3-3 垂直平分線與角平分線

1. 垂直平分線　　2. 角平分線

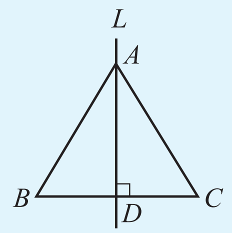
1 垂直平分線

配合習作 P43 基礎題 4

在第 2 章我們曾經以線對稱說明垂直平分線的性質，接下來將利用三角形全等性質說明垂直平分線的性質。

放大 例 1 **垂直平分線的性質** 基會

如圖，直線 L 是 $\overline{BC}$ 的垂直平分線，A 是直線 L 上任意一點，連接 $\overline{AB}$ 、$\overline{AC}$，利用三角形全等性質說明 $\overline{AB}=\overline{AC}$。



說明

在△ABD 與△ACD 中，

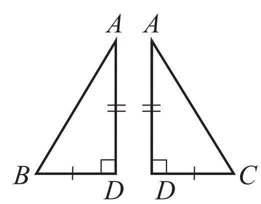
直線 L 是 $\overline{BC}$ 的垂直平分線，

$\therefore \angle ADB=\angle ADC=90^\circ$，

且 $\overline{BD}=\overline{CD}$ ，又 $\overline{AD}=\overline{AD}$（公用邊），

故△$ABD\cong$△ACD（SAS 全等性質）。

因此 $\overline{AB}=\overline{AC}$（對應邊相等）。



動態圖解

放大 **垂直平分線的性質**

一線段的垂直平分線上任一點到此線段的兩端點距離相等。

放大 隨堂練習

配合習作 P42 基礎題 1

如圖，△ABC 中，直線 L 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，

若 $\overline{AB}=14$，$\overline{BC}=15$，$\overline{AC}=13$，求△ACE 的周長。

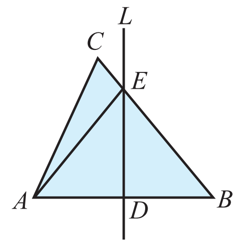
解

$\because$ 直線 L 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，E 點為 L 上的一點，

$\therefore \overline{AE}=\overline{BE}$，

故△ACE 的周長 $=\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{EA}=\overline{AC}+\overline{CE}+\overline{BE}$

$=\overline{AC}+\overline{BC}=13+15=28$



基礎

教學時數

- 2 小時

活動 1 運用各種三角形全等性質作簡單推理，並得出若一點到線段兩端點等距離，則該點在此線段的垂直平分線上。

教學眉批

- 若 A 點恰好是 $\overline{BC}$ 與直線 L 的交點，因為直線 L 平分 $\overline{BC}$，所以 A 點是 $\overline{BC}$ 的中點，即 $\overline{AB}=\overline{AC}$。

基會試題

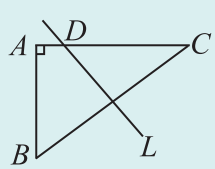
- 97 基測 II 第 10 題
- 98 基測 I 第 23 題

備課教學資源

- 補救教學．計算 Basic 3-3
- 免試加強類題本 3-3

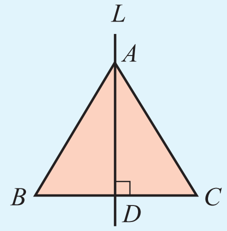
會考觀測站－基礎演練題　搭配例 1

- 如圖，△ABC 為直角三角形，其中 $\angle A=90^\circ$，L 為 $\overline{BC}$ 的中垂線，交 $\overline{AC}$ 於 D 點。若 $\overline{AB}=3$，$\overline{BC}=5$，求 $\overline{DC}$。$\frac{25}{8}$



放大 例 2 **垂直平分線的判別**

如圖，A 點是 $\overline{BC}$ 外一點，且 $\overline{AB}=\overline{AC}$，自 A 點作直線 L 垂直 $\overline{BC}$，且交 $\overline{BC}$ 於 D 點，利用三角形全等性質說明直線 L 是 $\overline{BC}$ 的垂直平分線。



