

1. 如圖，圓 P 與 x 軸交於 $A(6,0)$ ，與 y 軸交於 $B(0,2)$ ，求

圓心 P 的坐標

設 $OP = x$

$\therefore AO = 6$

$\therefore BP = AP = 6 - x$

又 $BO = 2$

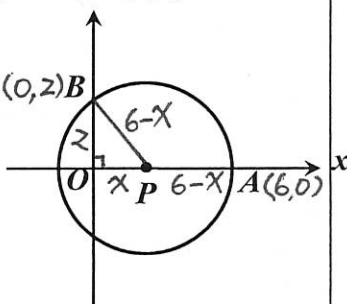
$$x^2 + 2^2 = (6-x)^2$$

$$4 + x^2 = 36 - 12x + x^2$$

$$12x = 32$$

$$x = \frac{8}{3}$$

$$\Rightarrow P(\frac{8}{3}, 0)$$



2. 如圖，圓 O 的直徑 AB 平分 CD 於 M ，若 $CD = 4\sqrt{7}$ ，

$AM = 2$ ，求圓 O 半徑

設半徑 r

連 $CO \Rightarrow CO = AO = r$

$\Rightarrow MO = r - 2$

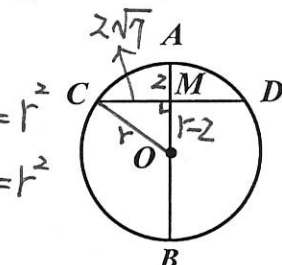
又 $CM = \frac{4\sqrt{7}}{2} = 2\sqrt{7}$

$$(2\sqrt{7})^2 + (r-2)^2 = r^2$$

$$28 + r^2 - 4r + 4 = r^2$$

$$32 = 4r$$

$$r = 8$$



3. 如圖， AB 為圓 O 的直徑， $CD \perp AB$ 於 E ，若 $AB = 12$ ，

$CD = 2\sqrt{11}$ ，求 BC

連 $CO \Rightarrow BO = CO = \frac{12}{2} = 6$

又 $CE = \frac{2\sqrt{11}}{2} = \sqrt{11}$

$\Rightarrow OE = \sqrt{6^2 - (\sqrt{11})^2}$

$$= \sqrt{25}$$

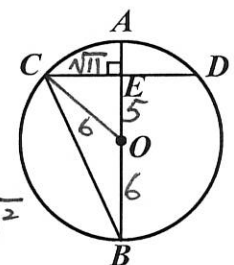
$$= 5$$

$$\Rightarrow BE = 6 + 5 = 11$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{(\sqrt{11})^2 + 11^2}$$

