教學時數

- 5 小時

活動 1 理解全等三角形的意義與符號的記法。

教學眉批

- 特別強調兩個三角形全等時，必須是對應邊與對應角才會相等。

3-2 三角形的全等

1. 全等三角形　2. 三角形的全等性質
3. 全等三角形的應用

動態圖解

1 全等三角形

對應能力指標 8-s-04

國小時，曾經利用剪紙與疊合的方法判別兩個三角形是否全等。

如果兩個三角形可以完全疊合，稱這兩個三角形**全等**。此時疊合在一起的頂點，稱為**對應頂點**；疊合在一起的角，稱為**對應角**；疊合在一起的邊，稱為**對應邊**。

放大

全等三角形的對應關係

兩個全等三角形的對應邊相等，對應角也相等。

圖 3-19

如圖 3-19，$\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 全等，可以記為「$\triangle ABC \cong \triangle DEF$」，其中符號「$\cong$」讀作「全等於」。

若「A 和 D」、「B 和 E」、「C 和 F」是三組對應頂點，則

$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，$\overline{AC}=\overline{DF}$（對應邊相等），

$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$（對應角相等）。

如圖 3-20，利用相同的記號標示相等的對應邊與對應角，可以更清楚觀察到對應的關係。

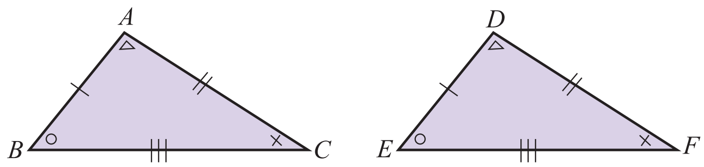


圖 3-20

加強

備課教學資源

- 補救教學．計算 Basic 3-2
- 免試加強類題本 3-2

會考觀測站－加強演練題　搭配課文

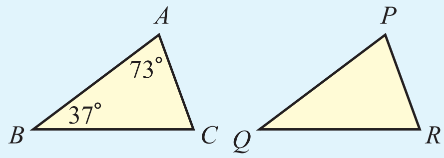
（(D)）▪若 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，且 A 和 D 為對應點，B 和 E 為對應點，則下列敘述何者正確？

(A) $\angle A=\angle F$　(B) $\angle C=\angle E$　(C) $\overline{BC}=\overline{DE}$　(D) $\overline{AC}=\overline{DF}$

「$\triangle ABC \cong \triangle DEF$」表示$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 全等，不一定表示頂點 A 的對應頂點是 D，頂點 B 的對應頂點是 E，頂點 C 的對應頂點是 F。但在本教材中，若未特別說明時，則「$\triangle ABC \cong \triangle DEF$」即表示「$A$ 和 D」、「B 和 E」、「C 和 F」是三組對應頂點。

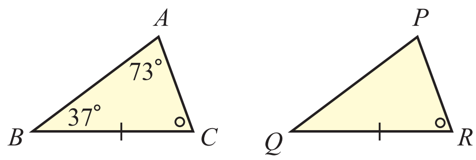
放大 例 1 三角形的全等

如圖，$\triangle ABC \cong \triangle PQR$，且 A、B、C 的對應頂點分別是 P、Q、R。若$\angle A=73^\circ$，$\angle B=37^\circ$，$\overline{QR}=4$，求：



(1) $\angle P$。 (2) $\angle R$。 (3) $\overline{BC}$ 的長。

解



(1) $\because \triangle ABC$ 與$\triangle PQR$ 全等，

$\therefore \angle P=\angle A=73^\circ$。

(2) $\because \triangle ABC$ 與$\triangle PQR$ 全等，

$\therefore \angle R=\angle C=180^\circ-\angle A-\angle B$

$=180^\circ-73^\circ-37^\circ=70^\circ$

(3) $\because \triangle ABC$ 與$\triangle PQR$ 全等，

$\therefore \overline{BC}=\overline{QR}=4$。

符號「$\because$」表示「因為」，
符號「$\therefore$」表示「所以」。

配合習作 P38 基礎題 1

放大提問 隨堂練習

解

如果$\triangle ABC \cong \triangle PQR$，且 A、B、C 的對應頂點分別是 P、Q、R。其中$\angle A=90^\circ$，$\overline{QR}=10$，$\overline{PQ}=6$，求：

(1) $\triangle ABC$ 的周長。

(1) $\because \triangle ABC \cong \triangle PQR$
$\therefore \overline{BC}=\overline{QR}=10$，$\overline{AB}=\overline{PQ}=6$
$\because \angle A=90^\circ$
$\therefore \overline{AC}=\overline{PR}=\sqrt{10^2-6^2}=8$
$\triangle ABC$ 的周長$=6+8+10=24$

(2) $\triangle PQR$ 的面積。

(2) $\because \angle P=\angle A=90^\circ$
$\therefore \triangle PQR$ 的面積$=\dfrac{6\times 8}{2}=24$

對於任意兩個三角形，是否需要同時檢驗「三組對應邊皆分別相等」與「三組對應角皆分別相等」，才可以確認這兩個三角形全等？

接下來將探討至少需要哪些條件，才可確定出兩個三角形全等。為了方便記錄檢驗的條件，我們用「S」代表「邊」(side)，用「A」代表「角」(angle)。

基礎

教學眉批

- 在本教材若沒有特別說明，全等三角形的記號，須依照對應相等的順序來記，例如$\triangle ABC$與$\triangle DEF$全等，其中 A 和 D、B 和 E、C 和 F 是三組對應頂點，可記為「$\triangle ABC \cong \triangle DEF$」。
- 三角形的全等可經由全等性質判別，但多邊形的全等，則必須符合下列條件：
  (1) 每組對應邊相等
  (2) 每組對應角相等
  以上兩個條件缺一不可。因此證明多邊形全等是比較困難的，不宜讓學生練習。

轉Q 關鍵提問

- $\triangle ABC$ 的面積是多少呢？
  答：24。

會考觀測站－基礎演練題 搭配例 1

1. $\triangle ABC \cong \triangle PQR$，且 A 和 P、B 和 Q、C 和 R 是三組對應頂點。若$\angle A=40^\circ$，$\angle Q=60^\circ$，$\overline{AB}=6$ 公分，求：
   (1) $\angle C$ 及$\angle P$ (2) $\overline{PQ}$ 的長
   (1) $\angle C=80^\circ$，$\angle P=40^\circ$ (2) 6 公分
2. $\triangle ABC \cong \triangle PQR$，$\angle A=90^\circ$，$\overline{PQ}=5$ 公分，$\triangle ABC$ 的面積為 30 平方公分，求$\triangle ABC$ 的周長。30 公分