說明

在 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACD$ 中，

$\because \angle ADB=\angle ADC=90^\circ$（直線 L 垂直 $\overline{BC}$），

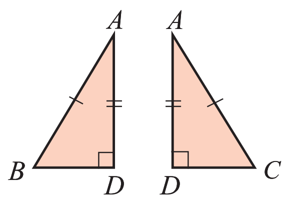
$\overline{AB}=\overline{AC}$（已知），

$\overline{AD}=\overline{AD}$（公用邊），

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$（$RHS$ 全等性質），

故 $\overline{BD}=\overline{CD}$（對應邊相等），

因此，直線 L 是 $\overline{BC}$ 的垂直平分線。



教學眉批

- 若 A 點在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{AB}=\overline{AC}$，則 A 點是 $\overline{BC}$ 的中點，因此自 A 點作直線 L 垂直 $\overline{BC}$，則直線 L 是 $\overline{BC}$ 的垂直平分線。

放大 **垂直平分線的判別**

若一點到某線段的兩端點距離相等，則該點在此線段的垂直平分線上。

放大 提問 **隨堂練習** 配合習作 P42 基礎題 1

解

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{CD}$ 是 $\overline{AB}$ 上的高，若 $\overline{AC}=\overline{CE}=13$，$\overline{AE}=10$，$\overline{BC}=15$，求 $\overline{BE}$。

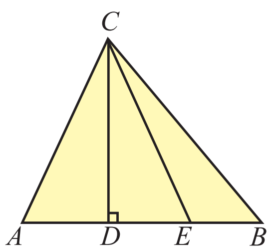
$\because \overline{AC}=\overline{CE}$ 且 $\overline{CD}\perp\overline{AE}$

$\therefore \overline{CD}$ 為 $\overline{AE}$ 的垂直平分線

$\overline{AD}=\overline{DE}=5$，$\overline{CD}=\sqrt{13^2-5^2}=12$，

$\overline{BD}=\sqrt{\overline{BC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{15^2-12^2}=9$，

$\overline{BE}=9-5=4$



關鍵提問

- $\triangle ADC$ 和哪個三角形全等呢？是依據哪一個三角形全等性質判斷呢？

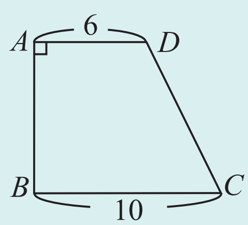
答：$\triangle EDC$，RHS 全等性質。

精熟

會考觀測站－精熟演練題 搭配例 1

(A) ■如圖，在梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}\,/\!/\,\overline{BC}$，$\angle A=90^\circ$，$\overline{AD}=6$，$\overline{BC}=10$。若作 $\overline{CD}$ 的中垂線恰可通過 B 點，則 $\overline{AB}=$？

(A) 8　(B) 9　(C) 12　(D) 18



活動 2 運用各種三角形全等性質作簡單推理，並得出若一點到角的兩邊等距離，則該點在角平分線上。

教學眉批

- 利用三角形全等的性質說明角平分線上的點到角的兩邊距離相等，其逆定理也成立。

基會試題

- 92 基測 II 第 26 題
- 98 基測 I 第 20 題

2 角平分線

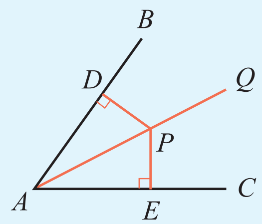
配合習作 P43 基礎題 4

接下來，我們將利用三角形全等性質說明角平分線性質。

放大

例 3 角平分線的性質 基會

如圖，$\overrightarrow{AQ}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，P 點在 $\overrightarrow{AQ}$ 上，$\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PE}\perp\overline{AC}$。利用三角形的全等性質說明 $\overline{PD}=\overline{PE}$。



說明 在 $\triangle APD$ 與 $\triangle APE$ 中，

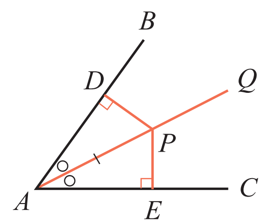
$\because \angle ADP=\angle AEP=90^\circ$（$\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PE}\perp\overline{AC}$），

