

4-2 平行四邊形

1. 平行四邊形的性質

2. 平行四邊形的判別

GGB
提問

1 平行四邊形的性質

對應能力指標 8-s-13

在第二章中我們知道兩雙對邊分別平行的四邊形，稱為平行四邊形。圖 4-19 的歐洲門是建於西班牙馬德里市的辦公大樓，其外表是利用平行四邊形設計而成。



圖 4-19

本節將利用「平行線的截角性質」和「三角形全等性質」推導出平行四邊形的性質及判別方法。

▶ 平行四邊形的對邊與對角

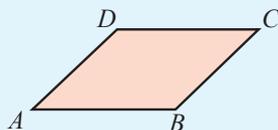
放大例 1 平行四邊形的基本性質 基會

放大
動畫

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，說明：

(1) $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ 。

(2) $\angle A = \angle C$ ， $\angle B = \angle D$ 。



說明 如圖，連接對角線 \overline{BD} 。

解

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle CDB$ 中，

$$\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}, \therefore \angle 1 = \angle 2 \text{ (內錯角相等)},$$

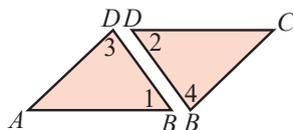
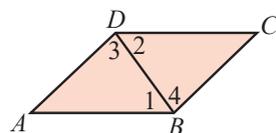
$$\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}, \therefore \angle 3 = \angle 4 \text{ (內錯角相等)},$$

又 $\overline{BD} = \overline{BD}$ (公用邊)，

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle CDB \text{ (ASA 全等性質)}。$$

故 (1) $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC}$ (對應邊)，

$$(2) \angle A = \angle C \text{ (對應角)}, \angle ABC = \angle ADC \text{ (}\angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3\text{)}。$$



由上面的討論可知，平行四邊形中：

(1) 任一條對角線均可將它分成兩個全等的三角形。

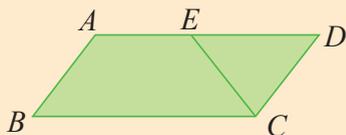
(2) 兩組對邊分別等長；兩組對角分別相等。

加強



會考觀測站 — 加強演練題 搭配例 1

- 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{CD} = \overline{CE}$ ， $\angle A = 128^\circ$ ，則 $\angle AEC =$ 128 度。



教學時數

8小時

活動 1 理解平行四

- 邊形具有下列性質：
- (1) 任一對角線將平行四邊形分成兩個全等三角形。
 - (2) 兩組對邊等長。
 - (3) 兩組對角相等。
 - (4) 兩對角線互相平分。



關鍵提問

- 請說出三角形的全等性質有哪些。

答： SSS 、 SAS 、 ASA 、 AAS 、 RHS 全等性質。



教學眉批

- 例題 1 連接對角線的動機，可以如下發問引導學生：「如果要用三角形的全等說明邊或角的相等，該怎麼做才有兩個全等的三角形呢？」
- 在平行四邊形 $ABCD$ 中， $\triangle ABD$ 與 $\triangle CDB$ 的全等方位不同，顧及圖形學習較弱的學生，可先旋轉成同方位再比較。

基會試題

- 93 基測 I 第 17 題
- 94 基測 I 第 30 題
- 99 基測 I 第 23 題



備課教學資源

- 補救教學 · 計算 Basic 4-2
- 免試加強類題本 4-2

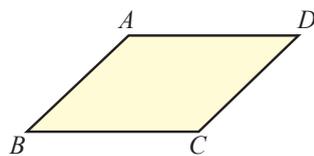
教學眉批

■ 隨堂練習 2 中，若兩紙帶等寬，則重疊的部分為菱形。

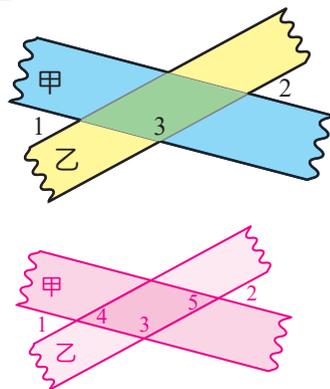
■ 例題 2 要選用哪兩個三角形說明，教師可如下發問引導學生：「包含 \overline{OA} 、 \overline{OB} 、 \overline{OC} 、 \overline{OD} 四條線段的是哪兩個三角形？」

放大 隨堂練習

解 1. 右圖平行四邊形 $ABCD$ 的周長為 32，且 $\overline{AB}=7$ ，求 \overline{BC} 的長。
 平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=\overline{CD}$ ， $\overline{AD}=\overline{BC}$ ，
 所以 $\overline{AB}+\overline{BC}=\frac{1}{2}\times$ 周長，即 $7+\overline{BC}=16$ ， $\overline{BC}=9$ 。



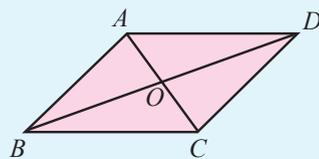
解 2. 右圖是兩條有平行邊的紙帶，紙帶甲比紙帶乙寬。
 (1) 重疊的部分是哪一種四邊形？
 (2) 如果 $\angle 1=43^\circ$ ，求 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 。
 (1) \because 四邊形的兩組對邊平行， \therefore 是平行四邊形。
 (2) 如圖， $\angle 4=\angle 1=43^\circ$ （對頂角相等），且重疊的部分為平行四邊形，
 所以 $\angle 5=\angle 4=43^\circ$ （平行四邊形對角相等），
 則 $\angle 2=\angle 5=43^\circ$ （對頂角相等）。
 而 $\angle 3+\angle 4=180^\circ$ （同側內角互補），
 $\angle 3+43^\circ=180^\circ$ ， $\angle 3=137^\circ$ 。



平行四邊形的對角線

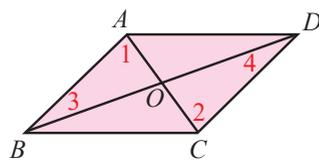
放大 例 2 平行四邊形的性質

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中，對角線 \overline{AC} 與 \overline{BD} 相交於 O 點，說明 $\overline{OA}=\overline{OC}$ ， $\overline{OB}=\overline{OD}$ 。



說明 在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中，

解 $\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$ （內錯角相等），
 $\angle 3 = \angle 4$ （內錯角相等），
 又 $\overline{AB} = \overline{CD}$ （平行四邊形對邊等長），
 $\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD$ （ASA 全等性質），
 $\therefore \overline{OA} = \overline{OC}$ ， $\overline{OB} = \overline{OD}$ （對應邊相等），
 即兩條對角線互相平分。