動態圖解 GGB

2 三角形的全等性質

對應能力指標 8-s-07

SSS 全等性質

如圖 3-21，已知一個三角形的三邊長分別為 a、b、c，利用以下尺規作圖的作法，在 作圖區 畫出一個三角形，使得此三角形的三邊長分別等於 a、b、c 的長。

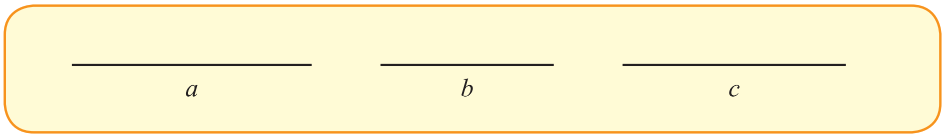


圖 3-21

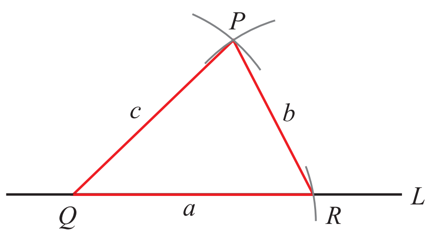
放大 作法：

(1)畫一條直線 L，並在 L 上取 Q、R 兩點，使得 $\overline{QR}=a$。

(2)分別以 Q、R 為圓心，c、b 長為半徑，在 L 的同側畫兩弧。
設兩弧相交於 P 點。

(3)連接 $\overline{PQ}$、$\overline{PR}$，則△PQR 就是所求的三角形。

作圖區



由上面的作圖過程中可知，只要知道三角形的三邊長，即可用尺規作圖畫出一個三角形。這樣的作圖方法，稱為 ***SSS* 作圖**。

活動 2 已知三角形的三邊，利用尺規畫出此三角形，並驗證「若有兩個三角形的三邊對應相等，則此兩個三角形必全等」，即 *SSS* 全等性質。

教學眉批

- *SSS* 全等從作圖教起，並利用隨堂練習從不同的邊開始作圖，讓學生彼此互相比較，看看所畫出來的三角形是否全等。
- *SSS* 作圖不宜只是記憶全等的規則，應讓學生經由作圖過程，了解兩個三角形會全等。
- 教師可以利用課堂上任意畫一個三角形，要求學生利用尺規作圖的方法畫出一個三角形，使它的三邊長分別與原三角形的三邊長相等，並檢驗這兩個三角形是否全等。

基礎

會考觀測站－基礎演練題 搭配課文

- 已知 △$ABC\cong$△DEF，若 $\overline{AB}=(2x+3)$ 公分，$\overline{BC}=(4x-2)$ 公分，$\overline{AC}=(3x)$ 公分，$\overline{DE}=(x+8)$ 公分，求：
(1) x (2) △DEF 的周長
(1) 5 (2) 46 公分

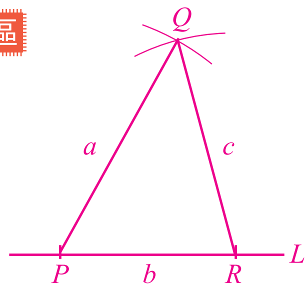
放大

探索活動 *SSS* 作圖

解

模仿前頁的作法，但由其他不同的邊開始操作（例如：先在 L 上作出與線段 b 或 c 等長的邊），在下面的 作圖區 畫出△PQR，並利用附件 9 中的(1)，以疊合的方式，觀察是否與前頁所畫的△PQR 全等。是。

作圖區



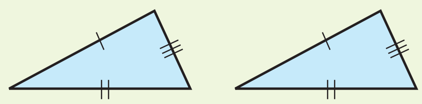
(1)畫一直線 L，並在 L 上取 P、R 兩點，使得 $\overline{PR}=b$。
(2)分別以 P、R 兩點為圓心，a、c 長為半徑，在 L 的同側畫兩弧。設兩弧交於 Q 點。
(3)連接 $\overline{QP}$、$\overline{QR}$，則△PQR 即為所求。

由上述探索活動可以發現，利用一個三角形的三線段長，以 *SSS* 作圖方法所作出的三角形都會全等。

放大

SSS 全等性質

若兩個三角形的三邊對應相等，則這兩個三角形全等。



放大 解

隨堂練習

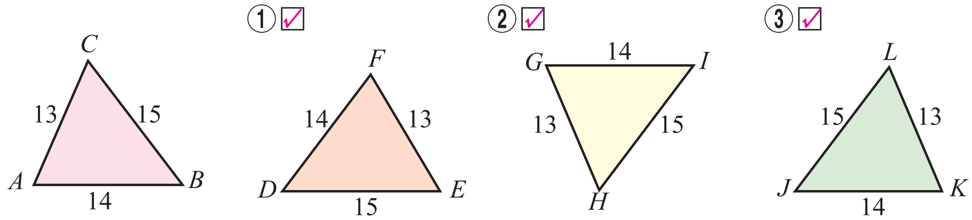
互動

配合習作 P38 基礎題 2(3)

