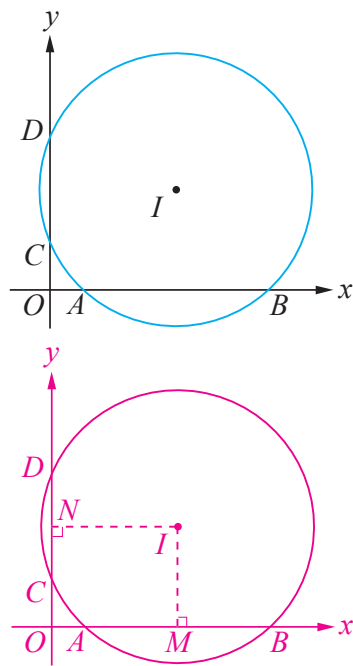
又 $\overline{IM}$ 為弦 $\overline{AB}$ 的弦心距，

$\therefore \overline{IM} \perp \overline{AB}$ ，

同理 $\overline{IN} \perp \overline{CD}$ ，

故圓心 I 的坐標為 $(7, \frac{11}{2})$ 。

答： $(7, \frac{11}{2})$ 。



- ② 如圖，圓 O 分別與 $\overleftrightarrow{AB}$ 、 $\overleftrightarrow{BC}$ 和 $\overleftrightarrow{CA}$ 切於 D 、 E 、 F 三點，若 $\overline{AD} = 10$ ，求 $\triangle ABC$ 的周長。 **10 分**

由「圓外一點到圓的兩切線段等長」的性質可知

$\overline{BD} = \overline{BE}$ ， $\overline{CE} = \overline{CF}$ ， $\overline{AD} = \overline{AF}$ 。

$$\begin{aligned}
 \triangle ABC \text{ 的周長} &= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC} \\
 &= \overline{AB} + (\overline{BE} + \overline{CE}) + \overline{AC} \\
 &= \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{CF} + \overline{AC} \\
 &= \overline{AD} + \overline{AF} \\
 &= 2\overline{AD} \\
 &= 2 \times 10 \\
 &= 20
 \end{aligned}$$

答：20。