$$= \sqrt{11 + 121}$$

$$= \sqrt{132} = 2\sqrt{33}$$



4. 如圖， AB 是圓 O 的弦， CD 切圓 O 於 T ， $AB \parallel CD$ ， OT 交

AB 於 M ，已知 $OM : MT = 3 : 2$ ， $AB = 12$ ，求 OT

設 $OM = 3x$ ， $MT = 2x$

連 $OA \Rightarrow OA = OT = 5x$

又 $AM = \frac{12}{2} = 6$

$$6^2 + (3x)^2 = (5x)^2$$

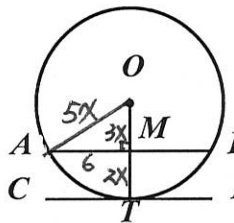
$$36 + 9x^2 = 25x^2$$

$$16x^2 = 36$$

$$x^2 = \frac{9}{4}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

$$OT = 5x = \frac{15}{2}$$



5. 直徑 20 公分的圓上兩弦 AB 與 CD 互相平行，若 $AB = 16$ 公

分， $CD = 12$ 公分，則 AB 與 CD 相距多少公分？

如圖， $OA = OC = \frac{20}{2} = 10$

$AM = \frac{16}{2} = 8$

$\Rightarrow OM = \sqrt{10^2 - 8^2} = 6$

$CN = \frac{12}{2} = 6$

$\Rightarrow ON = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$

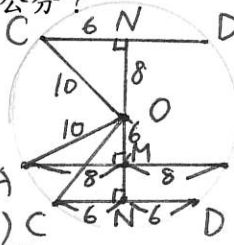
①若兩弦在同側

$$MN = ON - OM$$

$$= 8 - 6 = 2(\text{cm})$$

②若兩弦在異側

$$MN = ON + OM = 8 + 6 = 14(\text{cm})$$



6. 如圖， PA 切圓 O 於 A ， $\angle P = 30^\circ$ ， $OP = 14$ ，則

(1) $PA = ?$ (2) 若 $AC \perp OP$ 於 M ，則 $AM = ?$

(1) 連 AM

$\therefore 30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$

$$\therefore AO = \frac{14}{2} = 7$$

$$AP = 7\sqrt{3}$$

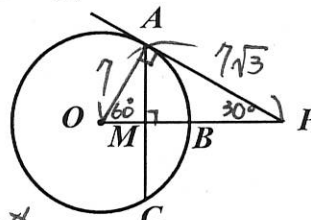
$$= 7\sqrt{3}$$

(2)

$$AM = \frac{7 \times 7\sqrt{3}}{14}$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{7\sqrt{3}}{2}$$



7. 如圖， $\triangle ABC$ 中，一半圓圓心 O 在 AC 上，切 AB 於 E ，

切 BC 於 C ，若 $AC = 8$ ， $BC = 6$ ，求斜線部分面積

如圖，設 $OE = OC = r$

$$\text{又 } AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$$

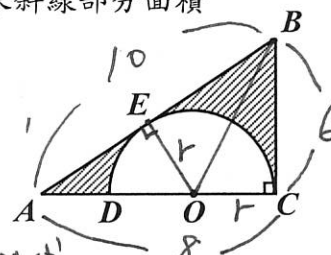
$$\therefore \triangle ABC = \triangle AOB + \triangle BOC$$

$$\therefore \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = \frac{1}{2} \times 10 \times r + \frac{1}{2} \times 6 \times r$$

$$24 = 5r + 3r \Rightarrow r = 3$$

斜線

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 8 - 3 \times 3 \times \pi \times \frac{1}{2} = 24 - \frac{9\pi}{2}$$



8. 如圖， PA 、 PB 分別切圓 O 於 A 、 B 兩點，若 $PA = 24$ ， $PC = 18$

則四邊形 $AOBP$ 面積 = ?

