

1-3

相似三角形的應用

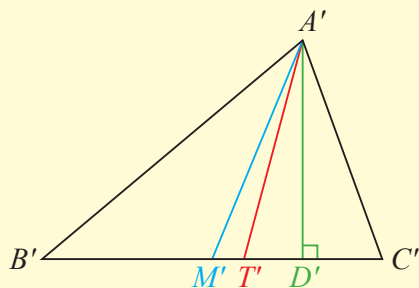
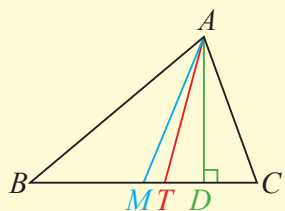
本節性質與公式摘要

1. 相似三角形的對應關係：

兩個相似三角形中，

- (1) 對應邊的比 = 對應高的比 = 對應角平分線的比 = 對應中線的比。
- (2) 面積的比 = 對應邊的平方比。

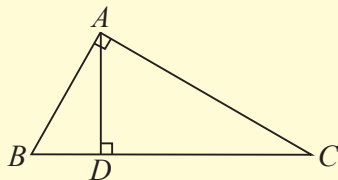
例 如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ，若 $\overline{AB} : \overline{A'B'} = 2 : 3$ ，
 $\overline{AD}$ 、 $\overline{A'D'}$ 分別為 $\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'C'$ 的高，
 $\overline{AT}$ 、 $\overline{A'T'}$ 分別為 $\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'C'$ 的角平分線，
 $\overline{AM}$ 、 $\overline{A'M'}$ 分別為 $\triangle ABC$ 、 $\triangle A'B'C'$ 的中線，
 則：(1) $\overline{AB} : \overline{A'B'} = \overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{AT} : \overline{A'T'} = \overline{AM} : \overline{A'M'} = 2 : 3$ 。
 (2) $\triangle ABC$ 的面積： $\triangle A'B'C'$ 的面積 = $2^2 : 3^2 = 4 : 9$ 。



2. 直角三角形母子相似性質：

如圖，直角三角形 ABC 中， $\angle BAC = 90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ 於 D 點，則：

- (1) $\overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC}$ 。
- (2) $\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB}$ 。
- (3) $\overline{AD}^2 = \overline{DB} \times \overline{DC}$ 。



基礎題

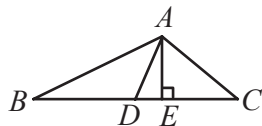
- ① 如圖， $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ ， $\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的中線， $\overline{AE}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高， $\overline{A'D'}$ 為 $\overline{B'C'}$ 上的中線， $\overline{A'E'}$ 為 $\overline{B'C'}$ 上的高。若 $\overline{AB}=3$ ， $\overline{A'B'}=5$ ，求：

- (1) $\overline{AE} : \overline{A'E'}$ 。 課 P51 例 1 **8 分** **4 分**

$$\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C',$$

$$\therefore \overline{AE} : \overline{A'E'} = \overline{AB} : \overline{A'B'} = 3 : 5。$$

答：3 : 5。

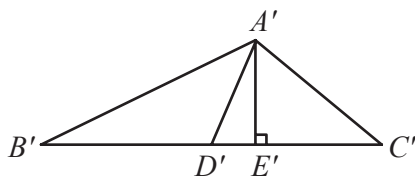


- (2) $\overline{AD} : \overline{A'D'}$ 。 課 P53 例 3 **8 分** **4 分**

$$\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C',$$

$$\therefore \overline{AD} : \overline{A'D'} = \overline{AB} : \overline{A'B'} = 3 : 5。$$

答：3 : 5。



- (3) $\triangle ADC$ 與 $\triangle A'D'C'$ 的面積比。 課 P54 例 4 **9 分** **6 分**

$$\because \triangle ABC \sim \triangle A'B'C',$$

$$\therefore \triangle ADC \sim \triangle A'D'C',$$

$$\text{故 } \triangle ADC : \triangle A'D'C' = \overline{AD}^2 : \overline{A'D'}^2 = 3^2 : 5^2 = 9 : 25。$$

答：9 : 25。

- ② 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC=90^\circ$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，若 $\overline{BD}=4$ ， $\overline{CD}=10$ ，求 $\overline{AB}$ 、 $\overline{AC}$ 、 $\overline{AD}$ 。

課 P57 隨堂

15 分 **12 分**

$$\because \angle BAC=90^\circ, \text{ 且 } \overline{AD} \perp \overline{BC},$$

$$\therefore \overline{AB}^2 = \overline{BD} \times \overline{BC} = 4 \times (4 + 10) = 56,$$

