2-2 圓心角、圓周角與弦切角

1 圓心角及其所對的弧

對應能力指標 9-s-06

我們曾經學過弧的表示法與圓心角的概念，如圖 2-24，圓上的 A、B 兩點將圓周分成兩個弧，小於半圓的弧稱為**劣弧**，以 $\overset{\frown}{AB}$ 表示。大於半圓的弧稱為**優弧**，通常會在弧上加一點 C，以 $\overset{\frown}{ACB}$ 表示。其中 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓心角為 $\angle 1$，$\overset{\frown}{ACB}$ 所對的圓心角為 $\angle 2$。

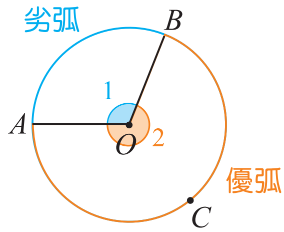


圖 2-24

如圖 2-25，把兩個量角器拼成一個圓，可以觀察到，整個圓周被分成 360 等分的弧，其中每一等分的弧所對的圓心角剛好是 1°，我們就稱每一等分弧的度數為 1°。因此，x° 的圓心角所對弧的度數為 x°。在圖 2-25 中，$\angle AOB=50^\circ$，所以 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數 $=\angle AOB=50^\circ$。

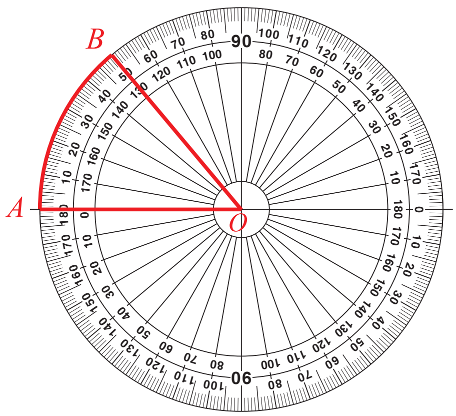


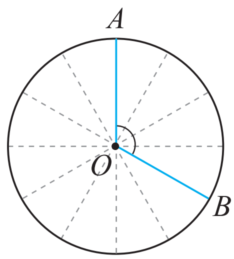
圖 2-25

弧的度數

弧的度數就是該弧所對圓心角的度數。

隨堂練習

如圖，將一圓分成 12 等分，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數。



$\overset{\frown}{AB}$ 的度數 $=\angle AOB=360^\circ\times\dfrac{4}{12}=120^\circ$。

$\overset{\frown}{AB}$ 除了可以表示圖形本身，也可以有下列兩種意義：
(1) $\overset{\frown}{AB}$ 的度數；(2) $\overset{\frown}{AB}$ 的長度。

在同圓或等圓中，如果兩個弧的圓心角皆為 $x°$，則這兩個弧的長度皆等於圓周長的 $\frac{x}{360}$。

等圓心角對等弧

在同圓或等圓中，度數相等的兩弧等長；反之，如果兩弧等長，則它們所對的圓心角相等。

如圖 2-26、圖 2-27，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 為圓 O 上的兩弦，

(1) 已知 $\angle AOB=\angle COD$，那麼 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 是否等長呢？

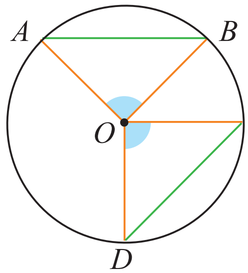


圖 2-26

說明　在 $\triangle AOB$ 與 $\triangle COD$ 中，
$\because \overline{OA}=\overline{OC}$，$\overline{OB}=\overline{OD}$（圓 O 的半徑），
$\angle AOB=\angle COD$（已知），
$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$（$SAS$ 全等性質），
因此 $\overline{AB}=\overline{CD}$（對應邊相等）。

(2) 已知 $\overline{AB}=\overline{CD}$，那麼 $\angle AOB$、$\angle COD$ 是否相等呢？

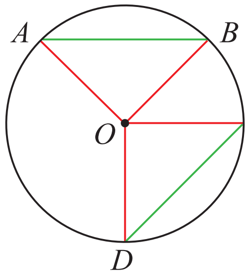


圖 2-27

說明　在 $\triangle AOB$ 與 $\triangle COD$ 中，
$\because \overline{OA}=\overline{OC}$，$\overline{OB}=\overline{OD}$（圓 O 的半徑），
$\overline{AB}=\overline{CD}$（已知），
$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$（$SSS$ 全等性質），
因此 $\angle AOB=\angle COD$（對應角相等）。

等圓心角對等弦

在同圓或等圓中，如果兩圓心角相等，則它們所對的弦等長；反之，如果兩弦等長，則它們所對的圓心角相等。

由「**等圓心角對等弧**」、「**等圓心角對等弦**」可以得到下面結論：

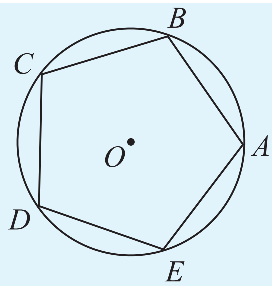
等弦對等弧

在同圓或等圓中，如果兩弧的度數相等，則它們所對的弦等長；反之，如果兩弦等長，則它們所對的弧度數相等。

例 1 弧的度數

搭配習作 P29 基礎題 1

如圖，正五邊形 $ABCDE$ 的頂點均在圓 O 上，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數。



解 $\because ABCDE$ 為正五邊形，

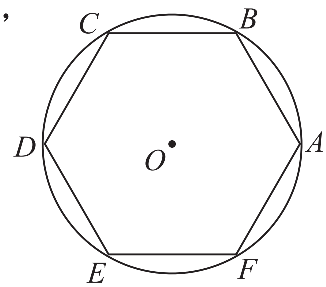
$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{AE}$，

可得 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{AE}$，

故 $\overset{\frown}{AB}=\dfrac{360^\circ}{5}=72^\circ$。

隨堂練習

如圖，已知正六邊形 $ABCDEF$ 的頂點均在圓 O 上，求 $\overset{\frown}{AC}$ 的度數。



$\because ABCDEF$ 為正六邊形，

$\therefore \overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FA}$，

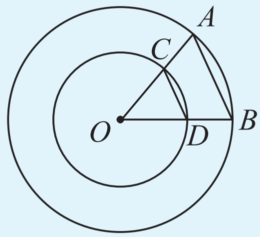
可得 $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EF}=\overset{\frown}{FA}$，

故 $\overset{\frown}{AC}=360^\circ\times\dfrac{2}{6}=120^\circ$。

若兩圓的半徑不同時，度數相等的圓心角所對的弧長並不相等，那麼半徑與弧、弦有什麼關係呢？

例 2 半徑與弦、弧的關係

如圖，兩同心圓中，大圓的半徑為 5，小圓的半徑為 3，$\angle AOB=50^\circ$，求：



(1) $\overset{\frown}{AB}$ 的度數：$\overset{\frown}{CD}$ 的度數。

(2) $\overset{\frown}{AB}$ 的長度：$\overset{\frown}{CD}$ 的長度。

(3) $\overline{AB}$：$\overline{CD}$ 。

解

(1) $\because \overset{\frown}{AB}$ 的度數 $=\angle AOB=50^\circ$，

$\overset{\frown}{CD}$ 的度數 $=\angle COD=50^\circ$，

$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 的度數：$\overset{\frown}{CD}$ 的度數 $=50^\circ：50^\circ=1：1$。

(2) $\overset{\frown}{AB}$ 的長度：$\overset{\frown}{CD}$ 的長度 $=(\cancel{2}\times 5\times \cancel{\pi}\times \cancel{\frac{50}{360}}):(\cancel{2}\times 3\times \cancel{\pi}\times \cancel{\frac{50}{360}})$

$=5：3$。

(3) 在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中，

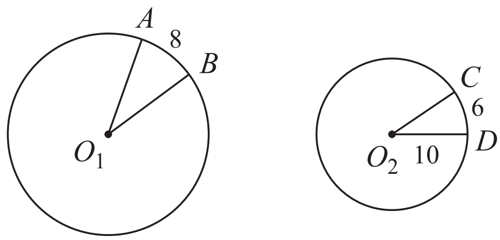
$\because \angle AOB=\angle COD$，$\overline{OA}：\overline{OC}=\overline{OB}：\overline{OD}=5：3$，