回答下列問題：

(1) 利用 *SSS* 全等性質，勾選出哪些三角形與△ABC 全等。（複選）

①☑　②☑　③☑



解 提問

(2) 寫出這些全等的三角形中，∠A 的對應角。

①∠F　②∠G　③∠K。

加強

教學眉批

- 探索活動應讓學生操作，印象才會深刻。
- *SSS*作圖是全等作圖中最基礎的，宜讓學生多加練習。
- 教師可使用備課用書後附的附件 9 於課堂操作。

補充資料

全等：
在幾何上，若兩個幾何圖形的形狀及大小完全相同，則稱這兩個圖形是全等的圖形。全等是相似的一種特例，當相似圖形的對應邊比例是 1，則兩圖形全等。

基會試題

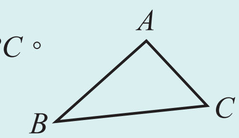
- 107 會考第 11 題

轉Q 關鍵提問

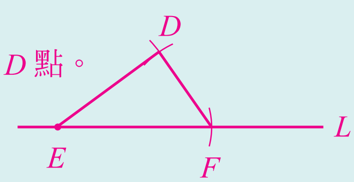
- 在此題中，∠B 的對應角是哪幾個？
答：∠D、∠I、∠J。

會考觀測站－加強演練題　搭配課文

- 已知△ABC，利用 *SSS* 作圖，作一△DEF，使得△$DEF \cong$△ABC。



作法：
(1)畫一直線 L，並在 L 上取一點 E。
(2)以 E 點為圓心，$\overline{BC}$ 為半徑畫弧，交 L 於 F 點。
(3)分別以 E、F 兩點為圓心，$\overline{AB}$ 及 $\overline{AC}$ 為半徑畫弧，交於 D 點。
(4)連接 $\overline{DE}$、$\overline{DF}$，則△DEF 即為所求。



備課教學資源

- 隨堂輕鬆考第 22 回

動態圖解

活動 3 已知三角形的兩邊及其夾角，利用尺規畫出此三角形，並驗證「若有兩個三角形的兩邊及其夾角對應相等，則此兩個三角形必全等」，即 SAS 全等性質。

GGB SAS 全等性質

對應能力指標 8-s-07

如圖 3-22，已知一個三角形的兩個邊長分別為 a 和 b，且這兩邊所夾的角等於 $\angle 1$。利用以下尺規作圖的作法，在 作圖區 畫出一個三角形，使得此三角形有兩個邊長分別等於 a 和 b，且這兩邊所夾的角等於 $\angle 1$。

兩個邊所夾的角稱為這兩個邊的夾角。

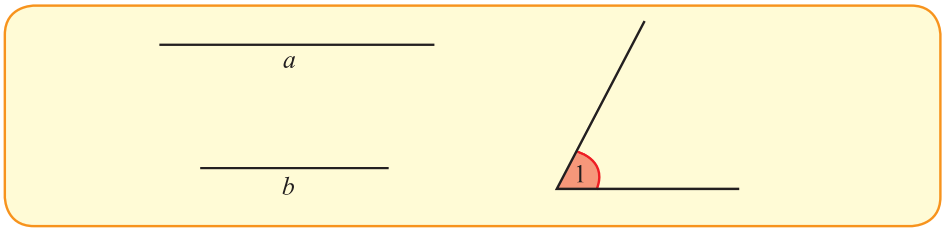


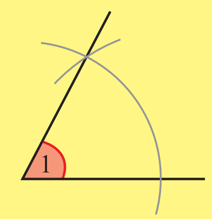
圖 3-22

教學眉批

- SAS 全等從作圖教起，並利用隨堂練習從不同的邊開始作圖，讓學生彼此互相比較，看看所畫出來的三角形是否全等。
- SAS 作圖不宜只是記憶全等的規則，應讓學生經由作圖過程，了解兩個三角形會全等。

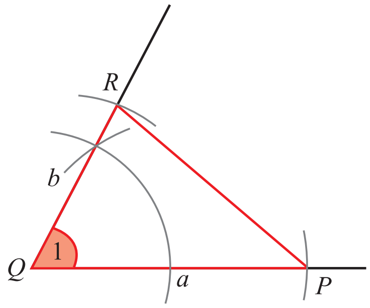
放大 作法：

(1) 作 $\angle Q=\angle 1$。
(2) 在 $\angle Q$ 的一邊取一點 P，使 $\overline{QP}=a$。
(3) 在 $\angle Q$ 的另一邊取一點 R，使 $\overline{QR}=b$。
(4) 連接 $\overline{PR}$，則 $\triangle PQR$ 就是所求的三角形。



在圖 3-22 的作圖痕跡。

解 作圖區



由上面的作圖過程中可知，只要知道三角形的兩個邊長與此兩邊的夾角，即可用尺規作圖畫出一個三角形。這樣的作圖方法，稱為 SAS 作圖。

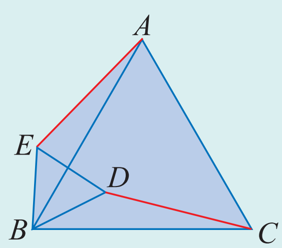
精熟

會考觀測站－精熟演練題　搭配課文

- 如圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle BDE$ 皆為正三角形。

(1) 哪一個全等性質可以說明 $\triangle ABE \cong \triangle CBD$？
□SSS ☑SAS □ASA □AAS □RHS

(2) $\overline{CD}$ 和 $\overline{AE}$ 是否相等？為什麼？
是，對應邊相等

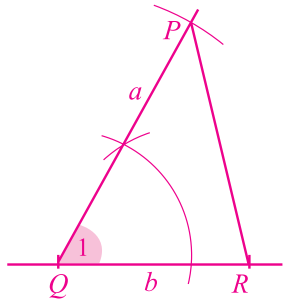


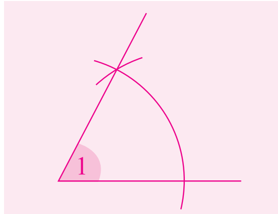
放大 解

探索活動 *SAS* 作圖 基會

仿照前頁的作法，但由其他不同的邊開始操作(例如：先作與 b 等長的線段當作角的一邊，再以此線段的端點為頂點作∠1，然後在角的另一邊取一點，使得頂點到此點的線段長等於 a)，在下面的 作圖區 畫出一個△PQR，並利用附件 9 中的(2)，以疊合的方式，觀察是否與前頁所畫的△PQR 全等。

作圖區 是。





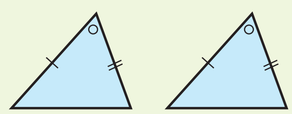
在圖 3-22 的作圖痕跡。

由上述探索活動可以發現，利用一個三角形的兩邊與此兩邊的夾角，以 *SAS* 作圖方法所作出的三角形都會全等。

放大

SAS 全等性質

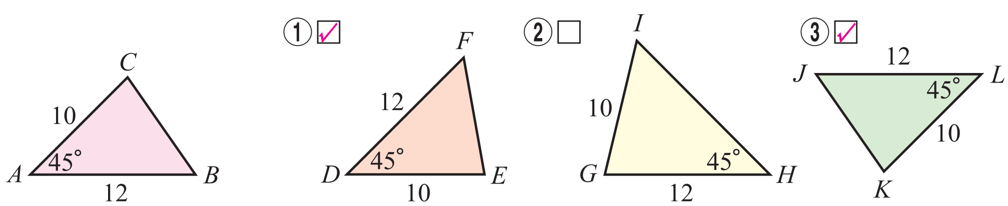
若兩個三角形有兩邊和它們的夾角皆對應相等，則這兩個三角形全等。



放大 隨堂練習 互動　　配合習作 P38 基礎題 2(2)