$\angle PAD=\angle PAE$（P 在 $\angle BAC$ 的角平分線上），

$\overline{AP}=\overline{AP}$（公用邊），

$\therefore \triangle APD\cong\triangle APE$（$AAS$ 全等性質），

故 $\overline{PD}=\overline{PE}$（對應邊相等）。



從例題 3 可知，若 P 點在 $\angle BAC$ 的角平分線上，則 P 點到 $\angle BAC$ 兩邊的距離相等。

放大

角平分線的性質

一個角的角平分線上任一點到此角的兩邊距離相等。

課轉Q 關鍵提問

- $\triangle ABD$ 和哪個三角形全等呢？是依據哪一個三角形全等性質判斷呢？

答：$\triangle AED$，AAS 全等性質。

配合習作 P42 基礎題 2

放大 提問

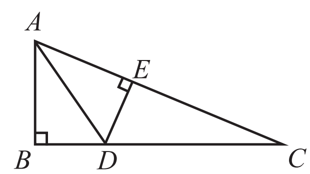
隨堂練習

解

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$，

$\angle B=\angle AED=90^\circ$，$\overline{AB}=15$，$\overline{AC}=39$，$\overline{DE}=10$，

求 $\overline{CD}$ 的長。



$\because \overline{AD}$ 是 $\angle BAC$ 的角平分線 $\therefore \overline{AB}=\overline{AE}=15$

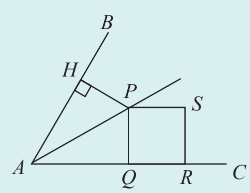
$\overline{CE}=39-15=24$

$\because \angle AED=90^\circ=\angle CED$ $\therefore \overline{CD}=\sqrt{\overline{CE}^2+\overline{DE}^2}=\sqrt{24^2+10^2}=26$

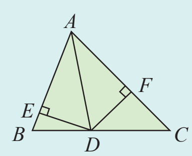
基礎

會考觀測站－基礎演練題　搭配例 3

1. 如圖，直線 PA 是 $\angle BAC$ 的角平分線，且 $\overline{PH}\perp\overline{AB}$，$Q$、$R$ 兩點在 $\overline{AC}$ 上，四邊形 $PQRS$ 爲正方形，若 $\overline{PH}=5$，求四邊形 $PQRS$ 的面積。25



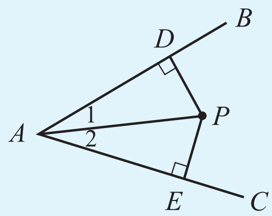
2. 如圖，$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$，$\overline{DE}$、$\overline{DF}$ 分別垂直於 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$，已知 $\overline{AB}=6$，$\overline{AC}=8$，且 $\triangle ABC$ 面積爲 14，則 $\overline{DE}=$ __2__ 。



動態圖解

放大 例 4 **角平分線的判別**

如圖，P 點為 $\angle BAC$ 內部一點，$\overline{PD} \perp \overline{AB}$，$\overline{PE} \perp \overline{AC}$，$\overline{PD}=\overline{PE}$ 。利用三角形的全等性質說明 $\overline{AP}$ 平分 $\angle BAC$。



說明 在 $\triangle APD$ 與 $\triangle APE$ 中，

$\because \angle ADP=\angle AEP=90^\circ$（$\overline{PD}\perp\overline{AB}$，$\overline{PE}\perp\overline{AC}$）

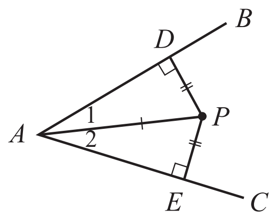
$\overline{PD}=\overline{PE}$（已知）

$\overline{AP}=\overline{AP}$（公用邊）

$\therefore \triangle APD \cong \triangle APE$（$RHS$ 全等性質），

故 $\angle 1=\angle 2$（對應角相等），

因此，$\overline{AP}$ 平分 $\angle BAC$。



從例題 4 可知，若 P 點為 $\angle BAC$ 內部一點，且 P 點到 $\angle BAC$ 兩邊的距離相等，則 P 點在 $\angle BAC$ 的角平分線上。