$\therefore \triangle AOB\sim\triangle COD$（$SAS$ 相似性質），

故 $\overline{AB}：\overline{CD}=5：3$（對應邊成比例）。

隨堂練習

如圖，已知 $\overset{\frown}{AB}$ 的長度為 8，$\overset{\frown}{CD}$ 的長度為 6，圓 O_2 的半徑為 10，且 $\angle AO_1B=\angle CO_2D$，求圓 O_1 的半徑。



設圓 O_1 的半徑為 r_1，圓 O_2 的半徑為 r_2，

$\because \angle AO_1B=\angle CO_2D$，

$\therefore \overset{\frown}{AB}$ 的長度：$\overset{\frown}{CD}$ 的長度 $=r_1：r_2$

$8：6=r_1：10$，$r_1=\frac{40}{3}$

故圓 O_1 的半徑為 $\frac{40}{3}$。

2 圓周角及其所對的弧

對應能力指標 9-s-06

圓上一點和通過此點的兩弦所形成的角稱為**圓周角**。如圖 2-28，A 為圓上一點，$\angle BAC$ 為兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 所形成的角，則 $\angle BAC$ 為 $\overset{\frown}{BC}$ 所對的圓周角，而 $\overset{\frown}{BC}$ 為 $\angle BAC$ 所對的弧。

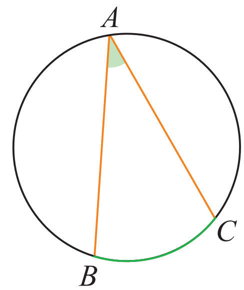
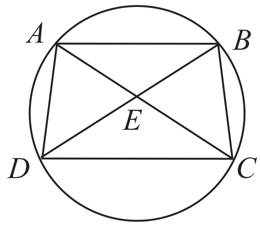


圖 2-28

隨堂練習

在右圖中，$\overset{\frown}{BC}$ 所對的圓周角有哪些？



$\angle BAC$ 與 $\angle BDC$。

前面學過，圓心角的度數等於它所對弧的度數，那麼圓周角的度數和它所對弧的度數有沒有類似的關係呢？

下面依照一個圓的圓心和圓周角的三種位置關係討論：

1 圓心 O 在圓周角 $\angle A$ 的一邊上時：

如圖 2-29，連接 $\overline{OC}$。

$\because \overline{OA}=\overline{OC}$，$\therefore \angle C=\angle A$。

因此 $\angle BOC=\angle A+\angle C$（外角定理）

$=2\angle A$

故 $\angle A=\dfrac{1}{2}\angle BOC=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。

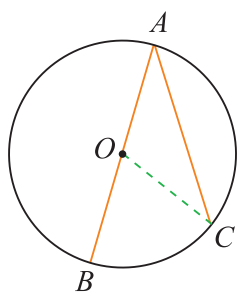


圖 2-29

② 圓心 O 在圓周角 $\angle BAC$ 的內部時：

如圖 2-30，作直徑 $\overline{AD}$。

根據 ① 的結果，可推得：

$\angle BAD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$，$\angle CAD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$，

因此 $\angle BAC=\angle BAD+\angle CAD$

$$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$$

$$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}+\overset{\frown}{CD})$$

$$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

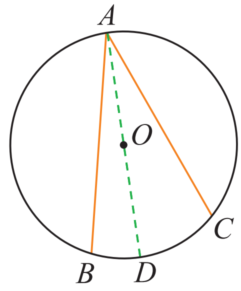


圖 2-30

③ 圓心 O 在圓周角 $\angle BAC$ 的外部時：

如圖 2-31，作直徑 $\overline{AD}$。

根據 ① 的結果，可推得：

$\angle BAD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$，$\angle CAD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$，

因此 $\angle BAC=\angle BAD-\angle CAD$

$$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$$

$$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{CD})$$

$$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$$

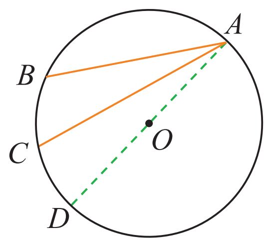
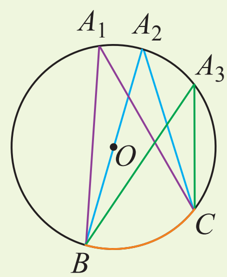


圖 2-31

圓周角的度數

1. 一弧所對的圓周角度數，等於此弧度數的一半，也是該弧所對圓心角度數的一半。
2. 同一個圓中，一弧所對的所有圓周角的度數都相等。

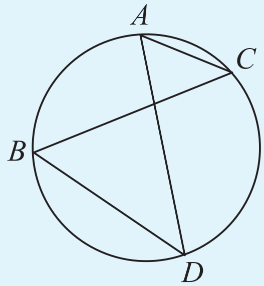
如圖，$\angle A_1=\angle A_2=\angle A_3=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。



例 3 求圓周角

如圖，已知 $\overset{\frown}{AB}$ 長是圓周長的$\dfrac{1}{4}$，

求$\angle ACB$與$\angle ADB$。



解

$\because \overset{\frown}{AB}$ 長是圓周長的$\dfrac{1}{4}$，

$\therefore \overset{\frown}{AB}=\dfrac{1}{4}\times 360^\circ=90^\circ$，

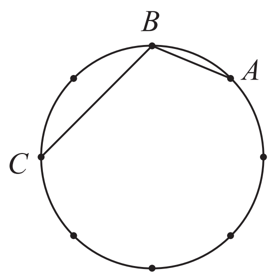
又$\angle ACB$和$\angle ADB$均為 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角，

$\therefore \angle ACB=\angle ADB=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

$=\dfrac{1}{2}\times 90^\circ=45^\circ$。

隨堂練習

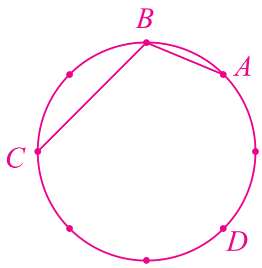
1. 如圖，A、B、C為圓上 8 個等分點中的 3 個點，求$\angle ABC$。



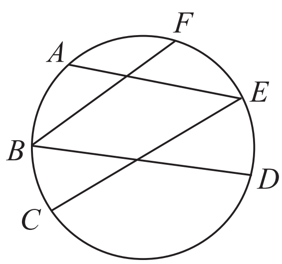
$\angle ABC=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{ADC}$

$=\dfrac{1}{2}\times\left(360^\circ\times\dfrac{5}{8}\right)$

$=\dfrac{225^\circ}{2}$。



2. 如圖，A、B、C、D、E、F為圓上六個點，已知 $\overset{\frown}{AF}=60^\circ$，$\overset{\frown}{CD}=130^\circ$，求$\angle B+\angle E$。



$\angle B=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{FE}+\overset{\frown}{ED})$，$\angle E=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC})$，

$\angle B+\angle E=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{FE}+\overset{\frown}{ED}+\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC})$

$=\dfrac{1}{2}(360^\circ-\overset{\frown}{AF}-\overset{\frown}{CD})$

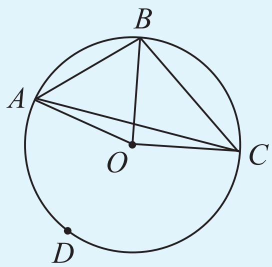
$=\dfrac{1}{2}(360^\circ-60^\circ-130^\circ)=85^\circ$。

例 4 由圓周角求弧度

如圖，$\triangle ABC$ 的頂點均在圓 O 上，

已知 $\angle BAC=45^\circ$，$\angle ABC=100^\circ$，

求 $\overset{\frown}{BC}$ 與 $\overset{\frown}{ABC}$ 的度數。



解

(1) $\because \angle BAC$ 為 $\overset{\frown}{BC}$ 所對的圓周角，

$\therefore \angle BAC=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$，

$\overset{\frown}{BC}=2\angle BAC=2\times 45^\circ=90^\circ$。

(2) $\because \angle ABC$ 為 $\overset{\frown}{ADC}$ 所對的圓周角，

$\therefore \angle ABC=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{ADC}$，

