3-4 三角形的邊角關係

本節性質與公式摘要

1. **三角形的三邊長關係：**

   (1)三角形任意兩邊長的和大於第三邊的長。

   (2)三角形任意兩邊長的差的絕對值小於第三邊的長。

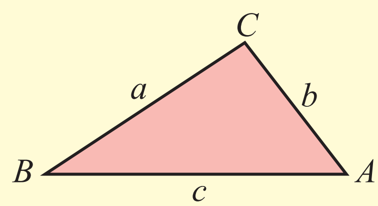
   (3)｜任意兩邊長的差｜ ＜ 第三邊的長 ＜ 任意兩邊長的和。

   例 $\triangle ABC$ 的三邊長為 a、b、c

   $|a-b|<c<a+b$

   $|a-c|<b<a+c$

   $|b-c|<a<b+c$

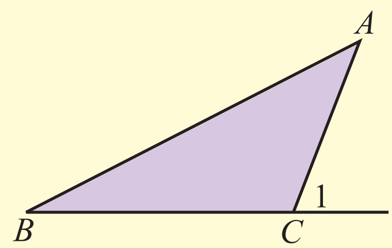


2. **三角形外角與內對角的大小關係：**

   三角形中，外角大於任何一個內對角。

   例 如圖，$\triangle ABC$ 中，

   $\angle 1>\angle A$ 且 $\angle 1>\angle B$。

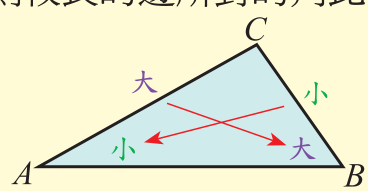


3. **大邊對大角：**

   在一個三角形中，若有兩個邊不等長，則較長的邊所對的角比較大。

   例 如圖，$\triangle ABC$ 中，

   若 $\overline{AC}>\overline{BC}$，則 $\angle B>\angle A$。

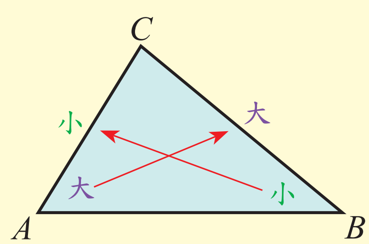


4. **大角對大邊：**

   在一個三角形中，若有兩個角不相等，則較大的角所對的邊比較長。

   例 如圖，$\triangle ABC$ 中，

   若 $\angle A>\angle B$，則 $\overline{BC}>\overline{AC}$。



5. **樞紐定理：**

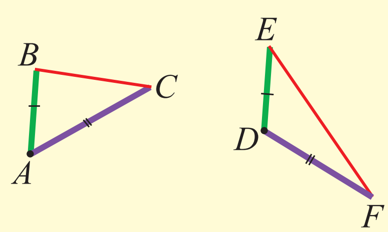
   當兩個三角形的兩個邊對應相等時：

   (1)樞紐定理：

   若兩邊的夾角不相等，則夾角愈大者，第三邊愈長。

   (2)逆樞紐定理：

   若第三邊不相等，則第三邊愈長者，所對的夾角愈大。



基礎題

1 ((B))下列各組數中，何者可以作為三角形的三邊長？ 課 P139 例 2 16 分 12 分

(A) 2.3、3.4、6.7　(B) $\sqrt{2}$、$\sqrt{5}$、$\sqrt{7}$

(C) $\frac{1}{3}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{12}$　(D) $a+1$、$2a+3$、$3a+5$（$a>0$）

2 ((B))設一個三角形的其中兩邊長分別是 3 公分、7 公分，則下列何者可以是第三邊的長？ 16 分 12 分 課 P137 例 1

(A) 2 公分　(B) 7 公分

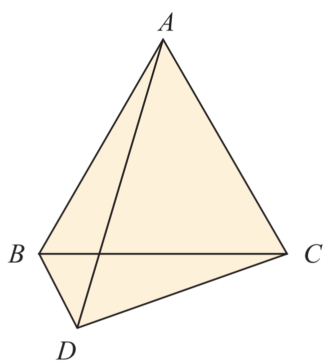
(C) 12 公分　(D) 17 公分

設第三邊長為 a，則

$7-3<a<7+3$

$4<a<10$

3 如圖，△ABC 為正三角形，比較 $\overline{AC}+\overline{BD}$ 和 $\overline{AD}$ 的大小關係，並說明其理由。 16 分 12 分 課 P140 隨堂