放大 **角平分線的判別**

若某角內部的一點到此角的兩邊距離相等，則該點在此角的角平分線上。

放大 提問 **隨堂練習**

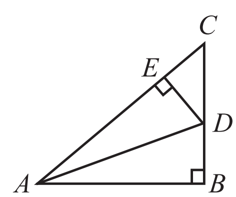
解 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle B=\angle AED=90^\circ$，$\overline{DB}=\overline{DE}$，$\angle C=50^\circ$，求 $\angle ADB$ 的度數。

$\because \angle B=\angle AED=90^\circ$ 且 $\overline{DB}=\overline{DE}$

$\therefore \overline{AD}$ 為 $\angle CAB$ 的角平分線

$\angle CAB=180^\circ-50^\circ-90^\circ=40^\circ$，$\angle DAB=20^\circ$

$\angle ADB=180^\circ-90^\circ-20^\circ=70^\circ$



基會

教學眉批

■ 教師可再利用線對稱幫助學生熟悉中垂線及角平分線性質。

課轉Q 關鍵提問

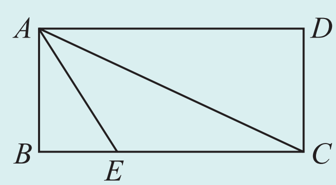
■ $\triangle AED$ 和哪個三角形全等呢？是依據哪一個三角形全等性質判斷呢？

答：$\triangle ABD$，RHS 全等性質。

98 基測 I 第 20 題 搭配例 3

(B) ■ 如圖，長方形 $ABCD$ 中，E 點在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{AE}$ 平分 $\angle BAC$。若 $\overline{BE}=4$，$\overline{AC}=15$，則 $\triangle AEC$ 面積為何？

(A) 15 (B) 30 (C) 45 (D) 60



活動 3 運用各種三角形全等性質作簡單推理，並得出等腰三角形的頂角平分線垂直平分底邊。

教學眉批

- 透過例題 5，可推得「等腰三角形的頂角角平分線會垂直平分底邊」。
- $\overline{AD}$ 是△ABC 的對稱軸。
- △ABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，教師可視學生程度補充：
  (1)若 D 是 $\overline{BC}$ 中點，連 $\overline{AD}$，則△ABD≅△ACD（SSS 全等）
  (2)若 $\overline{AD}$ 是 $\overline{BC}$ 上的高，則△ABD≅△ACD（RHS 全等）
- 事實上，例 5 及(1)、(2)中的 $\overline{AD}$ 是相同的線段，但因為不同的前提，會有不同的推論過程。

放大 等腰三角形的頂角平分線

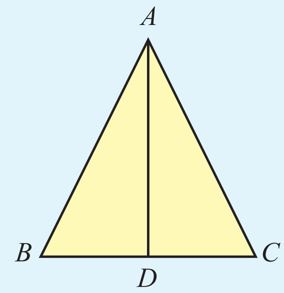
我們可以利用三角形全等性質，說明等腰三角形的頂角平分線性質。

例 5 等腰三角形的頂角平分線性質

如圖，△ABC 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}$ 平分∠BAC，交 $\overline{BC}$ 於 D 點。

(1)說明△ABD 和 △ACD 全等。

(2)說明 $\overline{AD}$ 垂直平分 $\overline{BC}$。



說明 解

(1)在△ABD 與△ACD 中，

∵ $\overline{AB}=\overline{AC}$（已知），

∠BAD＝∠CAD（$\overline{AD}$ 平分∠BAC），

$\overline{AD}=\overline{AD}$（公用邊），

∴△ABD ≅ △ACD（SAS 全等性質）。

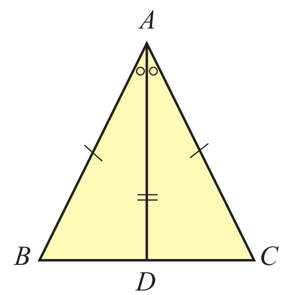
(2)∵△ABD ≅ △ACD，

∴∠ADB＝∠ADC（對應角相等），

$\overline{BD}=\overline{CD}$（對應邊相等），

又∵∠ADB＋∠ADC＝180°，∴∠ADB＝∠ADC＝90°，

因此 $\overline{AD}$ 垂直平分 $\overline{BC}$。



動態圖解

放大 等腰三角形的頂角平分線性質

等腰三角形的頂角平分線垂直平分底邊。

放大 隨堂練習

配合習作 P42 基礎題 3

解

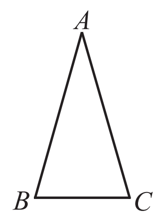
△ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=25$，$\overline{BC}=14$，求△$ABC$ 的面積。