$\overset{\frown}{ADC}=2\angle ABC=2\times 100^\circ=200^\circ$，

即 $\overset{\frown}{ABC}=360^\circ-\overset{\frown}{ADC}$

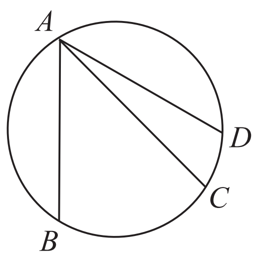
$=360^\circ-200^\circ$

$=160^\circ$。

隨堂練習

如圖，A、B、C、D 為圓上四個點，已知 $\angle BAD=60^\circ$，

$\overset{\frown}{BC}=90^\circ$，求 $\overset{\frown}{CD}$ 的度數。



$\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{BCD}-\overset{\frown}{BC}$

$=2\angle BAD-90^\circ$

$=2\times 60^\circ-90^\circ$

$=30^\circ$。

前面學過，一弧所對的圓周角度數，等於此弧度數的一半，如圖 2-32 中，當 $\overline{AB}$ 為直徑時，$\overset{\frown}{AB}=180^\circ$，故圓周角 $\angle ACB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\times180^\circ=90^\circ$。

又 $\angle ACB$、$\angle ADB$ 與 $\angle AEB$ 皆為 $\overset{\frown}{AB}$ 所對的圓周角，

$\therefore \angle ACB=\angle ADB=\angle AEB=90^\circ$。

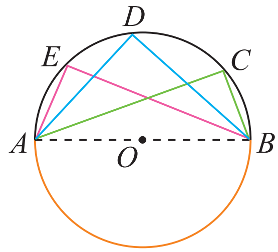


圖 2-32

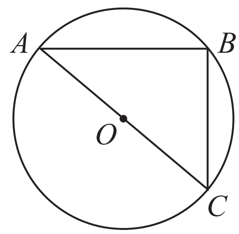
半圓的圓周角

搭配習作 P29 基礎題 2、3

半圓所對的圓周角是直角。

隨堂練習

1. 如圖，$\overline{AC}$ 為圓 O 的直徑，B 為圓周上一點，若 $\angle BAC=40^\circ$，求 $\angle ACB$。



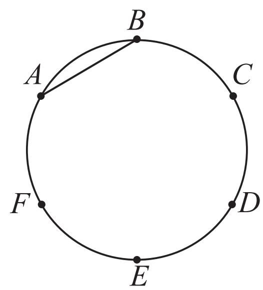
$\because \overline{AC}$ 為直徑，

$\therefore \angle ABC=90^\circ$，

故 $\angle ACB=90^\circ-40^\circ$

$=50^\circ$。

2. 如圖，A、B、C、D、E、F 為圓上 6 個等分點，請作出所有以 $\overline{AB}$ 為一邊，且頂點皆在圓上的直角三角形。



連接 $\overline{AD}$、$\overline{BD}$，

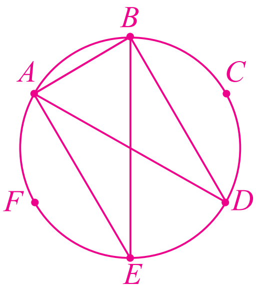
$\because \overline{AD}$ 為直徑，

$\therefore \triangle ABD$ 為直角三角形，

連接 $\overline{AE}$、$\overline{BE}$，

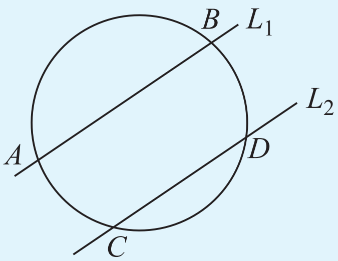
$\because \overline{BE}$ 為直徑，

$\therefore \triangle ABE$ 為直角三角形。



例 5 平行線截等弧

如圖，兩條平行線 L_1 和 L_2 在圓上截出 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BD}$，說明 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$。



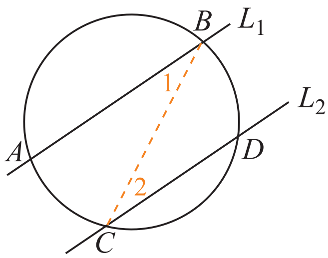
說明 如圖，連接 $\overline{BC}$。

$\because L_1 /\!/ L_2$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$（內錯角相等）。

$\angle 1=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，$\angle 2=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$，

故 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$。

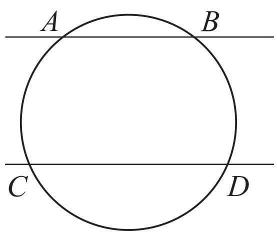


平行線截等弧

若兩條直線平行，則此兩條平行線在圓上所截出的兩弧度數相等。

隨堂練習

如圖，若 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BD}$ 的度數相等，說明 $\overleftrightarrow{AB} /\!/ \overleftrightarrow{CD}$。

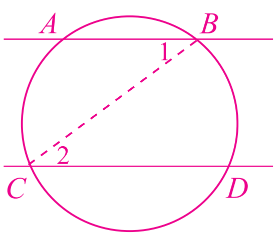


連接 $\overline{BC}$，

$\because \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$，

$\therefore \angle 1=\angle 2$，

故 $\overleftrightarrow{AB} /\!/ \overleftrightarrow{CD}$。



3 圓內接四邊形

對應能力指標 9-s-06

如圖 2-33，在圓上依序任取 A、B、C、D 四個點，連接 $\overline{AB}$、$\overline{BC}$、$\overline{CD}$、$\overline{DA}$，則四邊形 $ABCD$ 稱為圓 O 的**內接四邊形**，而圓 O 稱為四邊形 $ABCD$ 的**外接圓**。

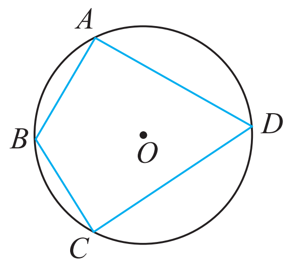
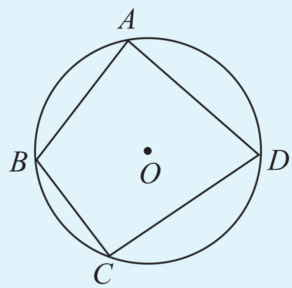


圖 2-33

接著討論圓內接四邊形的一些性質。

例 6 圓內接四邊形對角互補

如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，說明 $\angle A+\angle C=180^\circ$，$\angle B+\angle D=180^\circ$。



說明 $\because \angle A$ 所對的弧為 $\overset{\frown}{BCD}$，$\angle C$ 所對的弧為 $\overset{\frown}{BAD}$，

$$\begin{aligned}\therefore \angle A+\angle C&=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BCD}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BAD}\\&=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{BCD}+\overset{\frown}{BAD})\\&=\frac{1}{2}\times 360^\circ\\&=180^\circ\end{aligned}$$

同理，$\angle B+\angle D=180^\circ$。

圓內接四邊形

圓內接四邊形的對角互補。

隨堂練習

搭配習作 P30 基礎題 4

1. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，E 點在 $\overline{BC}$ 的延長線上，已知 $\overline{AD} /\!/ \overline{BC}$，$\angle DCE=105^\circ$，求 $\angle A$ 與 $\angle B$。

$\because \overline{AD} /\!/ \overline{BC}$，且 $\angle DCE=105^\circ$，

$\therefore \angle D=105^\circ$，$\angle BCD=180^\circ-105^\circ=75^\circ$，

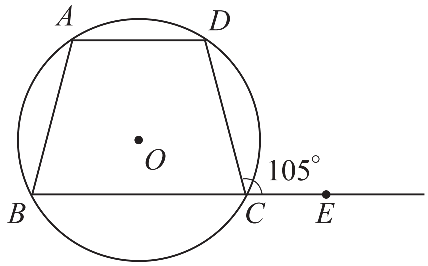
又四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，

$\therefore \angle A=180^\circ-\angle BCD$

$=180^\circ-75^\circ=105^\circ$，

$\angle B=180^\circ-\angle D$

$=180^\circ-105^\circ=75^\circ$。



2. 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，$\angle 1$ 為 $\angle BCD$ 的外角，說明 $\angle A=\angle 1$。