$\overline{AC}+\overline{BD}>\overline{AD}$ 。

理由：

△ABD 中，

$\overline{AB}+\overline{BD}>\overline{AD}$

（三角形任意兩邊長的和大於第三邊），

又 $\overline{AB}=\overline{AC}$（△$ABC$ 為正三角形），

所以 $\overline{AC}+\overline{BD}>\overline{AD}$ 。

教學眉批

■第 1 題：利用「三角形任意兩邊之和大於第三邊」出題，不宜用太複雜的無理數或根號來命題。

會考觀測站－基礎演練題

((A)(C)) 1. 下列各組數中，哪幾組可以作爲三角形的三邊長？（複選）

(A) 12、23、34　(B) 2.2、3.3、5.5　(C) 7、8、11　(D) $\frac{21}{2}$、5、2

2. 已知一個三角形的兩邊長是 3 和 11，周長是奇數，則第三邊的長爲多少？

9 或 11 或 13

教學眉批

④ $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=15$，$\overline{AC}=10\sqrt{2}$，則 $\triangle ABC$ 中哪個角最大？

16 分　12 分　課 P142 例 5

因為在$\triangle ABC$ 中，$\overline{BC}>\overline{AC}>\overline{AB}$，

利用「大邊對大角」的性質，

可得$\angle A>\angle B>\angle C$。

答：$\angle A$。

⑤ $\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$\angle B=70^\circ$，則 $\triangle ABC$ 中哪個邊最短？

課 P145 例 7　16 分　12 分

$\angle C=180^\circ-60^\circ-70^\circ=50^\circ$

因為在$\triangle ABC$ 中，$\angle B>\angle A>\angle C$，

利用「大角對大邊」的性質，

可得 $\overline{AC}>\overline{BC}>\overline{AB}$。

答：$\overline{AB}$。

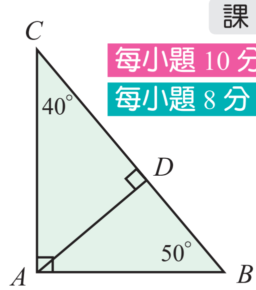
■ 第 6 題：
(1)不等關係的說明通常比較難，選題時宜注意難度。
(2)學生在說明邊長的大小關係時，只要有說出關鍵步驟即可。

⑥ 如圖，$\triangle ABC$ 為直角三角形，$\angle BAC=90^\circ$，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$。若$\angle B=50^\circ$，$\angle C=40^\circ$，回答下列問題：

課 P145 隨堂　每小題 10 分，共 20 分　每小題 8 分，共 16 分

(1) $\angle DAB$ 和$\angle DAC$ 分別是多少度？

(2) 比較 $\overline{AD}$、$\overline{BD}$、$\overline{CD}$ 的大小關係。



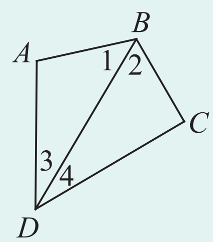
(1) $\angle DAB=90^\circ-50^\circ=40^\circ$，$\angle DAC=90^\circ-40^\circ=50^\circ$。

(2) 因為在$\triangle ABD$ 中，$\angle B>\angle DAB$，
利用「大角對大邊」的性質，所以 $\overline{AD}>\overline{BD}$。
因為在$\triangle ACD$ 中，$\angle C<\angle DAC$，
利用「大角對大邊」的性質，所以 $\overline{AD}<\overline{CD}$。
因此 $\overline{CD}>\overline{AD}>\overline{BD}$。

答：(1) $\angle DAB=40^\circ$，$\angle DAC=50^\circ$
(2) $\overline{CD}>\overline{AD}>\overline{BD}$。

會考觀測站－加強演練題

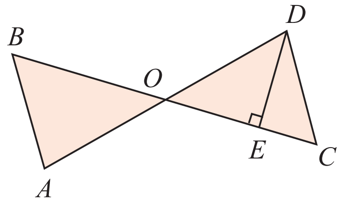
■ 如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{BC}=2$，$\overline{CD}=3.5$，$\overline{DA}=3$。利用「大邊對大角」的性質說明 $\angle ABC$ 和 $\angle ADC$ 的大小關係。



說明：
(1) $\angle 1$ __>__ $\angle 3$（理由是 $\overline{DA}>\overline{AB}$）
(2) $\angle 2$ __>__ $\angle 4$（理由是 $\overline{CD}>\overline{BC}$）
(3) $\angle ABC=\angle 1+\angle 2$ __>__ $\angle 3+\angle 4=\angle ADC$