回答下列問題：

解 (1) 利用 *SAS* 全等性質，勾選出哪些三角形與△ABC 全等。(複選)



解 (2) 寫出這些全等的三角形中，∠B 的對應角。

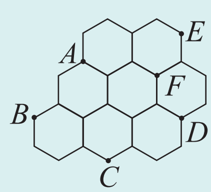
提問 ①∠F　③∠J。

基會

102 基測第 18 題　搭配課文

((B)) ▪ 右圖為八個全等正六邊形緊密排列在同一平面上的情形。根據圖中標示的各點位置，判斷△ACD 與下列哪一個三角形全等？

(A) △ACF　(B) △ADE　(C) △ABC　(D) △BCF



教學眉批

- 探索活動應讓學生操作，印象才會深刻。
- 教師可使用備課用書後附的附件 9 於課堂操作。

基會試題

- 97 基測 I 第 31 題
- 102 基測第 18 題

補充資料

全等變換：
不改變圖形形狀、大小的幾何變換稱為全等變換。其中包括平移、旋轉、軸對稱。
(1)平移：將一個圖形按一定的方向移動一定的距離。
(2)旋轉：將一個圖形繞一個頂點轉動一定的角度。
(3)軸對稱：將一圖形上的所有點以一直線為對稱軸做對稱點，則對稱點所形成的圖形，就稱為原圖形的軸對稱圖形。

轉Q 關鍵提問

- 在此題中，∠C 的對應角是哪幾個？
答：∠E、∠K。

活動 4 已知三角形的兩角及其夾邊，利用尺規畫出此三角形，並驗證「若有兩個三角形的兩角及其夾邊對應相等，則此兩個三角形必全等」，即*ASA*全等性質。

教學眉批

- *ASA*全等從作圖教起，並利用隨堂練習從不同的角開始作圖，讓學生彼此互相比較，看看所畫出來的三角形是否全等。
- *ASA*作圖不宜只是記憶全等的規則，應讓學生經由作圖過程，了解兩個三角形會全等。

動態圖解

GGB

ASA 全等性質

對應能力指標 8-*s*-07

如圖 3-23，已知一個三角形的兩個內角分別等於∠1 和∠2，且這兩個角所夾的邊長等於 a。利用以下尺規作圖的作法，在 作圖區 畫出一個三角形，使得此三角形有兩個內角分別等於∠1 和∠2，且這兩個角所夾的邊長等於 a。

兩個角所夾的邊稱為這兩個角的**夾邊**。

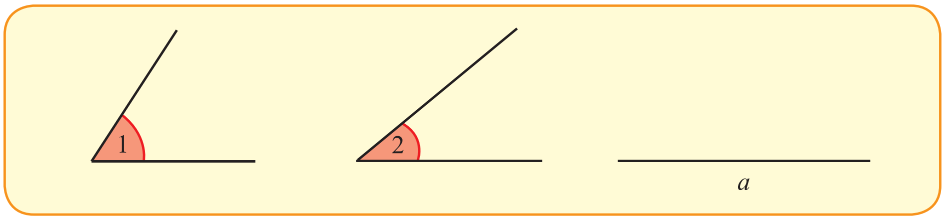


圖 3-23

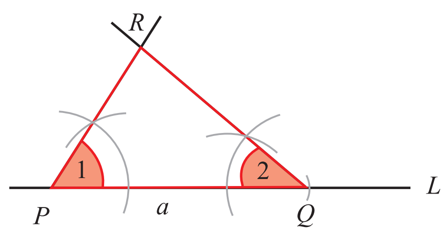
放大 作法：

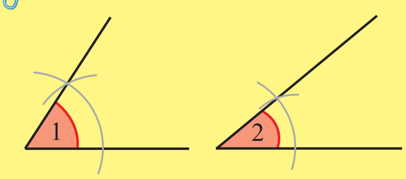
(1) 畫一條直線 L，在 L 上作 $\overline{PQ}$，使 $\overline{PQ}=a$。

(2) 分別以 P、Q 為頂點，$\overline{PQ}$ 為一邊，在 L 的同側作 $\angle P=\angle 1$，$\angle Q=\angle 2$。