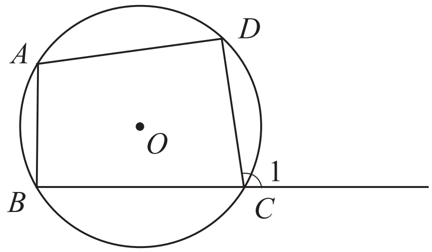
$\because$ 四邊形 $ABCD$ 為圓 O 的內接四邊形，

$\therefore \angle A+\angle BCD=180^\circ$，

又 $\angle 1$ 為 $\angle BCD$ 的外角，

$\therefore \angle 1+\angle BCD=180^\circ$，

故 $\angle A=\angle 1$。



由隨堂練習可知：**圓內接四邊形的任一個外角，等於其相鄰內角的對角**。

圓內接四邊形的判別

由例題 6 可知：圓內接四邊形的對角互補。那麼，對角互補的四邊形 $ABCD$ 是否有外接圓呢？

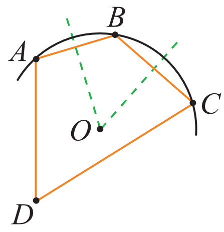


圖 2-34

如圖 2-34，已知四邊形 $ABCD$ 的對角互補，作 $\overline{AB}$ 與 $\overline{BC}$ 的中垂線交於 O 點，

可得 $\overline{OA}=\overline{OB}$、$\overline{OB}=\overline{OC}$（中垂線性質），

所以 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，

因此，以 O 點為圓心，$\overline{OA}$ 為半徑畫圓，則圓 O 必通過 A、B、C 三點。

此時圓 O 也會通過頂點 D 嗎？

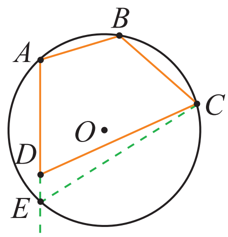


圖 2-35

❶ 若 D 點在圓內，則 $\angle D+\angle B>180^\circ$：

如圖 2-35，延長 $\overline{AD}$ 交圓於 E 點，連接 $\overline{CE}$。

$\because \angle ADC>\angle E$，

$\therefore \angle ADC+\angle B>\angle E+\angle B=180^\circ$。

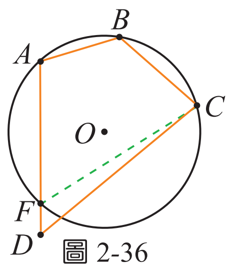


圖 2-36

❷ 若 D 點在圓外，則 $\angle D+\angle B<180^\circ$：

如圖 2-36，設 $\overline{AD}$ 交圓 O 於 F 點，連接 $\overline{CF}$。

$\because \angle AFC>\angle D$，

$\therefore \angle AFC+\angle B=180^\circ>\angle D+\angle B$。

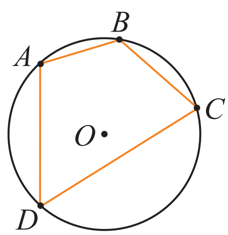


圖 2-37

由❶、❷可知，當 D 點在圓內或圓外時，其結果與四邊形 $ABCD$ 對角互補的條件不合。因此，D 點不在圓內，也不在圓外，故 D 點必在圓 O 上，如圖 2-37。

由上面的討論可知：若四邊形 $ABCD$ 的對角互補，則此四邊形有外接圓。

圓內接四邊形的判別

對角互補的四邊形有外接圓。

要如何畫出通過圓 O 上任一點 P 的切線呢？只要先作 $\overrightarrow{OP}$，再作通過 P 點且與 $\overrightarrow{OP}$ 垂直的直線即可，如圖 2-38。

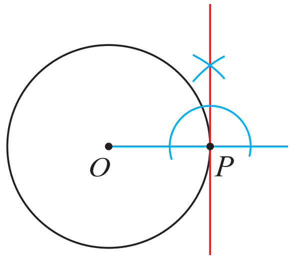
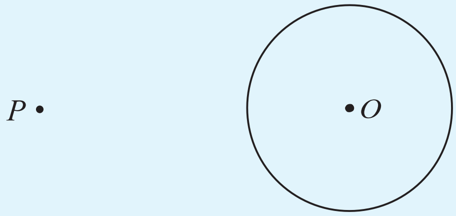


圖 2-38

如果 P 點在圓 O 外，要如何畫出通過 P 點且與圓 O 相切的切線呢？

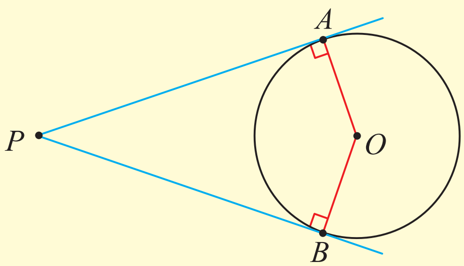
例 7 過圓外一點作圓的切線

如圖，P 為圓 O 外的一點，利用尺規作圖，畫出通過 P 點且與圓 O 相切的直線。



思路分析

如圖，假設 $\overline{PA}$、$\overline{PB}$ 為圓 O 的兩切線段，則 $\overline{OA}\perp\overline{PA}$、$\overline{OB}\perp\overline{PB}$。由「對角互補的四邊形有外接圓」可知，四邊形 $PAOB$ 有外接圓，再由「半圓所對的圓周角是直角」可知，$\overline{PO}$ 為四邊形 $PAOB$ 外接圓的直徑。



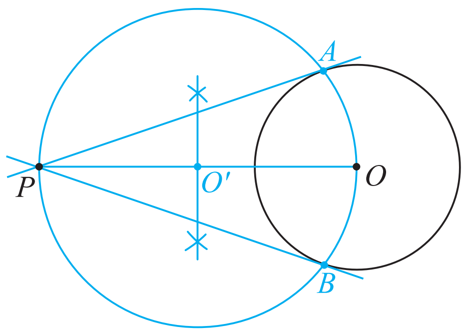
作法

(1)連接 $\overline{OP}$。

(2)以 $\overline{OP}$ 為直徑，作圓 O'，交圓 O 於 A、B 兩點。

(3)連接 $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$。

(4)則 $\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PB}$ 即為所求。



4 弦切角及其所夾的弧

對應能力指標 9-s-06

過圓上同一點的弦和切線所夾的角稱為**弦切角**。如圖 2-39，切線 $\overleftrightarrow{AB}$ 與弦 $\overline{CD}$ 交於 C 點，$\angle BCD$ 與 $\angle ACD$ 皆為弦切角，且稱 $\overset{\frown}{CD}$ 為弦切角 $\angle BCD$ 所夾的弧，$\overset{\frown}{CED}$ 為弦切角 $\angle ACD$ 所夾的弧。

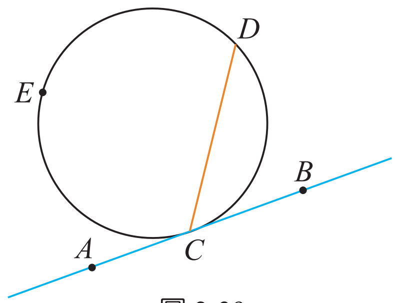


圖 2-39

接下來將學習，弦切角的度數與它所夾弧的度數之間的關係。

一個圓上的弦切角可以其弦是否通過圓心來分類，而有下列兩種情況：

① 弦 $\overline{CD}$ 通過圓心：

如圖 2-40，$\overline{CD}$ 為直徑，因此 $\overset{\frown}{CD}$ 為圓周的一半，也就是 $\overset{\frown}{CD}=180^\circ$，又 $\overleftrightarrow{AB}$ 與圓 O 相切於 C 點，