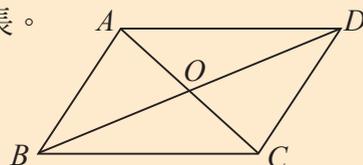


由上面的討論可知：平行四邊形的兩條對角線互相平分。

精熟

會考觀測站 — 精熟演練題 搭配例 2

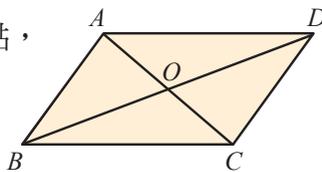
■ 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， O 為兩條對角線的交點，且 $\overline{AB}=8$ 、 $\overline{AD}=12$ ， $\triangle OAB$ 的周長為 22，求 $\triangle OAD$ 的周長。



26

放大 隨堂練習

解 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 的兩條對角線相交於 O 點，
且 $\overline{AB}=4$ ， $\overline{BD}=9$ ， $\overline{AC}=5$ ，求 $\triangle AOB$ 的周長。



平行四邊形 $ABCD$ 的兩條對角線互相平分。

$$\text{所以 } \overline{AO} = \frac{1}{2} \times \overline{AC} = \frac{5}{2}$$

$$\overline{BO} = \frac{1}{2} \times \overline{BD} = \frac{9}{2}$$

$$\triangle AOB \text{ 的周長} = \overline{AB} + \overline{AO} + \overline{BO} = 4 + \frac{5}{2} + \frac{9}{2} = 11$$

教學眉批

■ 隨堂練習不容易，教師要引導學生利用“平行四邊形的兩條對角線互相平分”的性質。

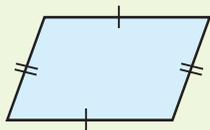
放大 平行四邊形的性質

任意平行四邊形具有下列性質：

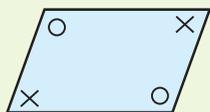
(1) 任一條對角線均可將它分成兩個全等的三角形。



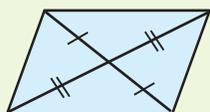
(2) 兩組對邊分別等長。



(3) 兩組對角分別相等。



(4) 兩條對角線互相平分。



基礎

會考觀測站 — 基礎演練題 搭配課文

1. 如圖一，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ ， $\overline{AC} = 6$ ， $\overline{BD} = 8$ ，求平行四邊形 $ABCD$ 面積。24

2. 如圖二， $ABCD$ 為平行四邊形，則 $\angle B =$ 60 度。

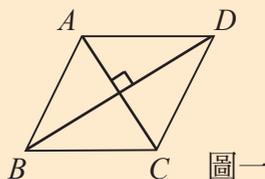
(C) 3. 平行四邊形 $ABCD$ 中，下列敘述何者不一定正確？

(A) $\overline{AD} = \overline{BC}$

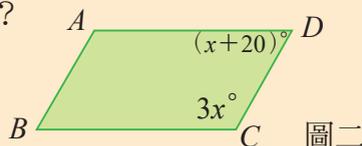
(B) $\triangle ABD \cong \triangle CDB$

(C) $\overline{AC} = \overline{BD}$

(D) \overline{AC} 、 \overline{BD} 互相平分



圖一



圖二

教學眉批

- 求 $\angle BEC$ 時，課本中利用平行四邊形對角相等的性質，教師可補充下列利用同位角及平角的解法：
 $\angle BEC = 180^\circ - \angle CED - \angle AEB$
 $= 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ$
 (同位角相等)
 $= 50^\circ$

基會試題

- 105 會考第 8 題

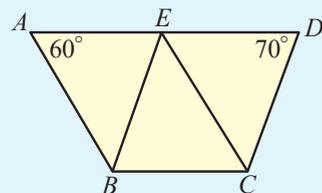
轉Q 關鍵提問

- $\angle DEC$ 、 $\angle ECD$ 分別是幾度呢？
 答： $\angle DEC = 60^\circ$ 、 $\angle ECD = 50^\circ$ 。
- $\triangle DEF$ 與 $\triangle ABC$ 周長的關係？
 答： $\triangle DEF$ 周長 = $2\triangle ABC$ 周長

放大 例 3 平行四邊形性質的應用 (兩組對角分別相等)

基會提問

如圖，四邊形 $ABCD$ 中， E 點在 \overline{AD} 上，
 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle D = 70^\circ$ ， $\triangle ABE$ 的面積為 4，
 且四邊形 $ABCE$ 與 $BCDE$ 皆為平行四邊形。
 求：



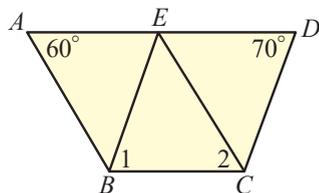
- 四邊形 $ABCD$ 的面積。
- $\angle BEC$ 。

解

(1) 四邊形 $ABCD$ 的面積
 $= \triangle ABE$ 的面積 + $\triangle CEB$ 的面積 + $\triangle ECD$ 的面積
 $= 4 + 4 + 4 \leftarrow \triangle ABE \cong \triangle CEB$ ，且 $\triangle CEB \cong \triangle ECD$
 $= 12$ 。

(2) 如圖，

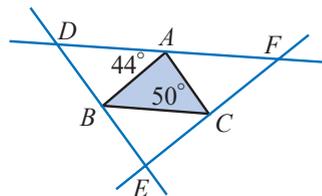
$\angle 1 = \angle D = 70^\circ$ (平行四邊形對角相等)，
 $\angle 2 = \angle A = 60^\circ$ (平行四邊形對角相等)，
 $\therefore \angle BEC = 180^\circ - (\angle 1 + \angle 2)$
 $= 180^\circ - (70^\circ + 60^\circ)$
 $= 50^\circ$ 。



放大 隨堂練習

解

如圖，分別過 $\triangle ABC$ 的三頂點作對邊的平行線，
 此三直線相交於 D 、 E 、 F 三點，且 $\triangle ABC$ 的面積為 16，
 $\angle ACB = 50^\circ$ ， $\angle BAD = 44^\circ$ 。求：