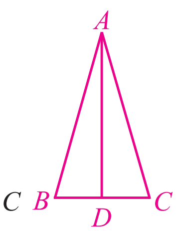
作∠A 的角平分線，交 $\overline{BC}$ 於 D 點，$\overline{AD}$ 為 $\overline{BC}$ 上的高

$\overline{BD}=\overline{CD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=7$

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AC}^2-\overline{CD}^2}=\sqrt{25^2-7^2}=24$

△ABC 的面積＝$\frac{14\times24}{2}=168$





加強

備課教學資源

- 隨堂輕鬆考第 26 回
- 免試基礎講堂 3-3
- 免試精熟本 3-3

會考觀測站－加強演練題 搭配例 5

- △ABC 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=13$，$\overline{BC}=10$，求△$ABC$ 的面積。

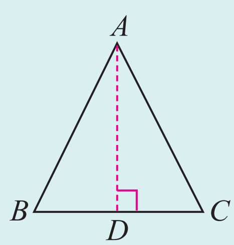
∵△ABC 為等腰三角形

∴$\overline{AD}$ 垂直平分 $\overline{BC}$，$\overline{BD}=\frac{1}{2}\overline{BC}=5$

$\overline{AD}=\sqrt{\overline{AB}^2-\overline{BD}^2}=\sqrt{13^2-5^2}=12$

△ABC 的面積＝$\overline{BC}\times\overline{AD}\div2=10\times12\div2=60$

答：60。



動態圖解

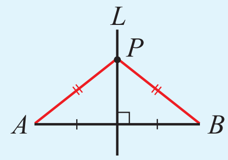
重點回顧

放大 1 垂直平分線的性質：

一線段的垂直平分線上任一點到此線段的兩端點距離相等。

例 如圖，已知直線 L 垂直平分 $\overline{AB}$，

P 為直線 L 上任意一點，則 $\overline{PA}=\overline{PB}$。

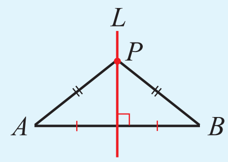


放大 2 垂直平分線的判別：

若一點到某線段的兩端點距離相等，則該點在此線段的垂直平分線上。

例 如圖，已知 $\overline{PA}=\overline{PB}$，

則 P 點在 $\overline{AB}$ 的垂直平分線 L 上。



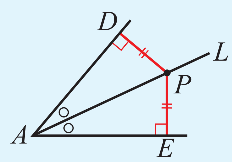
放大 3 角平分線的性質：

一個角的角平分線上任一點到此角的兩邊距離相等。

例 如圖，已知直線 L 為 $\angle DAE$ 的角平分線，

P 為直線 L 上任意一點，若 $\overline{PD}\perp\overline{AD}$，$\overline{PE}\perp\overline{AE}$，