$\therefore \angle ACD=\angle BCD=90^\circ$，

故 $\angle ACD=\angle BCD=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$。

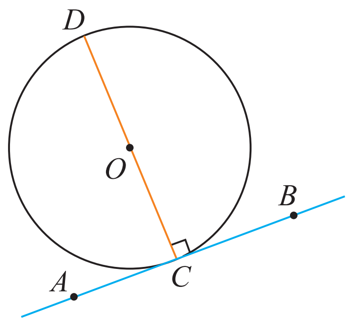


圖 2-40

② 弦 $\overline{CD}$ 不通過圓心：

如圖 2-41，過 C 點作直徑 $\overline{CE}$，

承 ① 知 $\angle BCE=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CDE}$，$\angle ACE=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CFE}$，

$$\angle BCD=\angle BCE-\angle DCE=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CDE}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$$
$$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{CDE}-\overset{\frown}{DE})=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$$

$$\angle ACD=\angle ACE+\angle DCE=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CFE}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{DE}$$
$$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{CFE}+\overset{\frown}{DE})=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CED}$$

故 $\angle BCD=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CD}$，$\angle ACD=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CED}$。

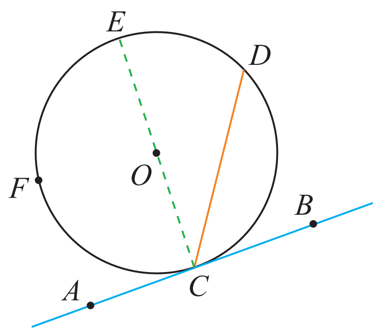


圖 2-41

弦切角的度數

弦切角的度數等於所夾弧度數的一半。

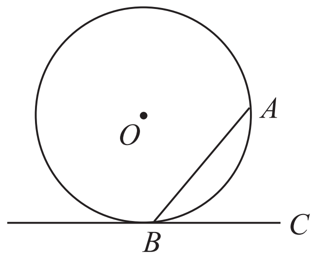
隨堂練習

如圖，$\angle ABC$ 為圓 O 的一個弦切角，

若 $\angle ABC=50^\circ$，求 $\overset{\frown}{AB}$ 的度數。

$\because \angle ABC$ 為弦切角，

$\therefore \overset{\frown}{AB}=2\angle ABC=2\times 50^\circ=100^\circ$。

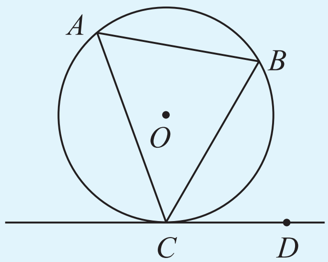


例 8 求弦切角

搭配習作 P30 基礎題 5

如圖，$\overleftrightarrow{CD}$ 與圓 O 相切於 C 點，

已知 $\angle BAC=60^\circ$，求 $\angle BCD$。



解 $\because \angle BAC$ 為圓周角，$\therefore \angle BAC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。

又 $\angle BCD$ 為弦切角，$\therefore \angle BCD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$，

故 $\angle BCD=\angle BAC=60^\circ$。

由例題 8 可知：

如圖 2-42，$\angle BAC$ 為圓周角，$\angle BCD$ 為弦切角，

則 $\angle BAC=\angle BCD=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$。

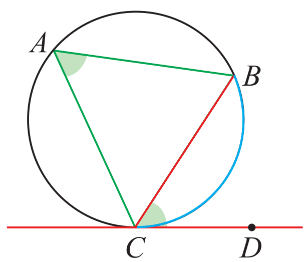


圖 2-42

隨堂練習

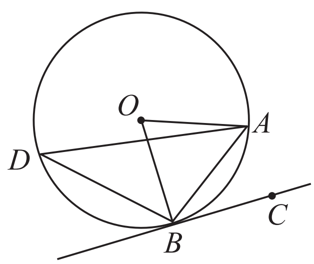
如圖，$\overline{AB}$ 為圓 O 的弦，$\overleftrightarrow{BC}$ 與圓 O 相切於 B 點，

若 $\angle AOB=70^\circ$，求 $\angle ABC$、$\angle ADB$。

$\overset{\frown}{AB}=\angle AOB=70^\circ$，

$\angle ADB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\times 70^\circ=35^\circ$，

$\angle ABC=\angle ADB=35^\circ$。



5 圓內角與圓外角

圓內角

若兩弦交於圓內一點，則此兩弦所形成的交角稱為**圓內角**。如圖 2-43，$\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 分別為圓 O 的兩弦，$\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 交於 P 點，則$\angle APC$、$\angle BPC$、$\angle BPD$、$\angle APD$ 皆為圓內角。

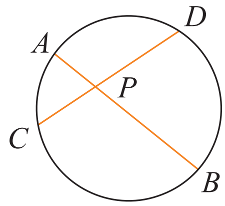


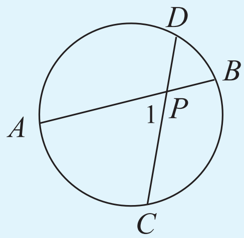
圖 2-43

例 9 求圓內角的度數

搭配習作 P30 基礎題 6

如圖，$\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 兩弦交於圓內一點 P，

說明 $\angle 1=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$。

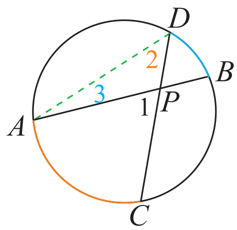


說明 如圖，連接 $\overline{AD}$。

$\because \angle 1$ 為$\triangle APD$ 的外角，

$$\begin{aligned}\therefore \angle 1 &= \angle 2+\angle 3\\ &=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}\\ &=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})。\end{aligned}$$

$\angle 2$ 和$\angle 3$ 所對的弧分別為 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BD}$。



圓內角的度數

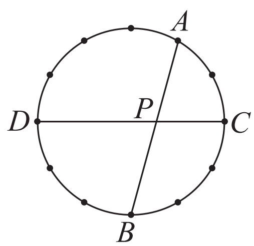
圓內角的度數等於此角及其對頂角所對兩弧的度數和之一半。

隨堂練習

如圖，A、B、C、D 為圓上 12 個等分點中的 4 個點，其中 P 為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CD}$ 的交點，求$\angle APC$。

$\overset{\frown}{AC}=360^\circ\times\dfrac{2}{12}=60^\circ$，$\overset{\frown}{BD}=360^\circ\times\dfrac{3}{12}=90^\circ$，

$\angle APC=\dfrac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})=\dfrac{1}{2}(60^\circ+90^\circ)=75^\circ$。



圓外角

如圖 2-44，若 $\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PB}$ 為圓的割線或切線，且交於圓外一點 P，則 $\angle P$ 稱為**圓外角**。

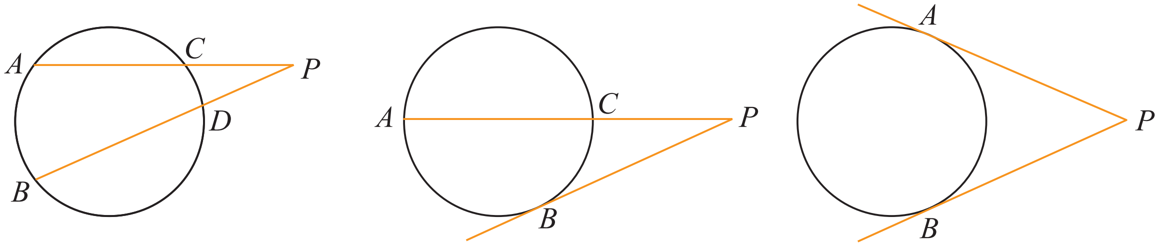
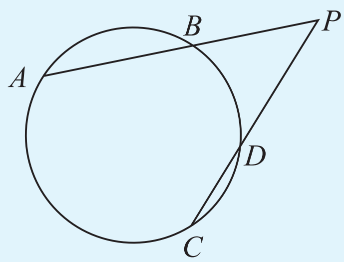


圖 2-44

例 10 求圓外角的度數

如圖，兩割線 $\overleftrightarrow{PA}$、$\overleftrightarrow{PC}$ 交於圓外一點 P，說明 $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})$。



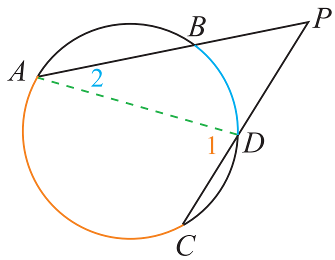
說明 如圖，連接 $\overline{AD}$。

$\because \angle 1$ 為 $\triangle ADP$ 的外角，

$\therefore \angle P=\angle 1-\angle 2$

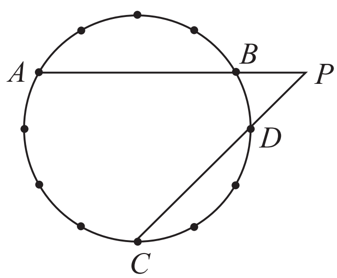
$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}$ ← $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 所對的弧分別為 $\overset{\frown}{AC}$ 和 $\overset{\frown}{BD}$。