設 $AO = BO = CO = r$

$$\Rightarrow PO = r + 18$$

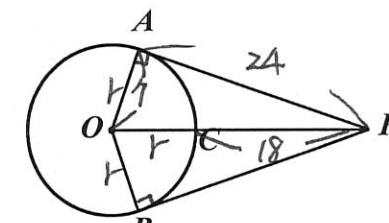
$$r^2 + 24^2 = (r + 18)^2$$

$$r^2 + 576 = r^2 + 36r + 324$$

$$252 = 36r \Rightarrow r = 7$$

$$AOBP \text{ 面} = 2 \triangle AOP$$

$$= 2 \times \frac{1}{2} \times 7 \times 24 = 168$$



9. 如下圖， P 為圓 O 外一點， PM 與 PN 為圓 O 的切線， M 、

N 為切點。已知圓 O 半徑為 4 公分， $OP = 8$ 公分，求

(1) 四邊形 $OMPN$ 的周長 (2) $\angle MPN = ?$ (3) $MN = ?$

$$(1) MP = \sqrt{8^2 - 4^2}$$

$$= \sqrt{48}$$

$$= 4\sqrt{3}$$

$$(2)$$

$$\therefore MO \perp MP \perp OP$$

$$= 1 : \sqrt{3} = 2$$

$$\therefore \angle MPO = 30^\circ$$

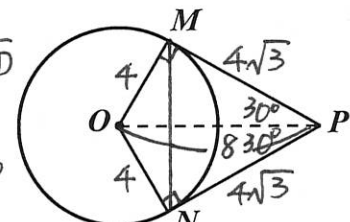
$$\Rightarrow 2(4 + 4\sqrt{3})$$

$$= 8 + 8\sqrt{3}(\text{cm})$$

$$\Rightarrow \angle MPN = 30^\circ \times 2 = 60^\circ$$

$$(3) \therefore PM = PN \Rightarrow \triangle PMN \text{ 為正}\triangle$$

$$\text{又 } \angle MPN = 60^\circ \Rightarrow MN = MP = 4\sqrt{3}(\text{cm})$$



10. 半徑為 9 公分的圓，圓外一點 P 到此圓的切線段長 12 公

分，則 P 點到此圓上之點的最短距離與最長距離為何？

如圖，最短為 BP 最長為 CP

$$OP = \sqrt{9^2 + 12^2}$$

$$= 15$$

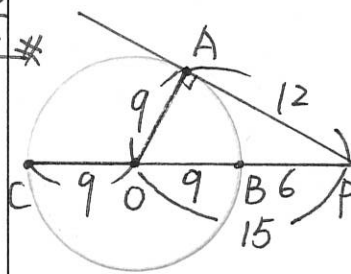
$$\Rightarrow BP = 15 - 9$$

$$= 6(\text{cm})$$

$$CP = CO + OP$$

$$= 9 + 15$$

$$= 24(\text{cm})$$



11. 兩圓半徑為 5 與 9，求下列情況連心線長 O_1O_2 的值或範圍

$$(1) \text{ 外離: } O_1O_2 > 14$$

$$(2) \text{ 外切: } O_1O_2 = 14$$

$$(3) \text{ 相交兩點: } 4 < O_1O_2 < 14$$

$$(4) \text{ 內切: } O_1O_2 = 4$$

$$(5) \text{ 內離: } 0 \leq O_1O_2 < 4$$

$$(6) \text{ 同心圓: } O_1O_2 = 0$$

12. 已知圓 O_1 與圓 O_2 的連心線段長為 8，若圓 O_1 與圓 O_2 的半徑分別如下，請判斷兩圓位置關係各為何？

O_1 半徑	1	5	5	20	18
O_2 半徑	6	8	3	12	7
兩圓關係	外離	交兩點	外切	內切	內離

$$8 > 6 + 1 \quad 8 < 8 + 5 \quad 8 = 5 + 3 \quad 8 = 20 - 12 \quad 0 \leq 8 < 18 - 7$$

13. 有大小兩圓，當兩圓外切時，兩圓的連心線段長為 28；當兩圓內切時，兩圓的連心線段長為 16，則大小兩圓的半徑分別是多少？

設大半徑 R ，小半徑 r

$$\text{外切} \Rightarrow R+r=28 \quad \text{--- (1)}$$

$$\text{內切} \Rightarrow R-r=16 \quad \text{--- (2)}$$

$$\text{(1)+(2)} \quad 2R=44 \quad R=22 \text{ 代入 (1)}$$

14. 大小兩圓，其面積比為 9:16，當兩圓外切時，其連心線段的長是 21cm，求兩圓內切時之連心線段長？

設大半徑 R ，小半徑 r

$$R=21 \times \frac{4}{7} = 12$$

$$R^2 \pi : r^2 \pi = 16:9$$

$$r=21 \times \frac{3}{7} = 9$$

$$R^2 : r^2 = 16:9$$

$$\Rightarrow 12-9=3(\text{cm})$$

$$\Rightarrow R-r=\sqrt{16}-\sqrt{9}=4-3$$

15. 圖兩圓內切，其半徑之比為 3:5，連心線段長是 6，求斜線部分面積 = ?