精熟題

1 如圖，$\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 交於 O 點，$\overline{DE}\perp\overline{BC}$，$E$ 點為垂足。若 $\overline{BO}=\overline{CO}$，$\overline{AO}=\overline{DO}$，回答下列問題：每小題 4 分，共 12 分



(1) $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$ 相等嗎？為什麼？

(2) 比較 $\overline{CD}$ 和 $\overline{DE}$ 的大小關係。

(3) 比較 $\overline{AB}$ 和 $\overline{DE}$ 的大小關係。

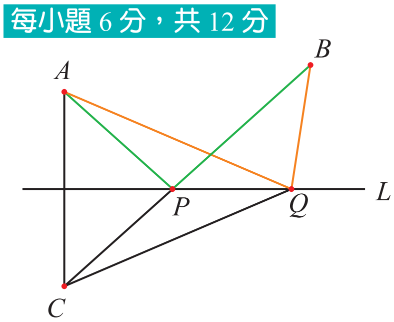
(1) $\overline{AB}=\overline{CD}$。$\because$ $\triangle ABO\cong\triangle DCO$（$SAS$ 全等性質），$\therefore$ $\overline{AB}=\overline{CD}$ 。

(2) $\overline{CD}>\overline{DE}$。在 $\triangle CDE$ 中，$\because\angle DEC=90^\circ>\angle C$，

$\therefore$ $\overline{CD}>\overline{DE}$（大角對大邊）。

(3) 由 (1)、(2) 可得 $\overline{AB}>\overline{DE}$ 。

2 如圖，A、B 兩點在直線 L 的同側，C 點是 A 點以直線 L 為對稱軸所得的對稱點，若 $\overline{BC}$ 與直線 L 相交於 P 點，且 Q 為 L 上異於 P 點之一點，回答下列問題：每小題 6 分，共 12 分



(1) 比較 $\overline{QB}+\overline{QC}$ 和 $\overline{BC}$ 的大小關係。

(2) 比較 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 和 $\overline{QA}+\overline{QB}$ 的大小關係。

(1) $\triangle BCQ$ 中，$\overline{QB}+\overline{QC}>\overline{BC}$。

(2) $\overline{PA}+\overline{PB}=\overline{PC}+\overline{PB}=\overline{BC}$ ——— ①

由 (1) 得 $\overline{QB}+\overline{QC}>\overline{BC}$

又 $\overline{QC}=\overline{QA}$

即 $\overline{QA}+\overline{QB}>\overline{BC}$ ——— ②

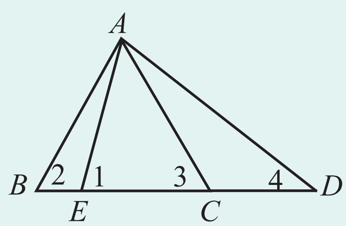
由 ①、② 得 $\overline{PA}+\overline{PB}<\overline{QA}+\overline{QB}$

教學眉批

- 第 1 題：此題結合三角形全等的概念來證明三角形的不等關係。
- 第 2 題是常見題型，教師宜多加講解。
- 在設計第 2 題的題目時，須畫出示意圖，否則可能誤會爲 A、B 兩點在 L 的異側，則此時 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 的最小值將會是 $\overline{AB}$。

會考觀測站－基礎演練題

- 如圖，$\triangle ABC$ 爲正三角形，E 點在 $\overline{BC}$ 上，D 點在 $\overline{BC}$ 的延長線上，則 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 中，哪一個角最大？$\angle 1$



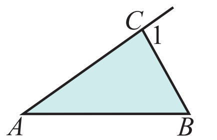
第3章 總習題

教學眉批

▪ 作核心概念題前，可提醒學生先複習習作頁碼P33、P37、P41、P44「本節性質與公式摘要」。

核心概念題 每小題6分，共24分 每小題5分，共20分

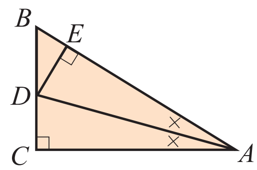
1. $\triangle ABC$ 中，若 $\angle A$ 的外角為 80°，$\angle B$ 的外角為 150°，則 $\angle C$ 的外角為 __130__ 度。