- $\triangle DEF$ 的面積。
 - $\angle BEC$ 。
- (1) 因為四邊形 $ADBC$ 、 $ABEC$ 、 $ABCF$ 均為平行四邊形，
 所以 $\triangle ABC$ 、 $\triangle ABD$ 、 $\triangle BCE$ 、 $\triangle ACF$ 的面積都相等。
 $\triangle DEF$ 的面積 = $4 \times \triangle ABC$ 的面積 = $4 \times 16 = 64$
- (2) 因 $\angle ADB = 50^\circ$ (平行四邊形對角相等)，
 且 $\angle AFC = 44^\circ$ (同位角相等)，由 $\triangle DEF$ 內角和得
 $\angle BEC = 180^\circ - \angle ADB - \angle AFC = 180^\circ - 50^\circ - 44^\circ = 86^\circ$

基礎

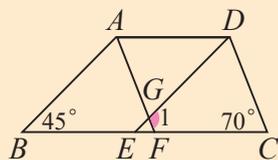
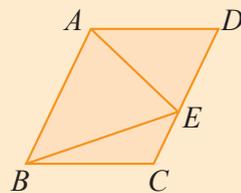
會考觀測站 - 基礎演練題 搭配例 3

- 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 26， E 點在 \overline{CD} 上，
 求 $\triangle ABE$ 的面積。

13

- 如圖， $\angle B = 45^\circ$ ， $\angle C = 70^\circ$ ，且四邊形 $ABED$ 與四邊形 $AFCD$ 均為平行四邊形，求 $\angle 1$ 。

115°



放大例 4 平行四邊形性質的應用 (兩組對邊分別等長)

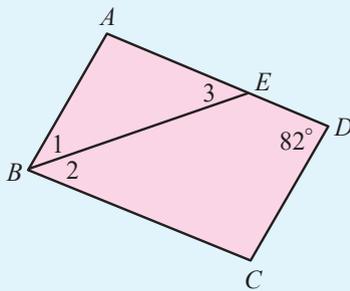
放大

動畫

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， E 點在 \overline{AD} 上，
 $\overline{AB} = 7$ ， $\overline{BC} = 11$ ， $\angle D = 82^\circ$ ，且 $\angle 1 = \angle 2$ 。

求：

- (1) $\angle 3$ 。
- (2) \overline{DE} 的長。



解 (1) ① $\because \angle ABC = \angle D = 82^\circ$ (平行四邊形對角相等)，

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 82^\circ \quad (\angle ABC = \angle 1 + \angle 2),$$

$$\text{又 } \angle 1 = \angle 2,$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 2 = 41^\circ.$$

② $\because \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (平行四邊形對邊平行)，

$$\therefore \angle 3 = \angle 2 = 41^\circ \quad (\text{內錯角相等}).$$

(2) $\because \angle 3 = \angle 1 = 41^\circ$ ，

$$\therefore \overline{AE} = \overline{AB} = 7 \quad (\triangle ABE \text{ 為等腰三角形}),$$

$$\text{又 } \overline{AD} = \overline{BC} = 11 \quad (\text{平行四邊形對邊等長}),$$

$$\therefore \overline{DE} = \overline{AD} - \overline{AE} = 11 - 7 = 4.$$

放大
提問

隨堂練習

解 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\angle ABC$ 的角平分線
 分別交 \overline{CD} 、 \overline{AD} 於 E 、 F 兩點。已知 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 4$ ，
 求 \overline{DE} 與 \overline{DF} 的長。

$\because \overline{BF}$ 為 $\angle ABC$ 的角平分線，

$$\therefore \angle ABF = \angle FBC,$$

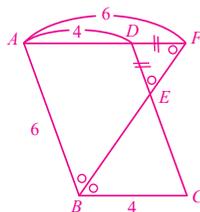
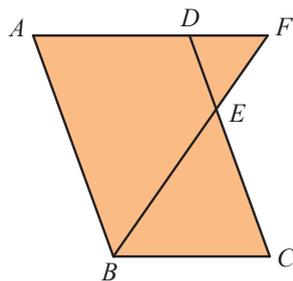
$$\angle FBC = \angle AFB \quad (\text{內錯角相等}),$$

$$\angle ABF = \angle DEF \quad (\text{同位角相等})$$

可知 $\triangle ABF$ 、 $\triangle DEF$ 為等腰三角形。

又 $\because \overline{BC} = \overline{AD} = 4$ (一組對邊平行且等長)

$$\therefore \overline{AB} = \overline{AF} = 6, \quad \overline{DE} = \overline{DF} = 6 - \overline{AD} = 6 - 4 = 2$$



精熟



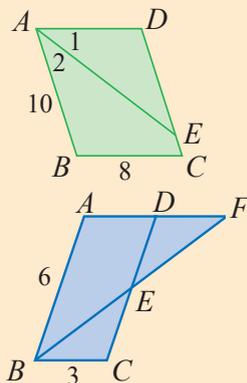
會考觀測站 — 精熟演練題 搭配例 4

1. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\overline{AB} = 10$ ，
 $\overline{BC} = 8$ ，求 \overline{CE} 的長。

2

2. 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\angle B$ 的角平分線
 交直線 \overline{AD} 於 F 點。已知 $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 3$ ，求
 \overline{DE} 與 \overline{DF} 的長。

$$\overline{DE} = \overline{DF} = 3$$



教學眉批

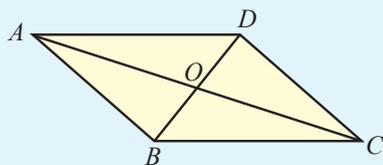
■ 例題 5 第(2)小題可補充下列解法，並強調「平行四邊形的兩條對角線將它分成四個等面積三角形」的概念。
 另解一：因為 $\triangle AOD \cong \triangle COB$ ， $\triangle AOB \cong \triangle COD$ ，且 $\triangle COD$ 的面積 = $\triangle AOD$ 的面積，所以 $\triangle AOD$ 的面積 = $\triangle AOB$ 的面積 = $\triangle COB$ 的面積 = $\triangle COD$ 的面積，所以平行四邊形 $ABCD$ 的面積 = $4 \times \triangle AOD$ 的面積 = $4 \times 5 = 20$ 。
 另解二： $\triangle COD$ 和 $\triangle AOD$ 為等底同高面積相等的三角形，同理 $\triangle AOB$ 和 $\triangle BOC$ ， $\triangle AOD$ 和 $\triangle AOB$ ， $\triangle BOC$ 和 $\triangle COD$ 亦是，所以 $\triangle AOB$ 、 $\triangle BOC$ 、 $\triangle COD$ 、 $\triangle AOD$ 的面積相等，因此平行四邊形 $ABCD$ 的面積 = $4 \times \triangle AOD$ 的面積 = $4 \times 5 = 20$ 。