(3) 將 $\angle P$ 和 $\angle Q$ 的另一邊延長，相交於 R，則 $\triangle PQR$ 就是所求的三角形。

解 作圖區





在圖 3-23 的作圖痕跡。

由上面的作圖過程中可知，只要知道三角形的兩個內角及此兩角的夾邊，即可用尺規作圖畫出一個三角形。這樣的作圖方法，稱為 ***ASA* 作圖**。

基礎

會考觀測站－基礎演練題　搭配課文

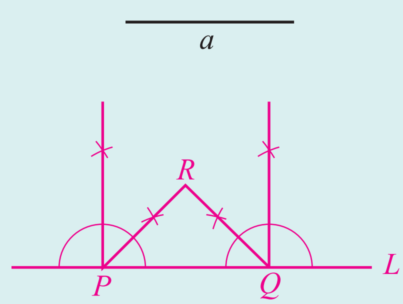
- 已知線段 a，利用 *ASA* 作圖，畫一以 a 爲斜邊的等腰直角三角形。

  作法：

  (1) 畫一直線 L，並在 L 上取 P、Q 兩點，使得 $\overline{PQ}=a$。

  (2) 分別過 P、Q 兩點作 L 的垂線。

  (3) 於 L 的同側，分別作 $\angle P$、$\angle Q$ 的角平分線，並交於 R 點，則 $\triangle PQR$ 即爲所求。

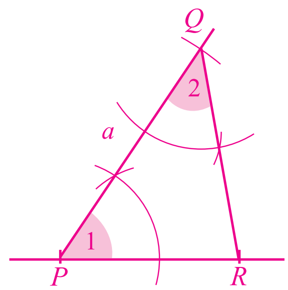


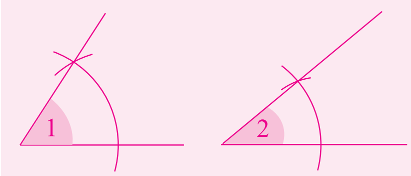
放大 解

探索活動 *ASA* 作圖 基會

仿照前頁的作法，但依其他不同的次序開始操作（例如：先作$\angle P$ 等於$\angle 1$，然後在$\angle P$ 的一邊取一點 Q，使 $\overline{PQ}$ 等於 a，最後以 $\overline{PQ}$ 為一邊作$\angle Q$ 等於$\angle 2$，使得$\angle P$、$\angle Q$ 為三角形的兩內角），在下面的 作圖區 畫出$\triangle PQR$ ，並利用附件 9 中的⑶，以疊合的方式，觀察是否與前頁所畫的$\triangle PQR$ 全等。

作圖區 是。





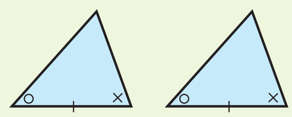
在圖 3-23 的作圖痕跡。

由上述探索活動可以發現，利用兩個角和此兩角的夾邊，以 *ASA* 作圖方法所作出的三角形都會全等。

放大

ASA 全等性質

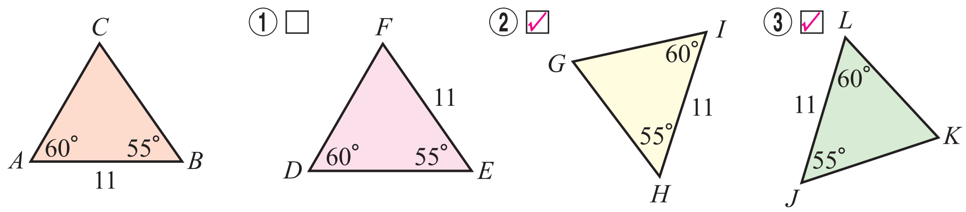
若兩個三角形有兩個內角和它們的夾邊皆對應相等，則這兩個三角形全等。



放大 **隨堂練習** 互動　　配合習作 P38 基礎題 2⑷

回答下列問題：

解 ⑴ 利用 *ASA* 全等性質，勾選出哪些三角形與$\triangle ABC$ 全等。（複選）



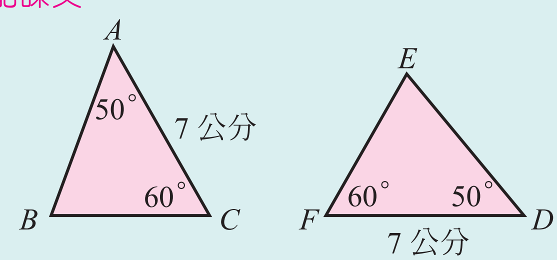
解 提問 ⑵ 寫出這些全等的三角形中，$\overline{BC}$ 的對應邊。

②$\overline{GH}$　③$\overline{KJ}$。

加強

會考觀測站－加強演練題　搭配課文

- 如圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 是否全等？若全等，則是根據哪一種全等性質？
  是，根據 *ASA* 全等性質。



教學眉批
- 探索活動應讓學生操作，印象才會深刻。
- 教師可使用備課用書後附的附件 9 於課堂操作。

基會試題
- 102 基測第 23 題

課轉Q 關鍵提問
- 在此題中，$\overline{AB}$ 的對應邊是哪幾個？
  答：$\overline{IH}$、$\overline{LJ}$。

備課教學資源
- 隨堂輕鬆考第 23 回

動態圖解 GGB

AAS 全等性質

對應能力指標 8-s-07

活動 5 從三角形的內角和定理推得「若有兩個三角形的兩角及其中一角的對邊對應相等，則此兩個三角形必全等」，即 AAS 全等性質。

兩個三角形的兩個內角和它們的夾邊對應相等，這兩個三角形就會全等（ASA 全等）。但如果對應相等的邊不是夾邊，而是其中一個內角的對邊，那麼這兩個三角形是否會全等呢？

教學眉批

- 利用三角形的內角和為 180 度與 ASA 全等性質，說明 AAS 全等性質。

放大

例 2 AAS 與 ASA

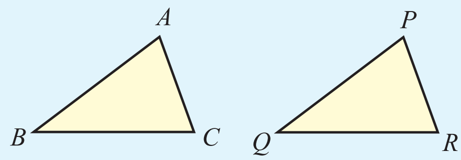
配合習作 P39 基礎題 3

如圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 中，

$\angle A=\angle P$，$\angle B=\angle Q$，

$\overline{BC}=\overline{QR}$。

說明 $\triangle ABC\cong\triangle PQR$。



解

(1) $\because$ 三角形內角和是 180°，且 $\angle A=\angle P$，$\angle B=\angle Q$，

$\therefore \angle C=180^\circ-\angle A-\angle B=180^\circ-\angle P-\angle Q=\angle R$。

(2) $\triangle ABC$ 與 $\triangle PQR$ 中，

$\because \angle B=\angle Q$（已知），

$\overline{BC}=\overline{QR}$（已知），

$\angle C=\angle R$（由 (1) 可知），

$\therefore \triangle ABC\cong\triangle PQR$（$ASA$ 全等性質）。

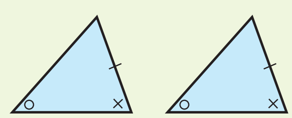
（ ）內的文字為該步驟的依據。

由例題 2 發現，兩個三角形的兩個內角及其中一個內角的對邊對應相等時，因第三個內角也會對應相等，故根據 ASA 全等性質可知這兩個三角形會全等。

放大

AAS 全等性質

若兩個三角形有兩個內角及其中一個內角的對邊對應相等，則這兩個三角形全等。

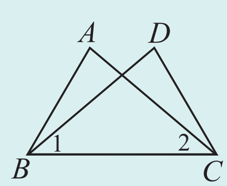


基礎

會考觀測站－基礎演練題 搭配例 2

（(C)）如圖，若 $\angle 1=\angle 2$，$\angle A=\angle D$，則 $\triangle ABC\cong\triangle DCB$ 是根據下列何種全等性質？