2. 如圖，若 $\angle A=35^\circ$，$\angle 1=95^\circ$，則 $\angle B=$ __60__ 度。

3. 已知 P 點在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上，$\overline{AB}=14$，$\overline{PA}=24$，則 $\overline{PB}=$ __24__ 。

4. 如圖，直角三角形 ABC 中，$\angle C=90^\circ$，$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$，$\overline{DE}\perp\overline{AB}$。若 $\overline{BD}=5$，$\overline{DE}=4$，則 $\overline{CD}=$ __4__ 。

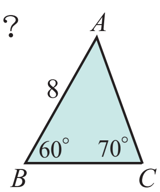


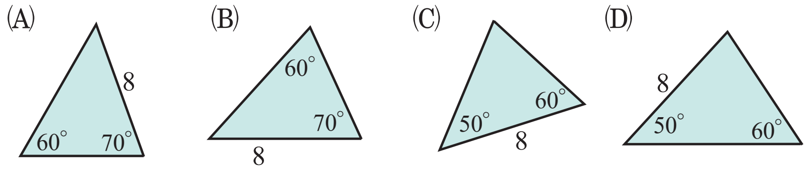
綜合演練

1. ((C)) $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=5$，$\overline{AC}=6$，則 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的大小關係為何？ 6分 5分

(A) $\angle A>\angle B>\angle C$　(B) $\angle B>\angle C>\angle A$
(C) $\angle C>\angle B>\angle A$　(D) $\angle C>\angle A>\angle B$

2. ((C)) 下列哪一個三角形與 $\triangle ABC$ 全等？ 6分 4分

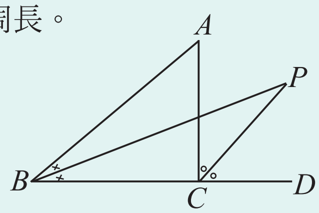




會考觀測站－基礎演練題

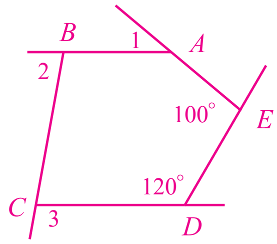
1. 已知 $\triangle ABC\cong\triangle FDE$，其中 $\angle A$ 和 $\angle F$、$\angle B$ 和 $\angle D$、$\angle C$ 和 $\angle E$ 是對應頂角，且 $\overline{BC}=8$ 公分、$\overline{FD}=5$ 公分、$\overline{AC}=10$ 公分，求 $\triangle FDE$ 的周長。
23 公分

2. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{BP}$、$\overline{CP}$ 分別平分 $\angle ABC$ 與 $\angle ACD$。若 $\angle A=50^\circ$，則 $\angle P=$？
25°



教學眉批

③ 五邊形 $ABCDE$ 中，∠1、∠2、∠3 分別為∠A、∠B、∠C 的外角，∠D＝120°，∠E＝100°。若∠1：∠2：∠3＝2：4：5，求∠A、∠B、∠C。 6分 5分



∠D 的外角為 180°－120°＝60°，

∠E 的外角為 180°－100°＝80°，

所以∠1＋∠2＋∠3＝360°－60°－80°＝220°。

設∠1＝$2x$°，∠2＝$4x$°，∠3＝$5x$°，

則 $2x+4x+5x=220$，$11x=220$，$x=20$。

所以∠1＝40°，∠2＝80°，∠3＝100°，

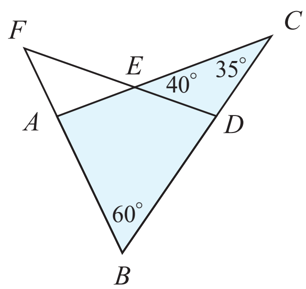
故∠A＝140°，∠B＝100°，∠C＝80°。

答：∠A＝140°，∠B＝100°，∠C＝80°。

④ 如圖，A、D 兩點分別在 $\overline{BF}$ 與 $\overline{BC}$ 上，$\overline{DF}$ 與 $\overline{AC}$ 相交於 E 點，∠B＝60°，∠C＝35°，∠DEC＝40°，求： 每小題 4 分，共 8 分 每小題 4 分，共 8 分