放大 例 5 平行四邊形的對角線與面積 (基會)

配合習作 P58 基礎題 1、2

放大 動畫

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， O 為兩條對角線交點，且 $\triangle AOD$ 的面積為 5。求：



- (1) $\triangle COD$ 、 $\triangle BOC$ 、 $\triangle AOB$ 的面積。
- (2) 平行四邊形 $ABCD$ 的面積。

解 作 $\overline{DH} \perp \overline{AC}$ 於 H 點。

放大 動畫

$$(1) \because \triangle AOD \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{AO} \times \overline{DH},$$

$$\text{且 } \triangle COD \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{CO} \times \overline{DH},$$

又 $\overline{AO} = \overline{CO}$ (平行四邊形對角線互相平分)，

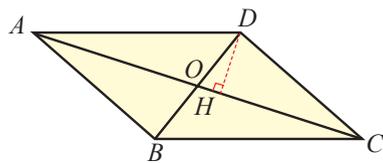
$$\therefore \triangle COD \text{ 的面積} = \triangle AOD \text{ 的面積} = 5,$$

同理 $\triangle BOC$ 的面積 = $\triangle AOB$ 的面積 = $\triangle AOD$ 的面積 = 5。

(2) 平行四邊形 $ABCD$ 的面積

$$= \triangle AOD \text{ 的面積} + \triangle COD \text{ 的面積} + \triangle BOC \text{ 的面積} + \triangle AOB \text{ 的面積}$$

$$= 4 \times \triangle AOD \text{ 的面積} = 4 \times 5 = 20.$$



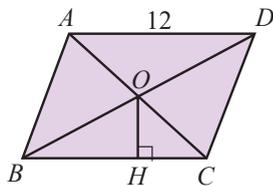
放大 對角線四等分平行四邊形

平行四邊形的兩條對角線將其面積四等分。

放大 隨堂練習

解 放大 動畫

如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， O 為兩條對角線交點， $\overline{OH} \perp \overline{BC}$ 於 H 點， $\overline{AD} = 12$ ，且平行四邊形 $ABCD$ 的面積為 96，求 \overline{OH} 的長。



平行四邊形的對角線將其分割成四個等面積的三角形。

所以 $\triangle OBC$ 的面積 = $\frac{1}{4} \times 96 = 24$ ，又 $\overline{BC} = \overline{AD} = 12$ (對邊等長)

$$\triangle OBC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{OH} = 24, \quad \frac{1}{2} \times 12 \times \overline{OH} = 24, \quad \overline{OH} = 4$$

基會

基會試題

- 96 基測 I 第 19 題
- 99 基測 II 第 33 題

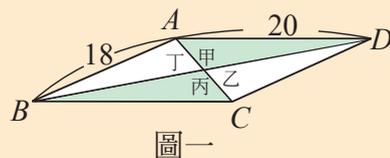
備課教學資源



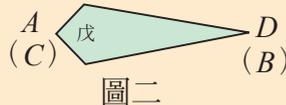
99 基測 II 第 33 題 搭配例 5

隨堂輕鬆考第 33 回

(A) ■ 如圖一，平行四邊形紙片 $ABCD$ 的面積為 120， $\overline{AD} = 20$ ， $\overline{AB} = 18$ 。沿兩對角線將四邊形 $ABCD$ 剪成甲、乙、丙、丁四張三角形紙片。若將甲、丙合併 (\overline{AD} 、 \overline{CB} 重合) 形成一線對稱圖形戊，如圖二所示，則圖形戊的兩對角線長度之和為何？



圖一



圖二

- (A) 26 (B) 29 (C) $24\frac{2}{3}$ (D) $25\frac{1}{3}$

2 平行四邊形的判別

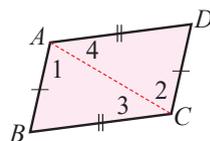
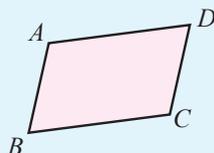
對應能力指標 8-s-11、8-s-13、8-s-16

長方形與正方形的內角均為直角，所以兩組對邊分別平行，很容易確定它們是平行四邊形。接下來，介紹一些常用的平行四邊形判別方法。

▶ 兩組對邊分別等長

放大例 6 平行四邊形的判別（對邊等長）

如圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，且 $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，說明四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



說明 如圖，連接對角線 \overline{AC} 。

解 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中，

$$\because \overline{AB} = \overline{CD} \text{ (已知),}$$

$$\overline{BC} = \overline{DA} \text{ (已知),}$$

$$\overline{AC} = \overline{AC} \text{ (公用邊),}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA \text{ (SSS 全等性質).}$$

因此 $\angle 1 = \angle 2$ ， $\angle 3 = \angle 4$ (對應角相等)

故 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (內錯角相等)

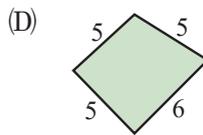
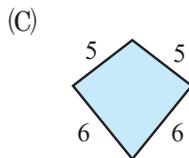
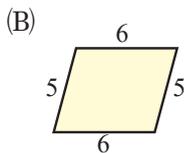
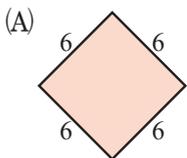
四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

由例題 6 可知，兩組對邊分別等長的四邊形是平行四邊形。

放大隨堂練習

提問
解

下列何者為平行四邊形？(複選) (A)(B)



基礎

活動 2 理解平行四邊形的判別方法：

- (1) 兩組對邊分別等長的四邊形會是平行四邊形。
- (2) 兩組對角分別相等的四邊形會是平行四邊形。
- (3) 兩對角線互相平分的四邊形會是平行四邊形。
- (4) 一組對邊平行且等長的四邊形會是平行四邊形。

教學眉批

- 教師可提問：「如果要利用三角形的全等，該怎麼做才會有兩個全等的三角形？」藉此引出對角線，並試著以下列方式引導學生：
有兩組對邊平行才是平行四邊形，要說明 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，必須 $\angle 3 = \angle 4$ 。
要說明 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，必須 $\angle 1 = \angle 2$ 。
而由兩個三角形全等就可達成，因此先找找看是否有足夠的全等條件。

轉關鍵提問

- 選項(C)是什麼圖形呢？

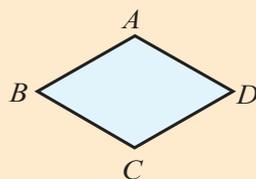
答：箏形(鸞形)。



會考觀測站 — 基礎演練題 搭配例 6

- 如圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ ，則四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形？為什麼？