(A) SAS (B) ASA (C) AAS (D) SSA

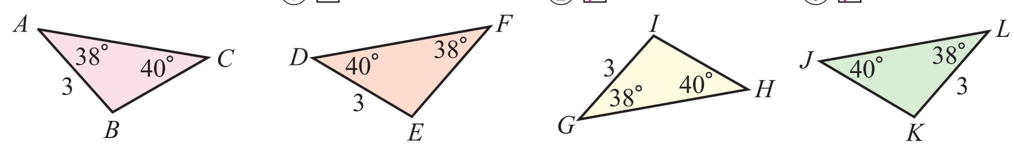


放大 隨堂練習 互動

回答下列問題：

解 (1) 利用 AAS 全等性質，勾選出哪些三角形與△ABC 全等。(複選)

① ☐ ② ☑ ③ ☑

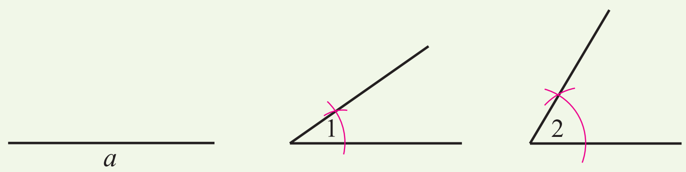


解 提問 (2) 寫出這些全等的三角形中，$\overline{BC}$ 的對應邊。

②$\overline{IH}$ ③$\overline{KJ}$。

放大 補給站 AAS 作圖

如圖，已知長度為 a 的線段，以及∠1、∠2 兩個已知角，我們可以作一個三角形，使得這個三角形的兩個內角分別為∠1和∠2，且∠2 對邊的長度為 a。



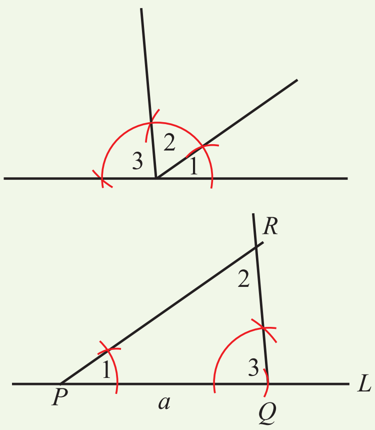
解 作圖區

① 作∠3＝180°－∠1－∠2

② 畫一直線 L，在 L 上作 $\overline{PQ}$，使 $\overline{PQ}=a$。

③ 分別以 P、Q 為頂點，$\overline{PQ}$ 為一邊，在 L 的同側作∠P＝∠1，∠Q＝∠3。

④ ∠P 和∠Q 的另一邊相交於 R 點，則△PQR 即為所求。



由上面的作圖過程中可知，只要知道三角形的兩個內角及其中一個內角的對邊，即可用尺規作圖畫出一個三角形，這樣的作圖方法，稱為 AAS 作圖。

課轉Q 關鍵提問

■ 在此題中，$\overline{AC}$ 的對應邊是哪幾個？

答：$\overline{GH}$、$\overline{LJ}$。

教學眉批

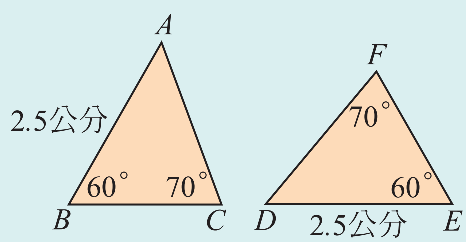
■ 利用三角形的內角和為 180° 與 ASA 作圖，可完成 AAS 作圖。

加強

會考觀測站－加強演練題 搭配課文

■ 如圖，△ABC 與△DEF 是否全等？若全等，則是根據哪一種全等性質？

是，根據 AAS 全等性質。



動態圖解

活動 6 推得「若兩個直角三角形的斜邊和一股對應相等，則此兩個三角形必全等」，即 RHS 全等性質。

GGB RHS 全等性質

對應能力指標 8-s-07

圖 3-24 中，兩個直角三角形的斜邊長都是 a，且各有一股長是 b；第一個三角形的另一股是 c，第二個三角形的另一股是 d。

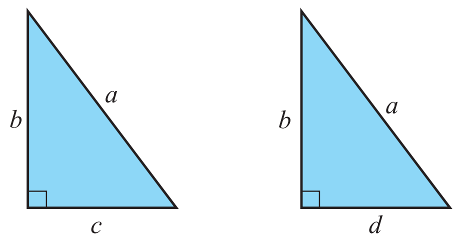


圖 3-24

由畢氏定理可得 $\begin{cases} b^2+c^2=a^2 \\ b^2+d^2=a^2 \end{cases}$，所以 $b^2+c^2=b^2+d^2$，得 $c^2=d^2$。

