



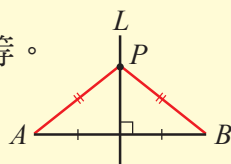
3-3 垂直平分線與角平分線

本節性質與公式摘要

1. 垂直平分線的性質：

一線段的垂直平分線上任一點到此線段的兩端點距離相等。

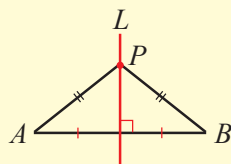
例 如圖，已知直線 L 垂直平分 $\overline{AB}$ ，
 P 為直線 L 上任意一點，則 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 。



2. 垂直平分線的判別：

一點到某線段的兩端點距離相等，則該點在此線段的垂直平分線上。

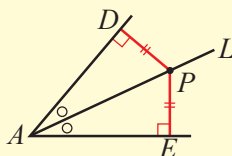
例 如圖，已知 $\overline{PA} = \overline{PB}$ ，
 則 P 點在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線 L 上。



3. 角平分線的性質：

一個角的角平分線上任一點到此角的兩邊距離相等。

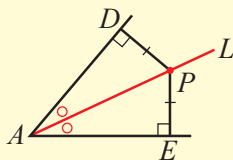
例 如圖，已知直線 L 為 $\angle DAE$ 的角平分線，
 P 為直線 L 上任意一點，若 $\overline{PD} \perp \overline{AD}$ ，
 $\overline{PE} \perp \overline{AE}$ ，則 $\overline{PD} = \overline{PE}$ 。



4. 角平分線的判別：

若某角內部的一點到此角的兩邊距離相等，則該點在此角的角平分線上。

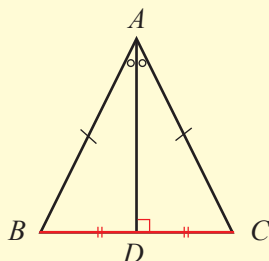
例 如圖，已知 $\overline{PD} \perp \overline{AD}$ ， $\overline{PE} \perp \overline{AE}$ ，且 $\overline{PD} = \overline{PE}$ ，
 則 P 點在 $\angle DAE$ 的角平分線 L 上。



5. 等腰三角形的頂角平分線性質：

等腰三角形的頂角平分線垂直平分底邊。

例 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，
 $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$ ，交 $\overline{BC}$ 於 D 點，
 則 $\overline{AD}$ 垂直平分 $\overline{BC}$ 。



基礎題

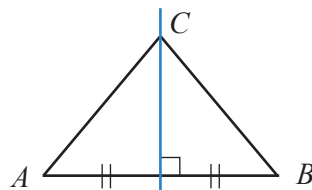
- ① 已知 $\overline{AB}=25$ ， C 點在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線上，連結 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BC}$ ，若 $\triangle ABC$ 的周長是 63，求 $\overline{AC}$ 。 **25 分** **16 分**

課 P128、129 隨堂

由垂直平分線性質得知 $\overline{AC}=\overline{BC}$

$$\text{則 } \overline{AC}=\overline{BC}=\frac{1}{2}(63-25)=19$$

答：19。



- ② 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$ ， $\overline{DE}$ 、 $\overline{DF}$ 分別為 $\triangle ABD$ 、 $\triangle ACD$ 的高。若 $\overline{AB}=6$ ， $\overline{AC}=8$ ，且 $\triangle ABD$ 的面積為 9，求 $\triangle ACD$ 的面積。 **25 分** **18 分**

課 P130 隨堂

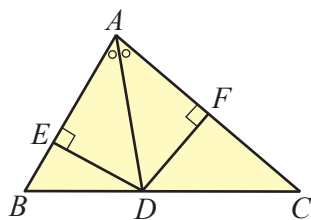
$$\triangle ABD \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{DE} = 9$$

$$\text{則 } \overline{DE} = 3$$

又 $\overline{AD}$ 是 $\angle BAC$ 的角平分線

所以由角平分線性質得知 $\overline{DE} = \overline{DF}$

$$\begin{aligned} \triangle ACD \text{ 的面積} &= \frac{1}{2} \times \overline{AC} \times \overline{DF} \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 3 \\ &= 12 \end{aligned}$$