則 $\overline{PD}=\overline{PE}$。

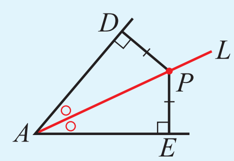


放大 4 角平分線的判別：

若某角內部的一點到此角的兩邊距離相等，則該點在此角的角平分線上。

例 如圖，已知 $\overline{PD}\perp\overline{AD}$，$\overline{PE}\perp\overline{AE}$，

且 $\overline{PD}=\overline{PE}$，則 P 點在 $\angle DAE$ 的角平分線 L 上。



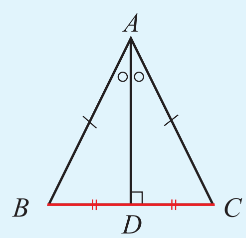
放大 5 等腰三角形的頂角平分線性質：

等腰三角形的頂角平分線垂直平分底邊。

例 如圖，$\triangle ABC$ 為等腰三角形，$\overline{AB}=\overline{AC}$，

$\overline{AD}$ 平分 $\angle BAC$，交 $\overline{BC}$ 於 D 點，

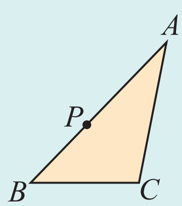
則 $\overline{AD}$ 垂直平分 $\overline{BC}$。



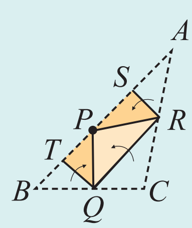
精熟

會考觀測站－精熟演練題　搭配重點回顧

- 圖一為三角形紙片 ABC，$\overline{AB}$ 上有一點 P。已知將 A、B、C 往內摺至 P 時，出現摺線 $\overline{SR}$、$\overline{TQ}$、$\overline{QR}$，其中 $QRST$ 四點會分別在 $\overline{BC}$、$\overline{AC}$、$\overline{AP}$、$\overline{BP}$ 上，如圖二所示。若 $\triangle ABC$、四邊形 $PTQR$ 的面積分別為 24、8，求 $\triangle PRS$ 的面積。4



圖一



圖二

活化體驗站

趣味數學

- 某一天，醫院裡來了三名新患者，院方便找一名醫生來評估三人的病情。醫生問第一個病人：「3 乘以 3 等於多少？」第一個病人回答：「五百！」醫生問第二個病人：「3 乘以 3 等於多少？」第二個病人回答：「禮拜五！」醫生問第三個病人：「3 乘以 3 等於多少？」第三個病人回答：「9！」醫生：「非常好！能不能告訴我你是怎麼算出的？」第三個病人：「這很簡單，我只是將五百除以禮拜五就得到 9。」

3-3 自我評量

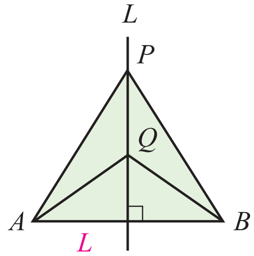
活化體驗站

趣味數學

- 哪個數字最懶惰？哪個數字最勤快？

1 最懶惰，2 最勤快。因為「一不做，二不休」。

放大 解 **1** 如圖，直線 L 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，P、Q 兩點皆在直線 L 上，在空格中，填入適當的文字或符號，說明 $\triangle APQ \cong \triangle BPQ$。 課 P128～129 例 1～2



說明：

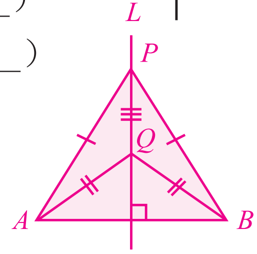
在 $\triangle APQ$ 與 $\triangle BPQ$ 中，

$\because \overline{PA} = \overline{PB}$（理由：直線 L 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分線）

$\overline{QA} = \overline{QB}$（理由：直線 L 是 $\overline{AB}$ 的垂直平分線）

$\overline{PQ} = \overline{PQ}$（公用邊）

$\therefore \triangle APQ \cong \triangle BPQ$（SSS 全等性質）。



放大 解 **2** 如圖，四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{AD}=20$，$\overline{BC}=\overline{CD}=13$，$\overline{BD}=24$，求 $\overline{AC}$。 課 P128～129 例 1～2

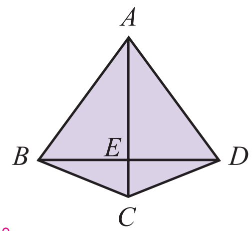
$\because \overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{CD}$，

$\therefore \overline{AC}$ 垂直平分 $\overline{BD}$，

故 $\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{BD}=\frac{1}{2}\times 24=12$，

且 $\overline{AE}=\sqrt{20^2-12^2}=16$，$\overline{CE}=\sqrt{13^2-12^2}=5$，

因此 $\overline{AC}=\overline{AE}+\overline{CE}=16+5=21$



答：21。

放大 解 **3** 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$，$\angle C=\angle BED=90^\circ$，$\overline{AB}=15$，$\overline{CD}=4$，求 $\triangle ABD$ 的面積。 課 P130～131 例 3～4