因為 c、d 皆為正數，所以 $c=d$。

根據 SSS 全等性質可知，這兩個三角形會全等。

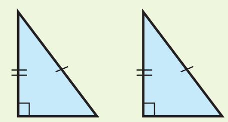
教學眉批

- 利用畢氏定理與 SSS 全等性質，說明 RHS 全等性質。

放大

RHS 全等性質 基會

若兩個直角三角形的斜邊和一股對應相等，則這兩個三角形全等。



基會試題

- 95 基測 II 第 32 題

RHS 中的 R 代表直角（*right angle*），H 代表斜邊（*hypotenuse*），S 指另一邊。

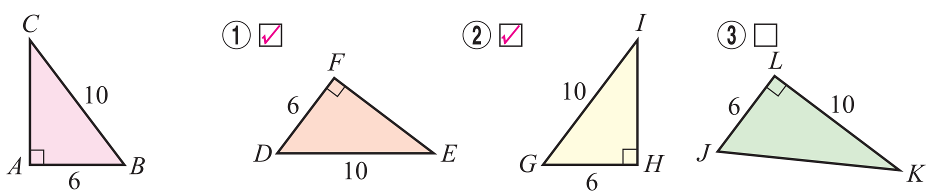
放大 **隨堂練習** 互動

配合習作 P38 基礎題 2(1)、4

回答下列問題：

解 (1) 利用 RHS 全等性質，勾選出哪些三角形與 $\triangle ABC$ 全等。（複選）

① ☑ ② ☑ ③ ☐



解 (2) 寫出這些全等的三角形中，$\angle C$ 的對應角。

提問 ① $\angle E$ ② $\angle I$。

基礎

關鍵提問

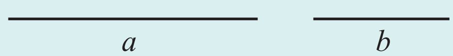
- 在此題中，$\angle B$ 的對應角是哪幾個？

答：$\angle D$、$\angle G$。

會考觀測站－基礎演練題 搭配課文

RHS 作圖

- 如圖，給定兩個線段 a、b，利用尺規作圖畫出一個直角三角形，使得此直角三角形的斜邊長等於線段 a，一股長等於 b。



作法：

(1) 畫一直線 L，並在 L 上取 P、Q 兩點，使得 $\overline{PQ}=b$。

(2) 過 P 點作一直線垂直 L。

(3) 以 Q 點為圓心，a 長為半徑畫弧，交垂線於 R 點。

(4) 連接 $\overline{QR}$，則 $\triangle PQR$ 就是所求的三角形。

(1)

（接下頁）

GGB
SSA 不一定全等

兩個三角形如果有兩組邊對應相等，且其中一組邊的對角也對應相等，則這兩個三角形是否會全等呢？

如圖 3-25，已知有一個三角形的兩邊為 a、b（$a>b$），且邊長 b 所對的角等於 $\angle 1$。利用以下尺規作圖的作法，在 作圖區 畫出一個三角形，使得此三角形的兩邊分別等於 a 和 b，且邊長 b 所對的角等於 $\angle 1$。

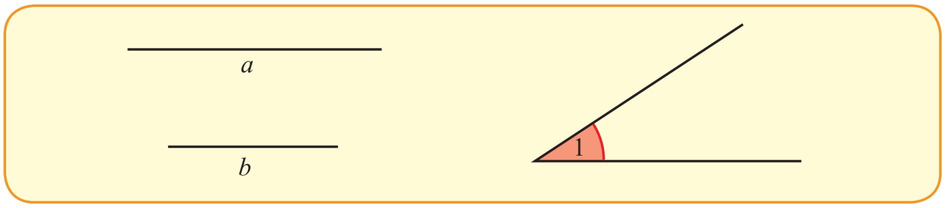


圖 3-25

作法：

(1)畫一條直線 L，在 L 上取一點 P。

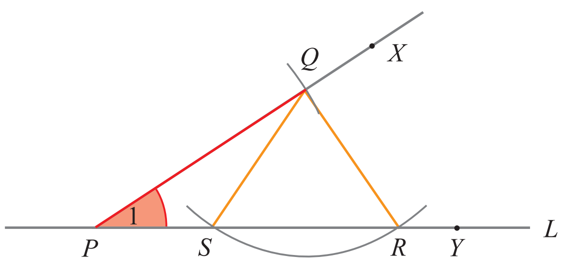
(2)以 P 為頂點，L 為角的一邊，作 $\angle XPY=\angle 1$。

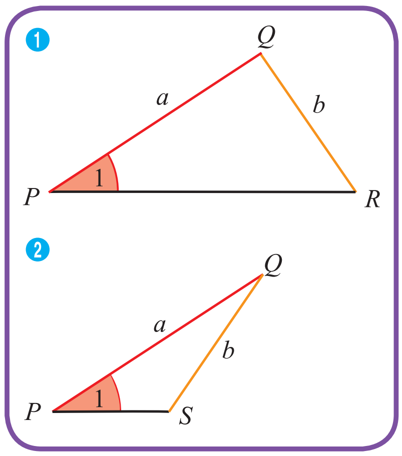
(3)在 $\angle XPY$ 的一邊 $\overrightarrow{PX}$ 上取一點 Q，使 $\overline{PQ}=a$。

(4)以 Q 為圓心，b 為半徑畫弧，交 $\angle XPY$ 的另一邊 $\overrightarrow{PY}$ 於 R 與 S 兩點。

(5)連接 $\overline{QR}$、$\overline{QS}$，可畫出符合條件的 $\triangle PQR$ 和 $\triangle PQS$。

放大 作圖區 基會 解





由上面作圖的過程中可知，給定三角形的兩邊長 a、b（$a>b$）與較短邊 b 的對角，可畫出 $\triangle PQR$ 和 $\triangle PQS$，即 SSA **不一定全等**。

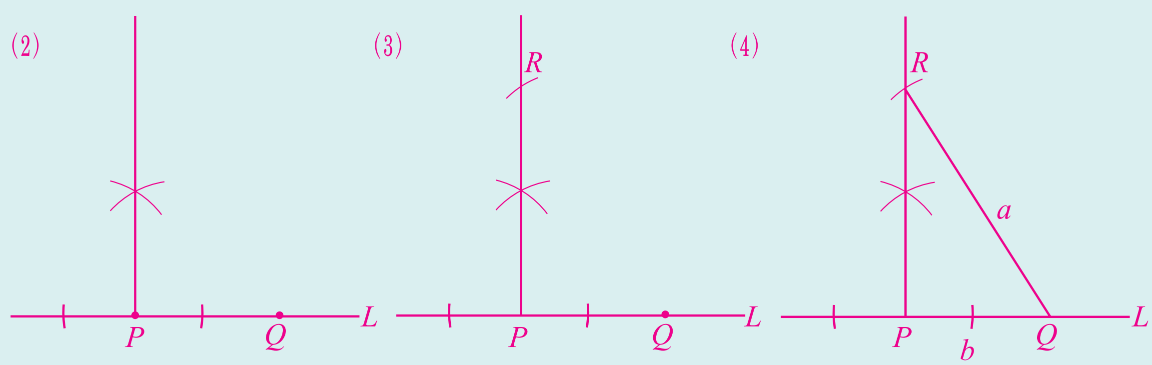
基礎

教學眉批

■ 教學時不宜過度討論 SSA 不一定全等的延伸問題。

基會試題

■ 93 基測 I 第 24 題



備課教學資源

■ 隨堂輕鬆考第 24 回

活動 7 應用全等三角形的性質解題。

教學眉批

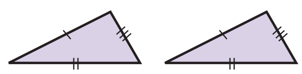
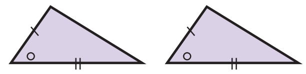
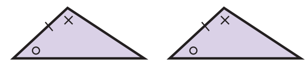
- 在說明兩三角形全等時，可依循以下步驟：
  (1) 先找出欲說明全等的兩個三角形。
  (2) 於兩個三角形上標記已知條件。
  (3) 判別適用的全等性質。
- 利用「三角形全等，則對應邊相等」的性質說明一線段的垂直平分線上的點到此線段的兩端距離相等。
- 依據課綱「8-s-17 能針對幾何推理中的步驟，寫出所依據的幾何性質。」此處的空格，設計成讓學生能寫出該步驟所依據的是什麼原理。