$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})$。



隨堂練習

如圖，A、B、C、D 為圓上 12 個等分點中的 4 個點，P 為 $\overleftrightarrow{AB}$ 和 $\overleftrightarrow{CD}$ 的交點，求 $\angle P$。

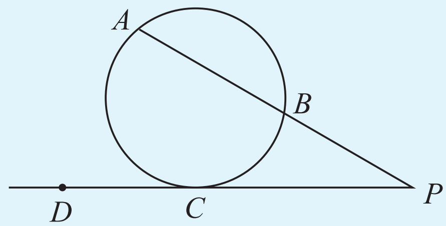


$\overset{\frown}{AC}=360^\circ\times\frac{4}{12}=120^\circ$，$\overset{\frown}{BD}=360^\circ\times\frac{1}{12}=30^\circ$，

$\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BD})=\frac{1}{2}(120^\circ-30^\circ)=45^\circ$。

例 11 求圓外角的度數

如圖，$\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PD}$ 交於圓外一點 P，其中 $\overleftrightarrow{PA}$ 為圓的割線，$\overleftrightarrow{PD}$ 為圓的切線，且與圓相切於 C 點，說明 $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BC})$。



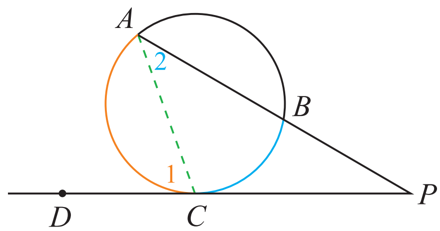
說明 如圖，連接 $\overline{AC}$。

$\because \angle 1$ 為 $\triangle ACP$ 的外角，

$\therefore \angle P=\angle 1-\angle 2$

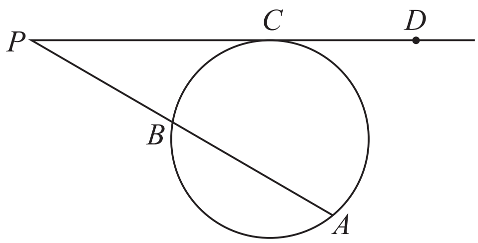
$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}$ ← $\angle 1$ 為弦切角，$\angle 2$ 為圓周角。

$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BC})$。



隨堂練習

如圖，$\overleftrightarrow{PA}$ 與 $\overleftrightarrow{PD}$ 交於圓外一點 P，其中 $\overleftrightarrow{PA}$ 為圓的割線，$\overleftrightarrow{PD}$ 為圓的切線，且與圓相切於 C 點。若 $\overset{\frown}{AC}=140^\circ$，$\overset{\frown}{BC}=80^\circ$，求 $\angle P$。



$\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BC})$

$=\frac{1}{2}(140^\circ-80^\circ)$

$=30^\circ$。

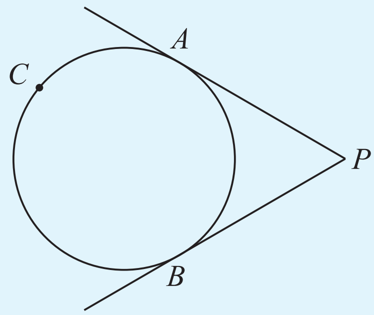
數學小語錄

在天才與勤奮之間，我毫不遲疑的選擇了勤奮，因為它是世間一切成就的催生者。 —— 愛因斯坦（Albert Einstein，1879-1955）

例12 求圓外角的度數

搭配習作 P31 基礎題 7

如圖，$\overleftrightarrow{PA}$ 和 $\overleftrightarrow{PB}$ 分別與圓切於 A、B 兩點，並交於圓外一點 P，說明 $\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AB})$。



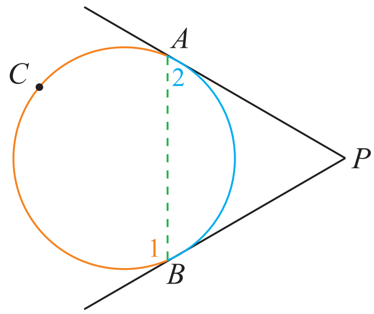
說明 如圖，連接 $\overline{AB}$。

$\because \angle 1$ 為 $\triangle ABP$ 的外角，

$\therefore \angle P=\angle 1-\angle 2$

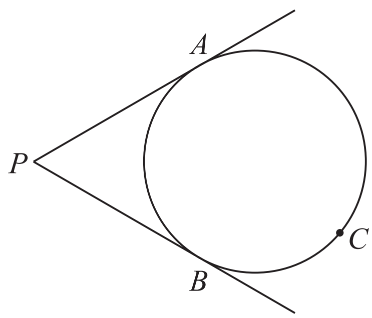
$=\frac{1}{2}\overset{\frown}{ACB}-\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$ ← $\angle 1$ 和 $\angle 2$ 皆為弦切角。

$=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AB})$。



隨堂練習

如圖，$\overleftrightarrow{PA}$ 和 $\overleftrightarrow{PB}$ 分別與圓切於 A、B 兩點，並交於圓外一點 P，若 $\overset{\frown}{ACB}=240^\circ$，求 $\angle P$。



$\overset{\frown}{AB}=360^\circ-\overset{\frown}{ACB}$

$=360^\circ-240^\circ=120^\circ$，

$\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AB})$

$=\frac{1}{2}(240^\circ-120^\circ)=60^\circ$。

圓外角的度數

圓外角的度數等於所對兩弧的度數差之一半。

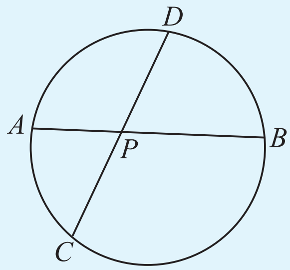
6 圓冪性質

對應能力指標 9-s-03

例13 內冪性質

搭配習作 P31 基礎題 8

如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 交於 P 點，
說明 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$。



說明 連接 $\overline{AC}$、$\overline{BD}$。

在$\triangle ACP$ 與$\triangle DBP$ 中，

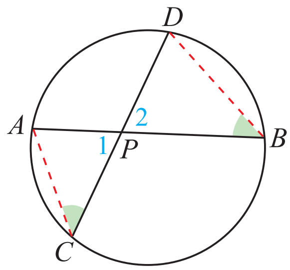
$\because \angle ACP=\angle DBP=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}$，

$\angle 1=\angle 2$（對頂角），

$\therefore \triangle ACP\sim\triangle DBP$（$AA$ 相似性質），

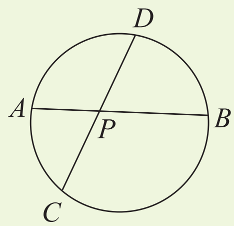
$\overline{PA}:\overline{PD}=\overline{PC}:\overline{PB}$，

故 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$。



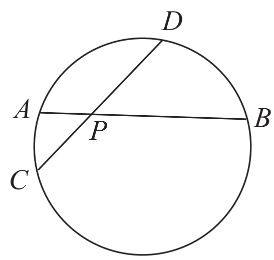
內冪性質

如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 交於 P 點，
則 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$。



隨堂練習

如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 交於 P 點，若 $\overline{PA}=4$，
$\overline{PB}=12$，$\overline{PC}=6$，求 $\overline{PD}$。



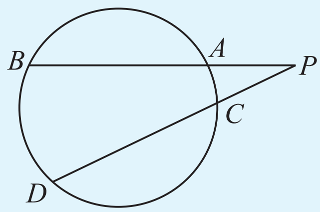
$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

$4\times12=6\times\overline{PD}$

$\overline{PD}=8$。

例 14 外冪性質

如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$，其延長線相交於圓外 P 點，說明 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$。