⑴ ∠BDF。

⑵ ∠F。



⑴∠BDF 為△CED 的外角，所以

∠BDF＝∠C＋∠DEC＝35°＋40°＝75°

⑵∠F＝180°－∠B－∠BDF＝180°－60°－75°＝45°

答：⑴ 75° ⑵ 45°。

■ 第 4 題：此題可引導學生觀察外角，待熟悉後，再減少引導的步驟讓學生練習相關題目。

⑤ 正十五邊形的每一個外角為 <u>24</u> 度，每一個內角為 <u>156</u> 度。 每格 4 分，共 8 分 每格 3 分，共 6 分

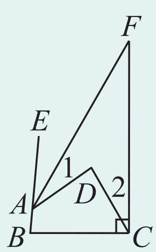
$\dfrac{360°}{15}=24°$

180°－24°＝156°

會考觀測站－基礎演練題

■ 如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AF}$ 為 ∠BAD 外角的角平分線，且 $\overline{CF}$⊥$\overline{BC}$，若∠1＝25°，∠2＝30°，∠F＝30°，求 ∠B 。

85°



■ 正二十四邊形的一個外角為 a 度，正十二邊形的一個外角為 b 度，求 $a+b$。

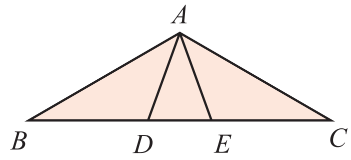
45

教學眉批

- 說明題還是要循序漸進，這個階段避免出現需要輔助線的題目。

- 第 7 題：
$\overline{CD}$ 的計算：
$\sqrt{29^2-20^2}$
$=\sqrt{841-400}$
$=\sqrt{441}$
$=21$
或
$\sqrt{29^2-20^2}$
$=\sqrt{(29+20)\times(29-20)}$
$=\sqrt{49\times9}$
$=\sqrt{49}\times\sqrt{9}$
$=7\times3$
$=21$

⑥ 如圖，$\triangle ABC$ 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}$、$\overline{AE}$ 三等分 $\angle BAC$。 每小題 3 分，共 6 分 每小題 3 分，共 6 分



(1) 完成下列空格，說明 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACE$ 全等。

在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACE$ 中，

$\overline{AB}=\overline{AC}$（已知），

$\angle B=\angle C$（理由：$\underline{\ \overline{AB}=\overline{AC}\ }$），

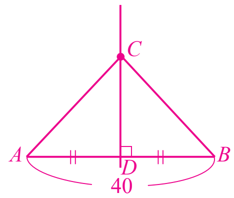
$\angle BAD=\angle CAE$（理由：$\underline{\ \overline{AD}、\overline{AE}\text{ 三等分 }\angle BAC\ }$），

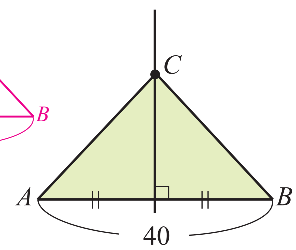
所以 $\triangle ABD\cong\triangle ACE$（$\underline{\ ASA\ }$ 全等性質）。

(2) $\overline{AD}$ 和 $\overline{AE}$ 相等嗎？為什麼？

相等。$\because$ $\triangle ABD\cong\triangle ACE$，對應邊相等，$\therefore$ $\overline{AD}=\overline{AE}$。

⑦ 已知 $\overline{AB}=40$，C 點在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上，且 $\triangle ABC$ 的周長是 98，求 $\triangle ABC$ 的面積。 6 分 6 分





由垂直平分線性質得知 $\overline{AC}=\overline{BC}$

則 $\overline{AC}=\overline{BC}=\dfrac{1}{2}(98-40)=29$

假設 $\overline{AB}$ 的中點為 D 點

$\overline{AD}=\overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{AB}=20$

$\overline{CD}=\sqrt{29^2-20^2}=21$

$\triangle ABC$ 的面積 $=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{CD}=\dfrac{1}{2}\times40\times21=420$ 　　答：420。

⑧ 設一個三角形的三邊長皆為整數，且周長為 13 公分。 每小題 5 分，共 10 分 每小題 5 分，共 10 分

(1) 如果最長邊是 6 公分，則滿足此條件的三角形有哪些？（答案不只一個）

(2) 如果最長邊是 5 公分，則滿足此條件的三角形有哪些？（答案不只一個）

(1) 最長邊為 6：

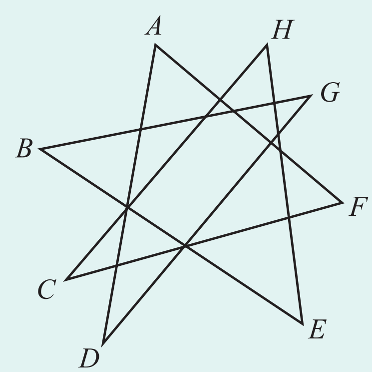
三邊長	理由
(1, 6, 6)	因為 $1<6=6$，且 $1+6>6$
(2, 5, 6)	因為 $2<5<6$，且 $2+5>6$
(3, 4, 6)	因為 $3<4<6$，且 $3+4>6$