答：12。

- ③ 如圖， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=\overline{AC}=17$ ， $\overline{BC}=16$ ，求 $\triangle ABC$ 的面積。 **25 分** **18 分**

課 P132 隨堂

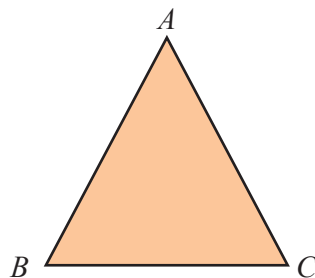
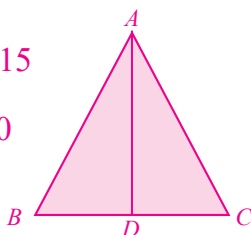
作 $\angle A$ 的角平分線，交 $\overline{BC}$ 於 D 點，

$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高

$$\overline{BD}=\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=8$$

$$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{17^2-8^2}=15$$

$$\triangle ABC \text{ 的面積} = \frac{16 \times 15}{2} = 120$$



答：120。

- ★ ④ 如圖，銳角三角形 ABC 中，直線 L 為 $\overline{BC}$ 的中垂線，直線 M 為 $\angle ABC$ 的角平分線， L 與 M 相交於 P 點。若 $\angle A = 60^\circ$ ， $\angle ACP = 21^\circ$ ，則 $\angle ABP$ 的度數為何？ **25 分** **18 分**

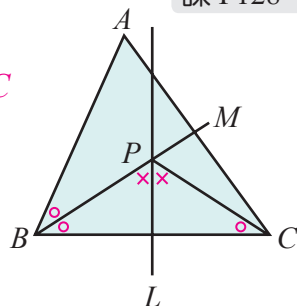
∵ 直線 L 為 $\overline{BC}$ 的中垂線 ∴ $\angle PBC = \angle PCB$

又 ∵ 直線 M 為 $\angle ABC$ 的角平分線 ∴ $\angle ABP = \angle PBC$

故 $\angle PBC = \angle PCB = \angle ABP$

$$\angle ABP = \frac{180^\circ - 60^\circ - 21^\circ}{3} = 33^\circ$$

答： 33° 。



課 P128~131

精熟題

- ① 如圖，長方形 $ABCD$ 中， E 點在 $\overline{BC}$ 上， $\angle DAE$ 的角平分線交 $\overline{CD}$ 於 F 點，已知 $\overline{AB} = 6$ 公分， $\overline{AD} = 10$ 公分， $\overline{BE} = 8$ 公分。 **每小題 10 分，共 20 分**

(1) 求 $\overline{AE}$ 的長。

(2) 求 $\overline{EF}$ 的長。

$$(1) \overline{AE} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$(2) \because \overline{AE} = \overline{AD} = 10$$

$\angle EAF = \angle DAF$ ($\overline{AF}$ 為 $\angle DAE$ 的角平分線)

$$\overline{AF} = \overline{AF}$$

∴ $\triangle AEF \cong \triangle ADF$ (SAS 全等性質)

$$\text{即 } \overline{EF} = \overline{DF}$$

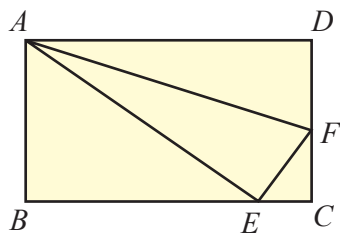
設 $\overline{EF} = \overline{DF} = x$ ，則 $\overline{FC} = 6 - x$ ， $\overline{EC} = 10 - 8 = 2$

$$x^2 = (6 - x)^2 + 2^2$$

$$12x = 40, x = \frac{10}{3}$$

答：(1) 10 公分

(2) $\frac{10}{3}$ 公分。



- ② 如圖，已知 $\triangle ABC$ ，利用尺規作圖在 $\overline{BC}$ 上取一點 P ，使得 $\angle APC = 2\angle ABC$ 。

作 $\overline{AB}$ 的垂直平分線 L ，

交 $\overline{BC}$ 於 P 點，即為所求。

10 分