設兩半徑 $3r, 5r$

$\therefore$ 內切

$$\therefore 5r-3r=6$$

$$r=3$$

$$\text{大半徑} = 5 \times 3 = 15$$

$$\text{小半徑} = 3 \times 3 = 9$$

$\Rightarrow$ 斜線 = 大圓 - 小圓

$$= 15^2 \pi - 9^2 \pi$$

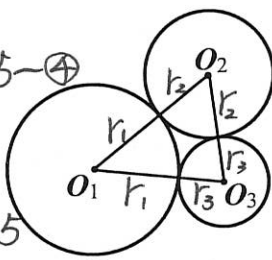
$$= 225\pi - 81\pi = 144\pi$$

16. 如圖，三個圓兩兩外切，若 $O_1O_2=12$ 、 $O_2O_3=8$ 、 $O_1O_3=10$ ，求三個圓的半徑

設三圓半徑 r_1, r_2, r_3

$$\begin{cases} r_1+r_2=12 \quad \text{--- (1)} \\ r_2+r_3=8 \quad \text{--- (2)} \\ r_1+r_3=10 \quad \text{--- (3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1+r_2+r_3=15 \quad \text{--- (4)} \\ \text{(4)-(1)} \quad r_3=3 \\ \text{(4)-(2)} \quad r_1=7 \\ \text{(4)-(3)} \quad r_2=5 \end{cases}$$



$$\text{(1)+(2)+(3)} \quad 2r_1+2r_2+2r_3=30$$

$$A: O_1: 7, O_2: 5, O_3: 3$$

17. 如圖，圓 O_1 與圓 O_2 內切，圓 O_1 與圓 O_3 內切，圓 O_2

與圓 O_3 外切，若 $O_1O_2=2$ 、 $O_2O_3=7$

$O_1O_3=3$ ，求三個圓的半徑

設三圓半徑 r_1, r_2, r_3

$$O_1, O_2 \text{ 內切} \Rightarrow r_1-r_2=2 \quad \text{--- (1)}$$

$$O_1, O_3 \text{ 內切} \Rightarrow r_1-r_3=3 \quad \text{--- (2)}$$

$$O_2, O_3 \text{ 外切} \Rightarrow r_2+r_3=7 \quad \text{--- (3)}$$

$$\text{(1)+(2)} \quad 2r_1=5 \Rightarrow r_1=2.5 \text{ 代入 (1)}$$

18. 如圖，圓 O_1 、 O_2 的半徑分別為 4、6，兩圓相交於 P 、 Q 兩點，且 $\angle O_1PO_2=90^\circ$ ，求 (1) O_1O_2 = ? (2) PQ = ?

$$(1) \quad O_1O_2 = \sqrt{4^2+6^2}$$

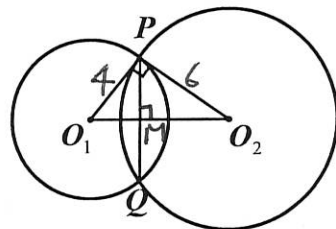
$$= \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$$

$$(2) \text{ 如圖 } PM = \frac{4 \times 6}{2\sqrt{13}}$$

$$= \frac{12\sqrt{13}}{13}$$

$$\Rightarrow PQ = 2 \times \frac{12\sqrt{13}}{13}$$

$$= \frac{24\sqrt{13}}{13}$$



19. 圓 O_1 與圓 O_2 的圓心坐標分別為 $(-2, 1)$ 與 $(3, -2)$ ，半徑分別為 2.5 與 3，則兩圓的位置關係為何？

$$O_1O_2 = \sqrt{(-2-3)^2 + (1-(-2))^2}$$

$$= \sqrt{25+9}$$

$$= \sqrt{34}$$

$$= 5.8 \dots$$

$$\therefore O_1O_2 > 2.5+3$$

$\therefore$ 兩圓外離

20. 圓 O_1 的半徑為 10 公分，圓 O_2 的半徑為 6 公分，且 $O_1O_2=18$ 公分， A 、 B 分別為外公切線切兩圓的切點，

則 AB = ?