(2) 最長邊為 5：

三邊長	理由
(3, 5, 5)	因為 $3<5=5$，且 $3+5>5$
(4, 4, 5)	因為 $4=4<5$，且 $4+4>5$

會考觀測站－精熟演練題

1. 如圖，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F+\angle G+\angle H=$？
360°



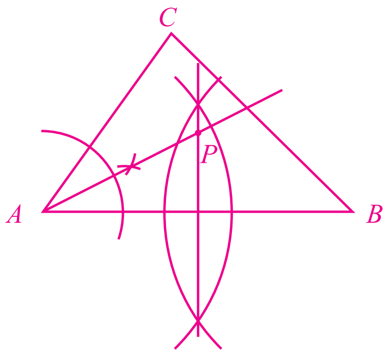
2. 兩正多邊形的邊數比為 1：2，任一內角度數比為 3：4，求此兩正多邊形的邊數。
5 邊、10 邊

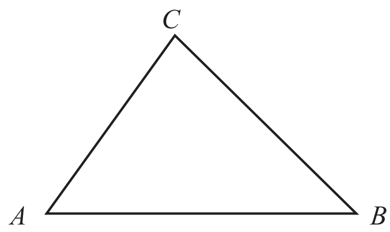
教學眉批

9 如圖，已知△ABC，利用尺規作圖，作一點 P，使得 $\overline{PA}=\overline{PB}$，且 P 點到 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的距離相等。6分 5分

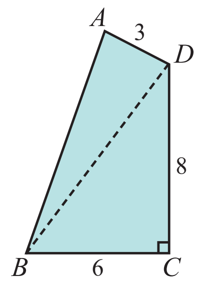
作 $\overline{AB}$ 的垂直平分線與∠A 的角平分線，

兩線交於 P 點，即為所求。





10 如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\angle C=90^\circ$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CD}=8$，$\overline{AD}=3$，求 $\overline{AB}$ 長的範圍。7分 5分



∵ $\angle C=90^\circ$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CD}=8$

∴ $\overline{BD}=\sqrt{6^2+8^2}=10$

設 $\overline{AB}=x$，

由「｜任意兩邊長的差｜＜第三邊的長＜任意兩邊長的和」，得

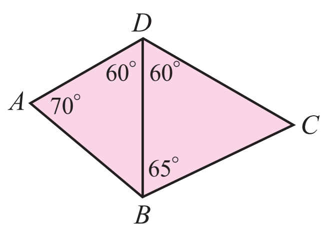
$10-3<x<10+3$

$7<x<13$

因此 $7<\overline{AB}<13$。

答：$7<\overline{AB}<13$。

11 如圖，在四邊形 $ABCD$ 中，$\angle A=70^\circ$，$\angle ADB=60^\circ$，$\angle BDC=60^\circ$，$\angle CBD=65^\circ$，則 $\overline{AB}$、$\overline{BD}$、$\overline{CD}$ 中，哪一條線段最長？7分 5分



$\angle ABD=180^\circ-60^\circ-70^\circ=50^\circ$

$\angle BCD=180^\circ-60^\circ-65^\circ=55^\circ$

在△ABD 中，∵ $\angle DAB>\angle ADB$，

∴ $\overline{BD}>\overline{AB}$（大角對大邊）。

在△BCD 中，∵ $\angle DBC>\angle BCD$，

∴ $\overline{CD}>\overline{BD}$（大角對大邊）。

故 $\overline{CD}>\overline{BD}>\overline{AB}$，因此 $\overline{CD}$ 最長。

答：$\overline{CD}$。

■ 第 11 題：

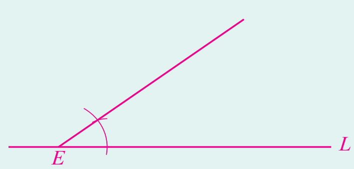
(1) 利用三角形的邊角關係比較各邊的大小。

(2) 三角形「大角對大邊」的性質一定要在同一個三角形才能作比較。

會考觀測站－基礎演練題

■ 已知△ABC，利用尺規作圖作等腰三角形 DEF，使得 $\angle E=\angle B$，$\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{AB}$。

①



②