說明 連接 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$。

在 $\triangle ADP$ 與 $\triangle CBP$ 中，

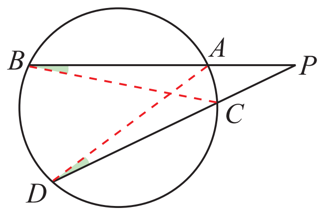
$\because \angle P=\angle P$（公用角），

$\angle ADP=\angle CBP=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，

$\therefore \triangle ADP\sim\triangle CBP$（$AA$ 相似性質），

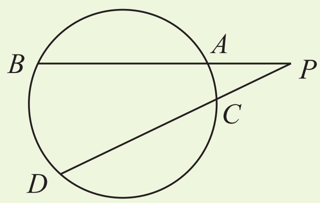
$\overline{PA}:\overline{PC}=\overline{PD}:\overline{PB}$，

故 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$。



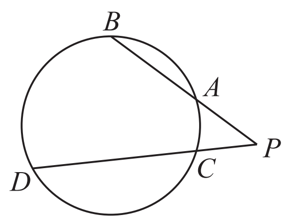
外冪性質

如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$，其延長線相交於圓外 P 點，則 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$。



隨堂練習

如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$，其延長線相交於圓外 P 點，若 $\overline{PA}=5$，$\overline{PB}=12$，$\overline{CD}=11$，求 $\overline{PC}$。



設 $\overline{PC}=x$，

$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

$5\times12=x(x+11)$

$x^2+11x=60$

$(x-4)(x+15)=0$

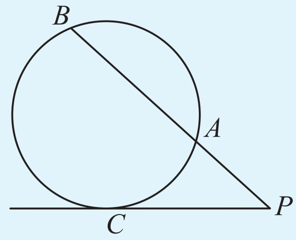
$x=4$ 或 -15（不合）

故 $\overline{PC}=4$。

例 15 切割線性質

搭配習作 P31 基礎題 9

如圖，$\overline{PB}$ 交圓於 A、B 兩點，$\overleftrightarrow{PC}$ 為圓的切線，C 為切點，說明 $\overline{PC}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$。



說明 連接 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$。

在 $\triangle BCP$ 與 $\triangle CAP$ 中，

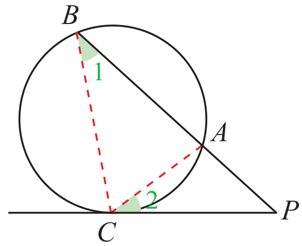
$\because \angle P=\angle P$（公用角），

$\angle 1=\angle 2=\dfrac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$，← $\angle 1$ 為圓周角，$\angle 2$ 為弦切角。

$\therefore \triangle BCP \sim \triangle CAP$（$AA$ 相似性質），

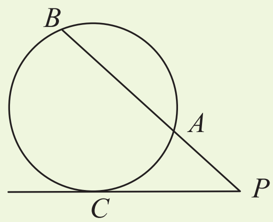
$\overline{PB}:\overline{PC}=\overline{PC}:\overline{PA}$，

故 $\overline{PC}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$。



切割線性質

如圖，$\overline{PB}$ 交圓於 A、B 兩點，$\overleftrightarrow{PC}$ 為圓的切線，C 為切點，則 $\overline{PC}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$。



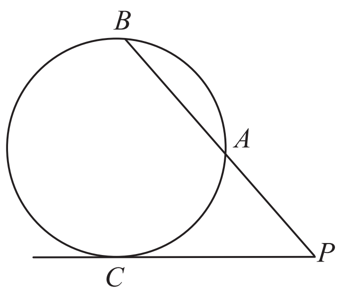
隨堂練習

如圖，$\overline{PB}$ 交圓於 A、B 兩點，$\overleftrightarrow{PC}$ 為圓的切線，C 為切點，若 $\overline{PC}=6$，$\overline{PA}=4$，求 $\overline{AB}$。

$\overline{PC}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$

$6^2=4\times(\overline{AB}+4)$

$\overline{AB}=5$。



重點回顧

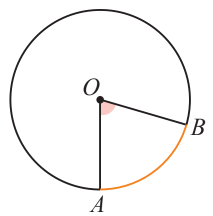
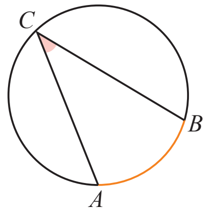
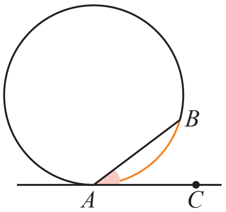
❶ 弧的度數與長度：

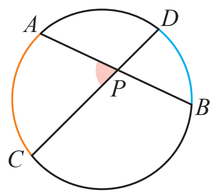
(1)弧的度數等於該弧所對圓心角的度數。

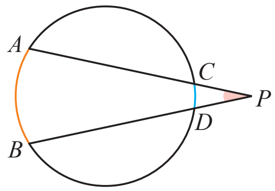
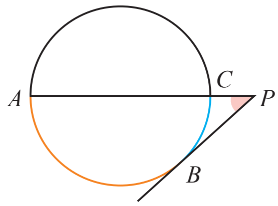
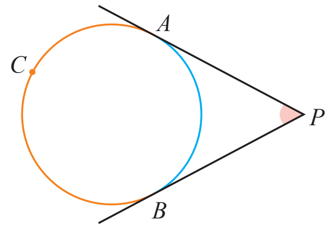
(2)在同圓或等圓中，度數相等的兩弧等長；反之，如果兩弧等長，則它們所對的圓心角相等。

(3)在同圓或等圓中，度數愈大的弧，其弧的長度愈長。

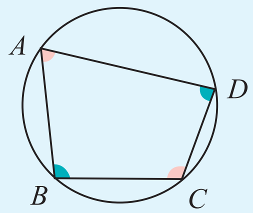
❷ 圓心角、圓周角、弦切角、圓內角、圓外角與弧的關係：

名稱	圓心角	圓周角	弦切角
圖示			
性質	$\angle AOB=\overset{\frown}{AB}$	$\angle ACB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$	$\angle BAC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$

名稱	圓內角
圖示	
性質	$\angle APC=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})$

名稱	圓外角		
圖示			
性質	$\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{CD})$	$\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{BC})$	$\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{ACB}-\overset{\frown}{AB})$

❸ 圓內接四邊形：

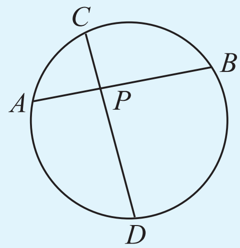


(1)圓內接四邊形的對角互補。

(2)四邊形的對角互補時，此四邊形為圓內接四邊形。

例 如圖，四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形，
則 $\angle A+\angle C=180^\circ$，$\angle B+\angle D=180^\circ$。

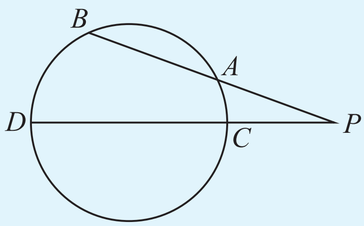
❹ 內冪性質：



如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 交於 P 點，
則 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$。

例 如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 交於 P 點，若 $\overline{PA}=6$，$\overline{PB}=10$，$\overline{PC}=5$，由 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$ 可推得 $\overline{PD}=12$。

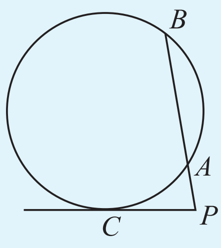
❺ 外冪性質：



如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$，其延長線交於圓外 P 點，則 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$。

例 如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$，其延長線交於圓外 P 點，若 $\overline{PA}=6$，$\overline{PB}=15$，$\overline{PC}=5$，由 $\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$ 可推得 $\overline{PD}=18$。

❻ 切割線性質：



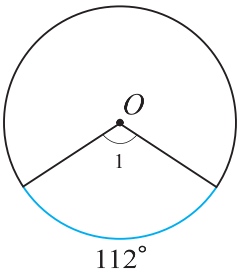
如圖，$\overline{PB}$ 交圓於 A、B 兩點，$\overleftrightarrow{PC}$ 為圓的切線，C 為切點，則 $\overline{PC}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$。