$$\text{如圖 } AC=BO_2=6$$

$$\Rightarrow CO_1 = AO_1 - AC$$

$$= 10-6=4$$

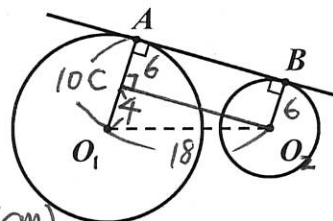
$$CO_2 = \sqrt{18^2 - 4^2}$$

$$= \sqrt{308}$$

$$= 2\sqrt{77}$$

$$\Rightarrow AB = CO_2$$

$$= 2\sqrt{77}(\text{cm})$$



21. 直線 AB 切圓 O_1 、圓 O_2 於 A 、 B 兩點，且圓 O_1 半徑為 4，圓 O_2 半徑為 2， $O_1O_2=10$ ，則 AB = ?

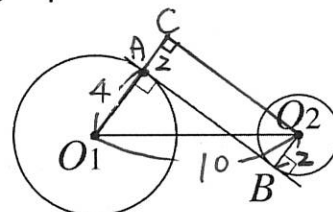
$$\text{如圖 } AC=BO_2=2$$

$$AB=CO_2$$

$$\Rightarrow CO_1 = AO_1 - AC$$

$$= 4-2=2$$

$$CO_2 = \sqrt{10^2 - 2^2} = 8$$



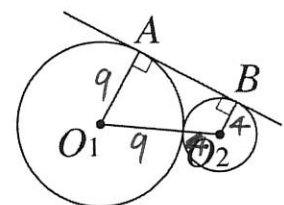
22. 直線 AB 切圓 O_1 、圓 O_2 於 A 、 B 兩點，圓 O_1 、圓 O_2 外切，且圓 O_1 半徑為 9，圓 O_2 半徑為 4，則 AB = ?

$$O_1O_2 = 9+4=13$$

$$AB = \sqrt{13^2 - (9-4)^2}$$

$$= \sqrt{169-25}$$

$$= \sqrt{144} = 12$$



23. 如右圖，圓 O_1 和圓 O_2 外切於 C 點， A 、 B 分別為外公切線 L 切兩圓的切點

(1) $\angle ACB$ = ?

(2) 若圓 O_1 和 O_2 的半徑分別為 5、3，

則 $AC^2 + BC^2$ = ?

(1) 作兩圓的內公切線 CD

$$\therefore DA=DC \quad DB=DC$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4$$

$$\text{又 } \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2\angle 2 + 2\angle 3 = 180^\circ$$

$$\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$$

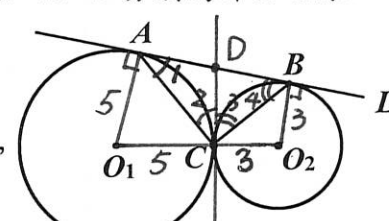
$$\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$$

$$(2) \quad O_1O_2 = 5+3=8$$

$$AB = \sqrt{8^2 - (5-3)^2}$$

$$= \sqrt{60} = 2\sqrt{15}$$

$$= AC+BC$$



24. 如圖，有三個半圓及一個小圓，大半圓直徑為 16，兩個小半圓的直徑皆為 8，而小圓與兩個小半圓外切和大半圓內切，求小圓的直徑。

設小圓 O_3 半徑 r

$$\therefore AO_1 = \frac{16}{2} = 8$$

$$\therefore O_1O_3 = 8-r$$

$$\text{又 } O_1O_2 = \frac{16}{2} = 8$$

$$O_2O_3 = r+4$$

$$4^2 + (8-r)^2 = (r+4)^2$$

$$16 + 64 - 16r + r^2 = r^2 + 8r + 16$$

$$24r = 64 \quad r = \frac{8}{3}$$