因為四邊形 $ABCD$ 的兩組對邊分別等長 ($\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{BC} = \overline{DA}$)，所以四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



教學眉批

- 例題 7 教師可提問：「若連接對角線，是否有足夠的條件說明兩個三角形？」以免學生誤認為仍然可用連接對角線的方式來說明。教師可試著以下列方式引導學生：

\overline{AD} 與 \overline{BC} 要平行，必須 $\angle A + \angle B = 180^\circ$ 或 $\angle C + \angle D = 180^\circ$ ，而這兩式與四邊形內角和 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ 似乎很有關聯，因此從內角和著手。

基會試題

- 102 基測第 31 題

轉Q 關鍵提問

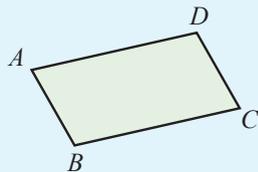
- $\angle A$ 是幾度呢？
答：120 度。

兩組對角分別相等

放大 例 7 平行四邊形的判別（對角相等）基會

配合習作 P59 基礎題 4

如圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle C$ ，且 $\angle B = \angle D$ ，說明四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



說明 $\because \angle A = \angle C, \angle B = \angle D,$
解 且 $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360^\circ$ (四邊形內角和),
 $\therefore \angle C + \angle D + \angle C + \angle D = 360^\circ,$
 $2\angle C + 2\angle D = 360^\circ,$
 $\angle C + \angle D = 180^\circ,$
 $\therefore \overline{AD} \parallel \overline{BC}$ (同側內角互補)。
 又 $\angle C = \angle A$ (已知),
 $\therefore \angle A + \angle D = 180^\circ,$
 $\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (同側內角互補),
 因此，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

由例題 7 可知，兩組對角分別相等的四邊形是平行四邊形。

放大 隨堂練習

提問
解

如圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle C$ ， $\angle DEF = 70^\circ$ ， $\angle DFE = 50^\circ$ ， $\angle B = 60^\circ$ 。說明四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

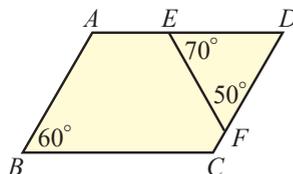
說明：

$\triangle DEF$ 中， $\angle D = 180^\circ - (70^\circ + 50^\circ) = 60^\circ$ ，

$\therefore \angle D = \underline{\angle B} = 60^\circ$ ，

由 $\angle A = \angle C$ 及 $\angle D = \underline{\angle B}$ 知

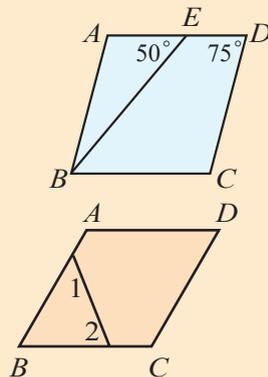
四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形(理由：兩組對角分別相等)。



加強

會考觀測站 — 加強演練題 搭配例 7

- 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， E 點在 \overline{AD} 上。若 $\angle D = 75^\circ$ ， $\angle AEB = 50^\circ$ ，求 $\angle ABE$ 。25°
- 如圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\angle A = \angle C$ ， $\angle D = 60^\circ$ ， $\angle 1 = 52^\circ$ ， $\angle 2 = 68^\circ$ ，則四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形？為什麼？
 因為 $\angle B = 180^\circ - 52^\circ - 68^\circ = 60^\circ = \angle D$
 又 $\angle A = \angle C$ ，所以四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。
 (因為兩組對角相等)

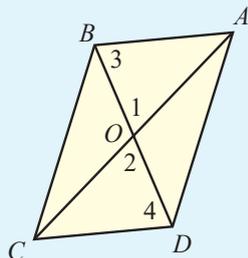


兩條對角線互相平分

放大 例 8 平行四邊形的判別 (對角線互相平分)

配合習作 P59 基礎題 5

如圖，四邊形 $ABCD$ 中， O 為兩條對角線的交點，且 $\overline{OA} = \overline{OC}$ ， $\overline{OB} = \overline{OD}$ 。說明四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



說明 在 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 中，

解

$$\therefore \overline{OA} = \overline{OC},$$

$$\overline{OB} = \overline{OD},$$

$$\angle 1 = \angle 2 \text{ (對頂角相等)},$$

$$\therefore \triangle AOB \cong \triangle COD \text{ (SAS 全等性質)},$$

$$\therefore \angle 3 = \angle 4 \text{ (對應角相等)},$$

$$\therefore \overline{AB} \parallel \overline{CD} \text{ (內錯角相等)},$$

同理，在 $\triangle AOD$ 和 $\triangle COB$ 中，可推得 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 。

因此，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

由例題 8 可知，兩條對角線互相平分的四邊形是平行四邊形。

放大 隨堂練習

解

如圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\triangle AOB$ 的面積 = $\triangle BOC$ 的面積 = $\triangle COD$ 的面積。說明四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

說明：

$$\therefore \triangle AOB \text{ 的面積} = \triangle BOC \text{ 的面積},$$

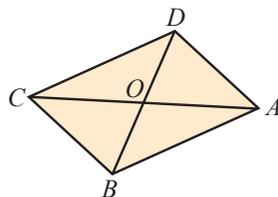
$$\therefore \overline{AO} = \overline{CO} \text{ (同高)},$$

$$\text{又 } \triangle BOC \text{ 的面積} = \triangle COD \text{ 的面積},$$

$$\therefore \overline{BO} = \overline{DO} \text{ (同高)},$$

$$\text{由 } \overline{AO} = \overline{CO} \text{ 及 } \overline{BO} = \overline{DO} \text{ 知}$$

四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形 (理由：兩條對角線互相平分)。



加強

教學眉批

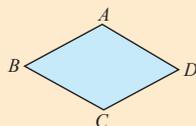
- 教師可試著以下列方式引導學生：要說明 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，必須 $\angle 3 = \angle 4$ ，而由 $\triangle AOB$ 和 $\triangle COD$ 的全等就可達成，因此先找看看這兩個三角形是否有足夠的全等條件。
- 為何「同理」可推得 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，教師宜視情況解說。



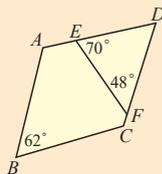
會考觀測站 — 加強演練題 搭配例 6、8

- 利用平行四邊形的判別方法，檢查下列各四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形。若是，在括弧內寫出其判別方法。