例 如圖，$\overline{PB}$ 交圓於 A、B 兩點，$\overleftrightarrow{PC}$ 為圓的切線，C 為切點，若 $\overline{PA}=4$，$\overline{PB}=16$，由 $\overline{PC}^2=\overline{PA}\times\overline{PB}$ 可推得 $\overline{PC}=8$。

2-2自我評量

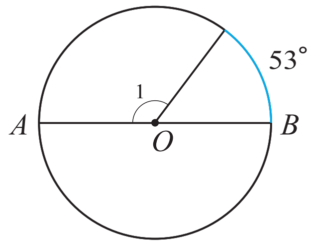
1 求下列各小題中的圓心角∠1。 課 P98 例 1

(1)



∠1＝112°。

(2)



$\overline{AB}$ 為直徑

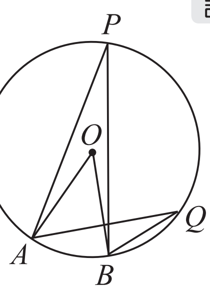
∠1＝180°－53°＝127°。

2 如圖，若 $\overset{\frown}{AB}$ 的長度為圓 O 周長的 $\frac{1}{8}$，求∠AOB、∠APB 和∠AQB。 課 P102 例 3

$\overset{\frown}{AB}$ 的度數＝$360^\circ\times\frac{1}{8}=45^\circ$，

$\angle AOB=\overset{\frown}{AB}=45^\circ$，

$\angle APB=\angle AQB=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}=\frac{1}{2}\times45^\circ=22.5^\circ$。



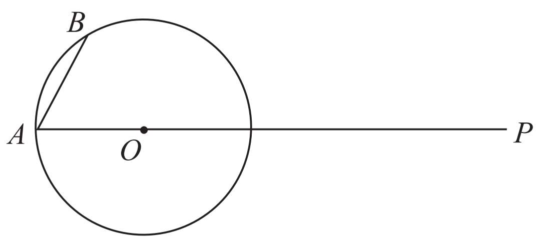
答：$\angle AOB=45^\circ$，$\angle APB=\angle AQB=22.5^\circ$。

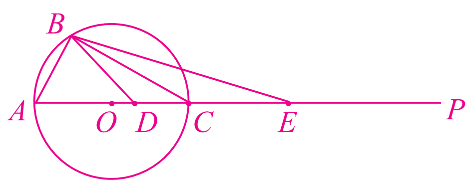
3 如圖，已知 $\overline{AB}$ 是圓 O 的一弦，P 為圓 O 外的一點，$\overline{AP}$ 通過圓心 O，完成下列問題： 課 P104 課文

(1)在 $\overline{AP}$ 上找出一點 C，使得∠ABC 為直角。

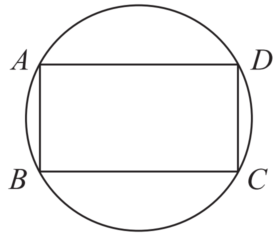
(2)在 $\overline{AP}$ 上找出一點 D，使得∠ABD 為銳角。

(3)在 $\overline{AP}$ 上找出一點 E，使得∠ABE 為鈍角。





4 如圖，圓內接四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，求$\angle A$。 課 P106 例 6



$\because$四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，

$\therefore \angle A=\angle C$，

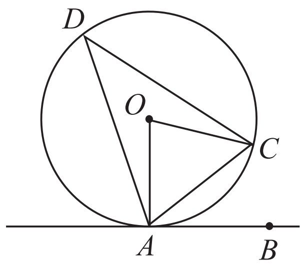
又四邊形 $ABCD$ 為圓內接四邊形，

$\therefore \angle A+\angle C=180^\circ$，

故$\angle A=90^\circ$。

答：90°。

5 如圖，$\overline{AC}$ 為圓 O 的一弦，$\overleftrightarrow{AB}$ 切圓 O 於 A 點，已知$\angle CAB=38^\circ$，求$\angle COA$、$\angle CDA$。 課 P111 隨堂



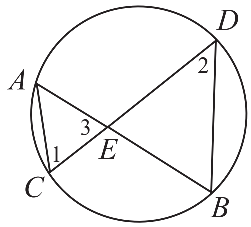
$\because \overleftrightarrow{AB}$ 切圓 O 於 A 點，$\angle CAB=38^\circ$，

$\therefore \angle CDA=\angle CAB=38^\circ$，

$\angle COA=2\angle CAB=2\times 38^\circ=76^\circ$。

答：$\angle COA=76^\circ$，$\angle CDA=38^\circ$。

6 如圖，圓內兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 交於 E 點，$\angle BAC=50^\circ$，$\angle ABD=60^\circ$，求$\angle 1$、$\angle 2$ 及$\angle 3$。 課 P112 隨堂



$\angle 1=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AD}=\angle ABD=60^\circ$，

$\angle 2=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=\angle BAC=50^\circ$，

又 $\overset{\frown}{AD}=2\angle ABD=2\times 60^\circ=120^\circ$，

$\overset{\frown}{BC}=2\angle BAC=2\times 50^\circ=100^\circ$，

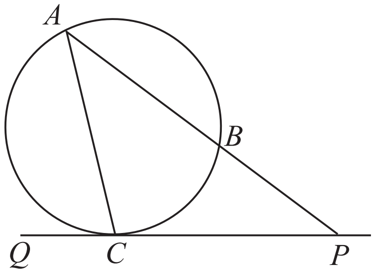
$\therefore \overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}=360^\circ-\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}=360^\circ-120^\circ-100^\circ=140^\circ$，

故$\angle 3=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD})=\frac{1}{2}\times 140^\circ=70^\circ$。

答：$\angle 1=60^\circ$，$\angle 2=50^\circ$，$\angle 3=70^\circ$。

7 如圖，$\overleftrightarrow{PQ}$ 和圓切於 C 點，$\overline{PA}$ 交圓於 A、B 兩點，$\overset{\frown}{AC}=160^\circ$，$\overset{\frown}{BC}=80^\circ$，求 $\angle ACQ$、$\angle A$ 和 $\angle P$。

課 P114 隨堂



$\angle ACQ=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}=\frac{1}{2}\times160^\circ=80^\circ$，

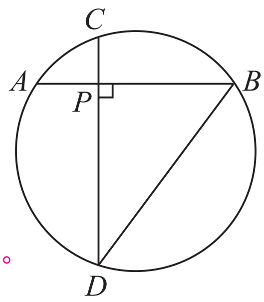
$\angle A=\frac{1}{2}\overset{\frown}{BC}=\frac{1}{2}\times80^\circ=40^\circ$，

$\angle P=\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AC}-\overset{\frown}{BC})=\frac{1}{2}(160^\circ-80^\circ)=40^\circ$。

答：$\angle ACQ=80^\circ$，$\angle A=40^\circ$，$\angle P=40^\circ$。

8 如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$ 交於 P 點，$\overline{AB}\perp\overline{CD}$，若 $\overline{AP}=4$，$\overline{DP}=12$，$\overline{CP}=3$，求 $\overline{BD}$。

課 P116 隨堂



$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

$4\times\overline{PB}=3\times12$

$\overline{PB}=9$

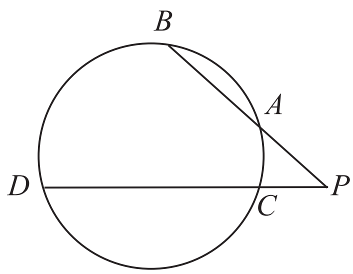
在直角 $\triangle BPD$ 中，

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{PB}^2+\overline{PD}^2}=\sqrt{9^2+12^2}=15$。

答：15。

9 如圖，圓上兩弦 $\overline{AB}$、$\overline{CD}$，其延長線交於圓外 P 點，若 $\overline{AB}=5$，$\overline{PA}=4$，$\overline{CD}=9$，求 $\overline{PD}$。

課 P117 隨堂



設 $\overline{PC}=x$，

$\overline{PA}\times\overline{PB}=\overline{PC}\times\overline{PD}$

$4\times(4+5)=x(x+9)$

$x^2+9x=36$

$(x-3)(x+12)=0$

$x=3$ 或 -12（不合）

故 $\overline{PD}=\overline{PC}+\overline{CD}=3+9=12$。

答：12。