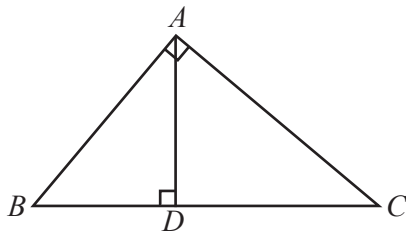
$$\overline{AB} = 2\sqrt{14}。$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD} \times \overline{CB} = 10 \times (4 + 10) = 140,$$

$$\overline{AC} = 2\sqrt{35}。$$

$$\overline{AD}^2 = \overline{DB} \times \overline{DC} = 4 \times 10 = 40,$$

$$\overline{AD} = 2\sqrt{10}。$$



答： $\overline{AB} = 2\sqrt{14}$ ，

$$\overline{AC} = 2\sqrt{35}，$$

$$\overline{AD} = 2\sqrt{10}。$$

- ③ 如圖，在 A 、 B 兩點間有一個湖泊，志豪為了測量 A 、 B 兩點的距離，先找了一點 C ，並測得 $\overline{CA}=90$ 公尺， $\overline{CD}=36$ 公尺，再作 $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$ ，使 C 、 E 、 B 三點在同一直線上， $\overline{DE}=48$ 公尺，求 A 、 B 兩點的距離。

課 P58 例 8

15 分 12 分

在 $\triangle ABC$ 中，

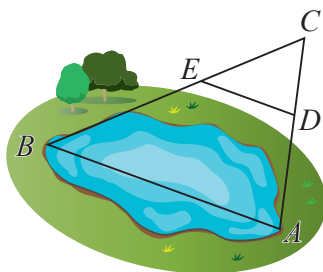
$$\because \overline{DE} \parallel \overline{AB},$$

$$\therefore \overline{CD} : \overline{CA} = \overline{DE} : \overline{AB}$$

$$36 : 90 = 48 : \overline{AB}$$

$$\overline{AB} = 120$$

故 A 、 B 兩點的距離為 120 公尺。



答：120 公尺。

- ④ 如圖，颱風來襲，有棵樹被強風吹斷，此折斷的樹恰與地面形成一個直角三角形。美霖在樹根與頂端之間立了一根木棍 $\overline{MN}$ ， B 、 M 、 A 成一直線，若 $\overline{MN}=1.5$ 公尺， $\overline{BN}=3$ 公尺， $\overline{NC}=15$ 公尺，求原來的樹高。

課 P59 例 9

15 分 12 分

在 $\triangle ABC$ 中，

$$\because \overline{MN} \perp \overline{BC}, \overline{AC} \perp \overline{BC},$$

$$\therefore \overline{MN} \parallel \overline{AC},$$

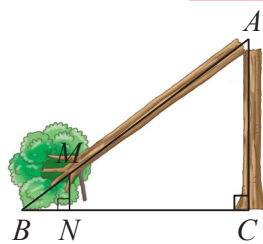
$$\text{則 } \overline{BN} : \overline{BC} = \overline{MN} : \overline{AC}$$

$$3 : (3 + 15) = 1.5 : \overline{AC}$$

$$\overline{AC} = 9$$

$$\text{又 } \overline{AB} = \sqrt{\overline{BC}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{18^2 + 9^2} = 9\sqrt{5}$$

故樹高為 $\overline{AC} + \overline{AB} = 9 + 9\sqrt{5}$ (公尺)。



答： $9 + 9\sqrt{5}$ 公尺。

- ⑤ 如圖，有一個水桶，其剖面為等腰梯形，下底為 30 公分，上底為 48 公分，水桶高為 36 公分，打掃時，聖偉在水桶內裝了 24 公分高的水，此時水面的寬 $\overline{AB}$ 為多少公分？

15 分 12 分 課 P60 例 10

等腰梯形 $CDEF$ 中，

連接 $\overline{CF}$ ，作 $\overline{GE} \parallel \overline{CD}$ 交 $\overline{AB}$ 於 H 點，

則 $\overline{CG} = \overline{AH} = \overline{DE} = 30$ ，

$$\overline{GF} = 48 - 30 = 18，$$

$$\therefore \overline{HB} \parallel \overline{GF}，$$

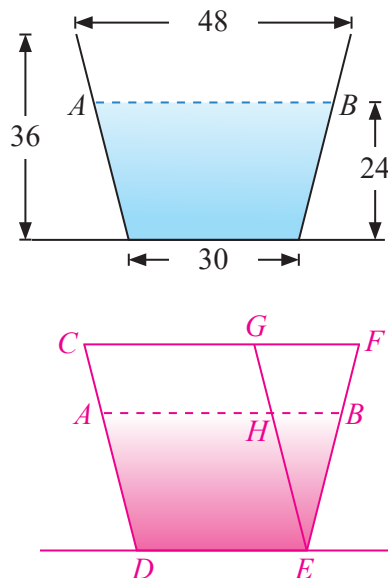
$$\therefore \triangle EHB \sim \triangle EGF，$$

$$\text{故 } \overline{HB} : 18 = 24 : 36$$

$$\overline{HB} = 12$$

$$\text{因此 } \overline{AB} = 30 + 12 = 42。$$

答：42 公分。



- ⑥ 如圖， A 、 B 、 C 三點均在直線 L 上， $\overline{CF}$ 、 $\overline{BE}$ 皆與 x 軸垂直，若 $\overline{AC} : \overline{CB} = 1 : 2$ ， A 點坐標為 $(-1, 0)$ ， B 點坐標為 $(8, 6)$ ，求 C 點的坐標。