(1) $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$



(2) $\angle A = \angle C$



是 (因為：兩組對邊分別等長)

否

是 (因為：兩組對角分別相等)

否

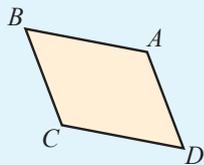
教學眉批

- 教師可如例題 6 提問引出對角線，並試著以下列方式引導學生：
有兩組對邊平行才是平行四邊形，已知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，只要說明 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 即可。要說明 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ ，必須 $\angle 3 = \angle 4$ 。而由兩個三角形全等就可達成，因此先找找看是否有足夠的全等條件。

放大 一組對邊平行且等長

例 9 平行四邊形的判別 (一組對邊平行且等長) 配合習作 P59 基礎題 5

如圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，且 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 。
說明四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



說明 如圖，連接對角線 \overline{AC} 。

解 $\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\therefore \angle 1 = \angle 2$ (內錯角相等)，

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CDA$ 中，

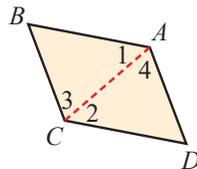
$\because \overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\angle 1 = \angle 2$ ， $\overline{AC} = \overline{AC}$ ，

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$ (SAS 全等性質)。

$\therefore \angle 3 = \angle 4$ (對應角相等)，

$\therefore \overline{BC} \parallel \overline{AD}$ (內錯角相等)，

因此，四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

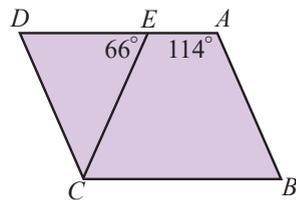


由例題 9 可知，一組對邊平行且等長的四邊形是平行四邊形。

放大 隨堂練習

解

如圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\overline{AB} = \overline{CE}$ ， $\angle A = 114^\circ$ ， $\angle DEC = 66^\circ$ 。說明四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。



說明：

$\because \overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ， $\therefore \angle D = 180^\circ - 114^\circ = 66^\circ$ (理由：同側內角互補)，

$\therefore \angle D = \angle DEC = 66^\circ$ ，因此， $\overline{CD} = \overline{CE}$ ，

又 $\overline{AB} = \overline{CE}$ (已知)，故 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，

由 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ 且 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 知四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

(理由：一組對邊平行且等長)

放大

動動腦

解

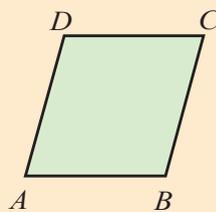
一組對邊平行，另一組對邊等長的四邊形是否一定為平行四邊形？
否。有可能為平行四邊形或等腰梯形。

基礎



會考觀測站 - 基礎演練題 搭配例 9

- 如圖，四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，且 $\angle A + \angle D = 180^\circ$ ，則四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形？為什麼？
因為 $\angle A + \angle D = 180^\circ$ ，所以 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ (同側內角互補)。
又 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，所以四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。
(因為一組對邊平行且等長)



平行四邊形的判別，除了兩組對邊分別平行外，由前面的推論還可得到下面的判別方法。

放大
GGB

平行四邊形的判別

符合下列性質之一的四邊形為平行四邊形：

- (1) 兩組對邊分別等長。
- (2) 兩組對角分別相等。
- (3) 兩條對角線互相平分。
- (4) 一組對邊平行且等長。

放大

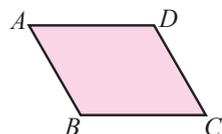
隨堂練習

基會

配合習作 P59 基礎題 5

解

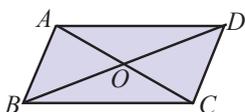
連連看，找出判別下列各四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形的方法：



$$\overline{AB} \parallel \overline{CD},$$

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{BC} + \overline{CD}$$

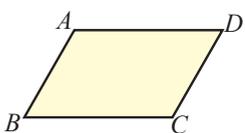
兩組對邊分別等長



$$\overline{AO} = 3, \overline{OC} = 6,$$

$$\overline{BD} = 8, \overline{BO} = 4$$

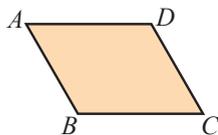
一組對邊平行且等長



$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{BC} + \overline{CD}$$

$$= \overline{CD} + \overline{AD}$$

兩組對角分別相等



$$\angle A = 65^\circ, \angle C = 65^\circ,$$

$$\angle B = \angle D$$

兩條對角線互相平分

- 做隨堂練習時，教師可引導學生將相等的條件畫記在圖形上，進而利用此種方法判別。
- 建議在本節別出太多利用平行四邊形的性質來證明其他性質的題目。

基會試題

- 103 會考第 24 題

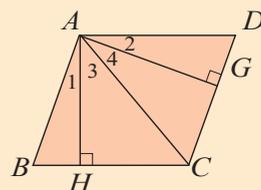
基會



99 基測 I 第 23 題 搭配課文

- (A) ■ 右圖為一個平行四邊形 $ABCD$ ，其中 H 、 G 兩點分別在 \overline{BC} 、 \overline{CD} 上， $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{AG} \perp \overline{CD}$ ，且 \overline{AH} 、 \overline{AC} 、 \overline{AG} 將 $\angle BAD$ 分成 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 、 $\angle 4$ 四個角。若 $\overline{AH} = 5$ ， $\overline{AG} = 6$ ，則下列關係何者正確？

- (A) $\angle 1 = \angle 2$ (B) $\angle 3 = \angle 4$ (C) $\overline{BH} = \overline{GD}$ (D) $\overline{HC} = \overline{CG}$



活動 3 利用尺規作圖作出正方形及平行四邊形。

教學眉批

■ 例題 10 及動動腦亦可利用「一組對邊平行且等長」的方法（畫一次平行線），或根據平行四邊形的定義（畫兩次平行線）作圖，但圖形都會比課本的複雜，教師可示範比較。

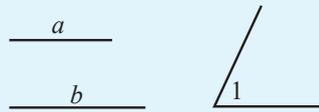
注意事項

■ 作法只是實際作圖的簡要說明，評量時應以實際作圖為主。本教材希望學生在學習寫作法時，能減少不必要的困擾，因此例題 10 的作法(3)不寫成「設兩弧在 $\angle A$ 內交於 C 點」，只單純配合作圖說明，而不刻意強調或排除另一交點。但對於程度較好的學生，教師不妨拋出「為什麼另一個交點不會落在 $\angle A$ 內部？」的問題，激發學生的思考力。