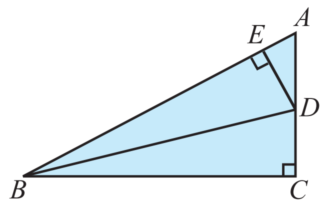
$\because \overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$

$\therefore \overline{CD}=\overline{DE}=4$

$\triangle ABD$ 的面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{DE}$

$=\frac{1}{2}\times 15\times 4$

$=30$



答：30。

基會

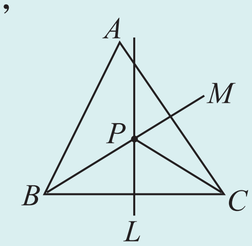
備課教學資源

- 會考100分 3-3
- 會考基礎卷 3-3
- 會考精熟卷 3-3
- 段考精選試題 3-3

103 會考第 18 題 搭配自評第 1 題

（C）▪ 如圖，銳角三角形 ABC 中，直線 L 為 $\overline{BC}$ 的中垂線，直線 M 為 $\angle ABC$ 的角平分線，L 與 M 相交於 P 點。若 $\angle A=60^\circ$，$\angle ACP=24^\circ$，則 $\angle ABP$ 的度數為何？

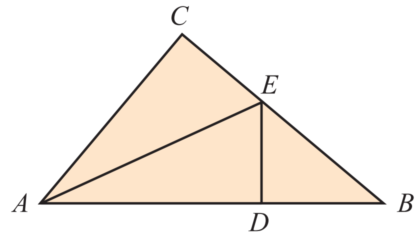
(A) 24　(B) 30　(C) 32　(D) 36



放大 解

4 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle C=\angle ADE=90^\circ$，$\overline{CE}=\overline{DE}$，$\angle B=40^\circ$，求 $\angle EAD$ 的度數。

課 P130～131 例 3～4



$\because \angle C=\angle ADE=90^\circ$，$\overline{CE}=\overline{DE}$，

$\therefore \overline{AE}$ 平分 $\angle CAD$，

又 $\angle CAD=180^\circ-\angle B-\angle C$

$=180^\circ-40^\circ-90^\circ$

$=50^\circ$

$\therefore \angle EAD=\dfrac{1}{2}\angle CAD$

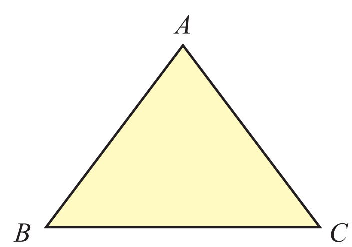
$=\dfrac{1}{2}\times 50^\circ=25^\circ$

答：25°。

放大 解

5 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}=25$，$\overline{BC}=30$，求 $\triangle ABC$ 在 $\overline{BC}$ 邊上的高。

課 P132 例 5



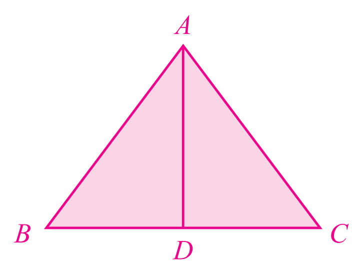
作 $\overline{BC}$ 上的高 $\overline{AD}$，

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$，

$\therefore \overline{BD}=\dfrac{1}{2}\overline{BC}=\dfrac{1}{2}\times 30=15$

故 $\overline{AD}=\sqrt{25^2-15^2}=20$

答：20。



基會

基會試題

- 103 會考第 18 題
- 104 會考第 18 題
- 105 會考第 12 題

105 會考第 12 題 搭配自評第 4 題

(D) ▪ 如圖，$\triangle ABC$ 中，D、E 兩點分別在 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 上，$\overline{DE}$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線，$\overline{BD}$ 為 $\angle ADE$ 的角平分線。若 $\angle A=58^\circ$，則 $\angle ABD$ 的度數為何？

(A) 58 (B) 59 (C) 61 (D) 62