15 分 12 分 課 P61 例 11

$\therefore \overline{CF}$ 、 $\overline{BE}$ 皆與 x 軸垂直，

$$\therefore \overline{CF} \parallel \overline{BE}，$$

則 $\triangle ACF \sim \triangle ABE$ ，

$$\text{又 } \overline{BE} = 6，\overline{AE} = 8 - (-1) = 9，$$

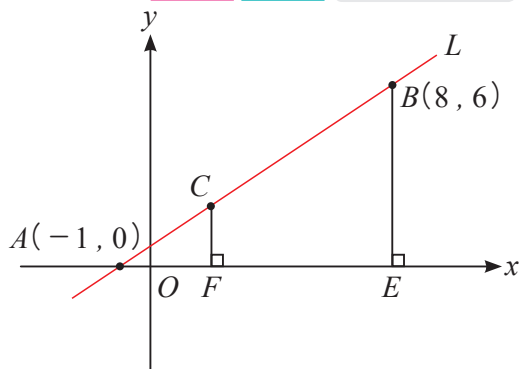
$$\therefore \overline{AC} : \overline{AB} = \overline{AF} : \overline{AE} = \overline{CF} : \overline{BE}$$

$$1 : 3 = \overline{AF} : 9 = \overline{CF} : 6$$

$$\overline{AF} = 3，\overline{CF} = 2$$

$$\text{故 } C \text{ 點坐標為 } (-1 + 3, 2) = (2, 2)$$

答：(2, 2)。



精熟題

- ① 如圖，梯形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 O 點， $\overline{AB}=9$ ， $\overline{CD}=15$ ，若 $\triangle AOB$ 的面積為 27，求：

(1) $\triangle COD$ 的面積。8 分

(2) 梯形 $ABCD$ 的面積。8 分

(1) $\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\therefore \triangle AOB \sim \triangle COD$ ，

$$\text{故 } \triangle AOB : \triangle COD = \overline{AB}^2 : \overline{CD}^2$$

$$27 : \triangle COD = 9^2 : 15^2$$

$$\triangle COD = 75$$

(2) $\because \triangle AOB \sim \triangle COD$ ，

$$\therefore \overline{AO} : \overline{CO} = \overline{AB} : \overline{CD} = 9 : 15 = 3 : 5，$$

$$\text{又 } \triangle AOB : \triangle BOC = \overline{AO} : \overline{OC} \text{ (同高)}$$

$$27 : \triangle BOC = 3 : 5$$

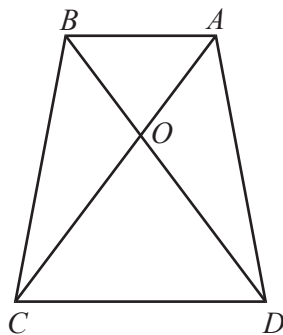
$$\triangle BOC = 45，$$

$$\text{同理 } \triangle AOD = 45，$$

$$\text{故梯形 } ABCD \text{ 的面積} = \triangle AOB + \triangle BOC + \triangle COD + \triangle AOD$$

$$= 27 + 45 + 75 + 45 = 192。$$

答：(1) 75，(2) 192。



- ② 如圖，兩個正方形 $ABCD$ 、 $GCEF$ 的面積分別為 4、25。若 C 點在 $\overline{BE}$ 上， $\overline{AF}$ 與 $\overline{CG}$ 相交於 H 點，求 $\overline{DH}$ 。10 分

$\because$ 正方形 $ABCD$ 、 $GCEF$ 的面積分別為 4、25，

$\therefore$ 正方形 $ABCD$ 、 $GCEF$ 的邊長分別為 2、5。

在 $\triangle ADH$ 與 $\triangle FGH$ 中，

$\because \angle AHD = \angle FHG$ ， $\angle ADH = \angle FGH = 90^\circ$ ，

$\therefore \triangle ADH \sim \triangle FGH$ (AA 相似性質)，

則 $\overline{DH} : \overline{GH} = \overline{AD} : \overline{FG} = 2 : 5$ ，

又 $\overline{GD} = \overline{GC} - \overline{DC} = 5 - 2 = 3$ ，

$$\text{故 } \overline{DH} = 3 \times \frac{2}{2+5} = \frac{6}{7}。$$

答： $\frac{6}{7}$ 。