利用尺規作圖畫平行四邊形時，若能善用平行四邊形的判別方法，常能簡化作圖的步驟。以下面的例題來說明。

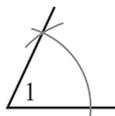
放大例 10 平行四邊形作圖

如右圖，已知 $\angle 1$ 及 a 、 b 兩線段長，利用尺規作圖畫一個平行四邊形 $ABCD$ ，使得 $\angle A = \angle 1$ ， $\overline{AB} = a$ ， $\overline{AD} = b$ 。

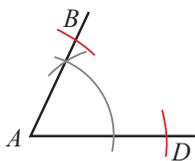


作法

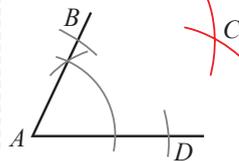
解

(1) 作 $\angle A = \angle 1$ 。(2) 在 $\angle A$ 兩邊分別

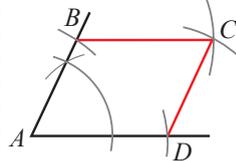
取 B 、 D 兩點，使得 $\overline{AB} = a$ ， $\overline{AD} = b$ 。

(3) 分別以 B 、 D 兩點

為圓心， b 、 a 線段長為半徑畫兩弧，交於 C 點。

(4) 連接 \overline{BC} 與

\overline{CD} ，則四邊形 $ABCD$ 為所求。



放大

動動腦

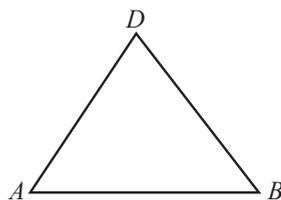
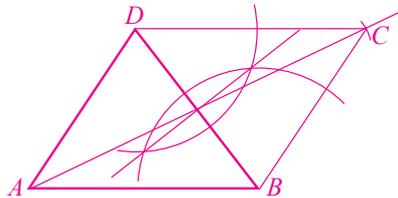
解

1. 例題 10 的作圖方法，是依據哪一個平行四邊形的判別方法？
兩組對邊分別等長。

解

2. 如圖，已知 $\triangle ABD$ ，利用尺規作圖作一 C 點，使得四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。除了例題 10 的作圖方法，還可以有其他方法嗎？它是利用平行四邊形的哪一個判別方法呢？

兩條對角線互相平分。



基礎

備課教學資源

- 隨堂輕鬆考第 34 回
- 免試基礎講堂 4-2
- 免試精熟本 4-2

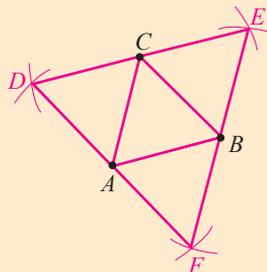


會考觀測站 — 基礎演練題 搭配例 10

■ 如圖，已知 A 、 B 、 C 三點，利用尺規作圖作一點 D ，使得四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

作法：

- (1) 分別以 A 、 C 兩點為圓心， \overline{BC} 、 \overline{AB} 為半徑畫弧。
- (2) 兩弧交於 D 點，則四邊形 $ABCD$ 即為所求。
- (3) 同樣的作法，可求得另外兩個平行四邊形 $ABEC$ 、 $AFBC$ 。



重點回顧

放大 1 平行四邊形：

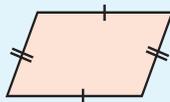
兩組對邊分別平行的四邊形稱為平行四邊形。

放大 2 平行四邊形的性質：

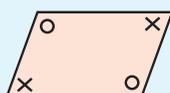
(1) 任一條對角線均可將它分成兩個全等的三角形。



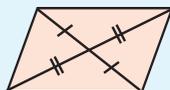
(2) 兩組對邊分別等長。



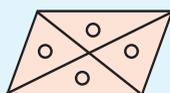
(3) 兩組對角分別相等。



(4) 兩條對角線互相平分。



(5) 平行四邊形的兩條對角線將其面積四等分。



放大 3 平行四邊形的判別：

符合下列性質之一的四邊形為平行四邊形：

- (1) 兩組對邊分別等長。
- (2) 兩組對角分別相等。
- (3) 兩條對角線互相平分。
- (4) 一組對邊平行且等長。

精熟

活化體驗站

趣味數學

■ 一頭羊值 10 萬元，那麼三頭羊共值多少錢？

答：價值 30 萬以上，因為三個頭的羊是稀有動物。



會考觀測站 — 精熟演練題 搭配例 10

■ 如圖，已知 $\angle PAQ$ 及一點 C ，利用尺規作圖在 $\angle PAQ$ 的兩邊分別找 B 、 D 兩點，使得四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，並說明其理由。

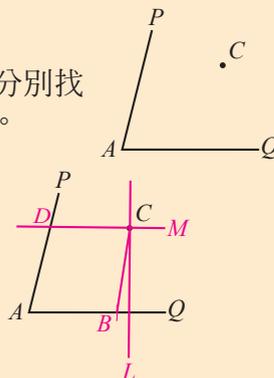
作法：① 過 C 點作 \overline{AQ} 的垂線 L 。

② 過 C 點作直線 M 垂直 L ，且交 \overline{AP} 於 D 點。

③ 在 \overline{AQ} 上取 \overline{AB} ，使得 $\overline{AB} = \overline{CD}$ 。

④ 連接 \overline{BC} ，則四邊形 $ABCD$ 為所求。

說明：四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ，且 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ，故 $ABCD$ 為平行四邊形。



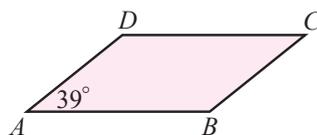
教學眉批

4-2 自我評量

放大 ① 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\angle A = 39^\circ$ ，求 $\angle B$ 與 $\angle C$ 。 課 P173 例 1

解 $\angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 39^\circ = 141^\circ$

▲ $\angle C = \angle A = 39^\circ$



答： $\angle B = 141^\circ$ ， $\angle C = 39^\circ$ 。

放大 ② 平行四邊形 $ABCD$ 的周長為 72 公分，且 \overline{AB} 是 \overline{BC} 的 3 倍， 課 P174 隨堂

解 求 \overline{CD} 的長。

▲ 平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{BC} = \overline{AD}$ 。

▼ 平行四邊形 $ABCD$ 的周長 $= \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{AD}$

$$72 = 3 \times \overline{BC} + \overline{BC} + 3 \times \overline{BC} + \overline{BC} = 8 \times \overline{BC}$$

所以 $\overline{BC} = 9$ 。又 $\overline{AB} = \overline{CD}$ ， $\overline{AB} = 3 \overline{BC}$ (已知)，

$$\overline{CD} = 3 \overline{BC} = 3 \times 9 = 27$$

答：27 公分。

放大 ③ 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{CD} = 10$ ， $\overline{BC} = 12$ ， $\angle B = 30^\circ$ ， 課 P173 例 1

解 自 A 作 \overline{BC} 邊上的高，垂足為 H ，求平行四邊形 $ABCD$ 的面積。

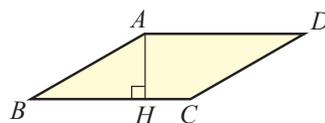
▲ $\triangle ABH$ 為 $30^\circ - 60^\circ - 90^\circ$ 的直角三角形

▼ $\overline{AB} : \overline{AH} = 2 : 1$

$$10 : \overline{AH} = 2 : 1$$

$$\overline{AH} = 5$$

$$\text{平行四邊形 } ABCD \text{ 的面積} = \overline{BC} \times \overline{AH} = 12 \times 5 = 60$$



答：60。

- 第 4(2) 題可經由觀察 $\triangle BEF$ ，再解題。

放大 ④ 如圖，平行四邊形 $ABCD$ 中， E 、 F 兩點分別 課 P176~177 例 3~4

在 \overline{AB} 、 \overline{BC} 上，且 $\angle D = 55^\circ$ ， $\angle EFB = 70^\circ$ ，

解 $\overline{AD} = 9$ ， $\overline{CF} = 4$ 。求：

▲ (1) $\angle BEF$ 。 (1) $\angle B = \angle D = 55^\circ$

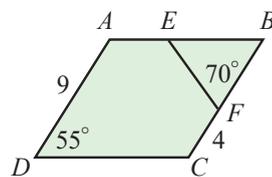
▼ (2) \overline{EF} 的長。 由 $\triangle BEF$ 的內角和得

$$\angle BEF = 180^\circ - \angle B - \angle BFE = 180^\circ - 55^\circ - 70^\circ = 55^\circ$$

(2) $\overline{EF} = \overline{BF}$ (因為 $\angle BEF = \angle B = 55^\circ$)

$$= \overline{BC} - \overline{CF} = \overline{AD} - \overline{CF} \text{ (對邊等長)} = 9 - 4 = 5$$

答：(1) 55° (2) 5。



基會

! 基會試題

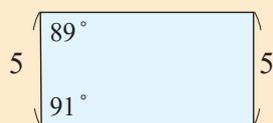
- 98 基測 I 第 11 題



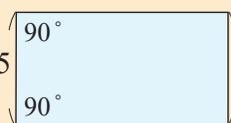
103 會考第 24 題 搭配自評第 5 題

(B) 下列選項中的四邊形只有一個為平行四邊形，根據圖中所給的邊長長度及角度，判斷哪一個為平行四邊形？

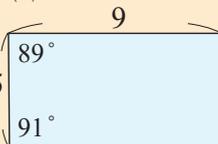
(A)



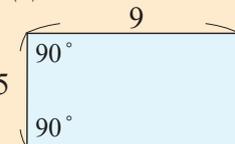
(B)



(C)



(D)



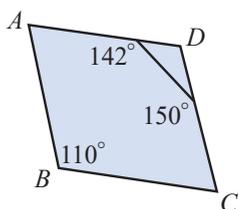
放大 5 利用平行四邊形的判別方法，判別下列各四邊形 $ABCD$ 是否為平行四邊形。若是，在括弧內寫出其判別方法。

課 P179~182 例 6~9

解

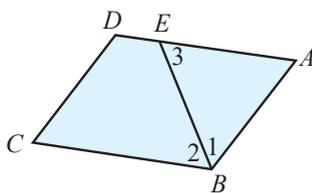


(1) $\angle A = \angle C$ 。



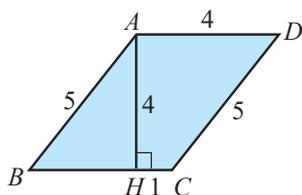
是 (理由:)
 否

(2) $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$, $\overline{AB} + \overline{DE} = \overline{BC}$ 。



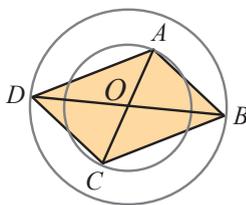
是 (理由: 一組對邊平行且等長)
 否

(3) $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ 。



是 (理由: 兩組對邊分別等長)
 否

(4) \overline{AC} 與 \overline{BD} 分別為兩同心圓的直徑。
(圓心 O)

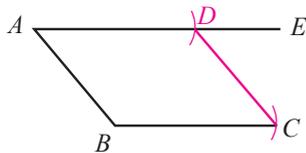


是 (理由: 兩對角線互相平分)
 否

放大 6 如圖， $\overline{AE} \parallel \overline{BC}$ ，且 $\overline{AE} > \overline{BC}$ ，利用尺規作圖在 \overline{AE} 上取一點 D ，使得四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形，並說明其理由。

課 P184 例 10

解



說明：

因為 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ 且 $\overline{AD} = \overline{BC}$ ，

(一組對邊平行且相等)

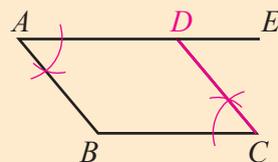
所以四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形。

作法：

① 在 \overline{AE} 上取 \overline{AD} ，使得 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 。

② 連接 \overline{CD} ，則四邊形 $ABCD$ 即為所求。

第 6 題是利用「一組對邊平行且相等的四邊形是平行四邊形」的觀念作圖，教師也可補充利用「兩組對角分別相等的四邊形是平行四邊形」的觀念作圖(如下)，並讓學生比較。



加強



會考觀測站 — 加強演練題 搭配自評第 5 題

(D) 根據右圖判斷，下列敘述何者正確？

- (A) 由 $\angle 1 = \angle 3$ 可知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
- (B) $\angle 1 + \angle 2 + \angle B = 180^\circ$ 可知 $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$
- (C) 由 $\angle 1 = \angle 4$ 可知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$
- (D) $\angle 3 + \angle 4 + \angle D = 180^\circ$ 可知 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