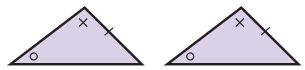
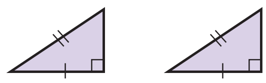
動態圖解

3 全等三角形的應用

對應能力指標 8-s-07

我們可用下表的全等性質檢驗兩個三角形是否全等。

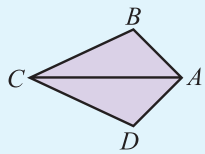
SSS 全等性質	*SAS* 全等性質	*ASA* 全等性質
		

AAS 全等性質	*RHS* 全等性質
	

放大 例 3 **全等三角形的應用**

如圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle ADC$ 中，

$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\overline{BC}=\overline{DC}$，說明 $\triangle ABC \cong \triangle ADC$。



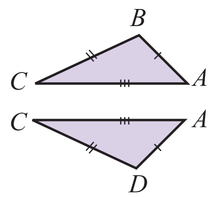
說明 在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ADC$ 中，

$\because \overline{AB}=\overline{AD}$（已知），

$\overline{BC}=\overline{DC}$（已知），

$\overline{AC}=\overline{AC}$（公用邊），

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle ADC$（*SSS* 全等性質）。

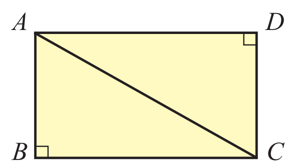


放大 解 隨堂練習

如圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle CDA$ 中，

$\overline{AB}=\overline{CD}$，$\angle B=\angle D=90^\circ$，

完成下列空格，說明 $\triangle ABC \cong \triangle CDA$。



說明：

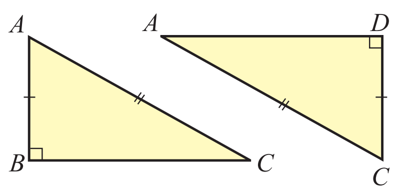
在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle CDA$ 中，

$\because$ ___$\overline{AB}=\overline{CD}$___（已知），

$\angle B=\angle D=90^\circ$（已知），

$\overline{AC}=\overline{AC}$（___公用邊___），

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CDA$（___*RHS*___ 全等性質）。

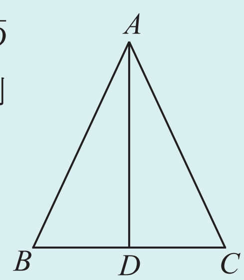


基礎

會考觀測站－基礎演練題 搭配例 3

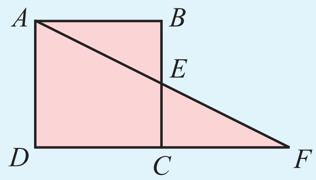
■如圖，已知等腰三角形中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，且 D 為 $\overline{BC}$ 中點，連接 $\overline{AD}$ 後，可得到 $\triangle ABD$、$\triangle ACD$。若欲證明 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$，則可利用何種全等性質來說明？(A)(B)(C)(D)

(A) *SSS* (B) *SAS* (C) *ASA* (D) *RHS*



放大 例 4 全等三角形的應用 基會

如圖，正方形 $ABCD$ 中，E 是 $\overline{BC}$ 的中點，延長 $\overline{AE}$ 交 $\overline{DC}$ 的延長線於 F 點。若 $\overline{AB}=6$，則 $\overline{AF}$ 的長是多少？



解 (1)在△ABE 與△FCE 中，

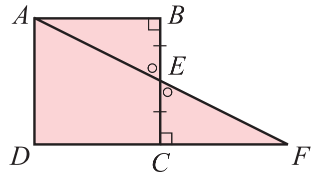
∵ $\angle ABE=\angle FCE=90^\circ$（$ABCD$ 是正方形），

$\overline{BE}=\overline{EC}$（$E$ 是 $\overline{BC}$ 的中點），

$\angle AEB=\angle CEF$（對頂角），

∴△$ABE\cong$△FCE（ASA 全等性質）。

故 $\overline{AE}=\overline{EF}$（對應邊相等）。



(2) ∵ $\overline{AB}=6$，$\overline{BE}=3$，

∴ $\overline{AE}=\sqrt{6^2+3^2}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$，

$\overline{AF}=2\overline{AE}=6\sqrt{5}$。

放大 隨堂練習 基會

如圖，△ABC 與△BDE 為正三角形，E 點在 $\overline{BC}$ 上，$\angle BAE=25^\circ$。

解 (1)完成下列空格，說明 △$ABE\cong$△CBD 是根據哪一種全等性質。

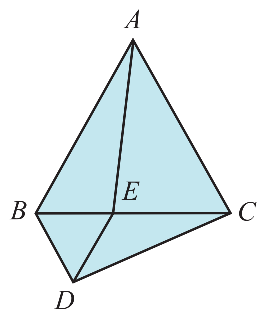
在△ABE 與△CBD 中，

∵ $\overline{AB}=\overline{CB}$（ △$ABC$ 為正三角形），

$\overline{BE}=\overline{BD}$（ △$BDE$ 為正三角形），

$\angle ABE=\angle CBD=60^\circ$（正三角形的內角為 60°），

∴△$ABE\cong$△CBD（ SAS 全等性質）。



解 (2) $\angle BDC$、$\angle EDC$ 各是多少度？

$\angle BDC=\angle AEB=180^\circ-60^\circ-25^\circ=95^\circ$

$\angle EDC=\angle CDB-\angle EDB=95^\circ-60^\circ=35^\circ$

基會

基會試題

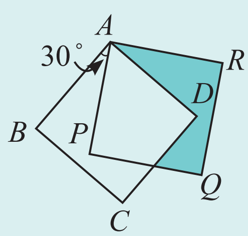
- 94 基測 II 第 6 題
- 90 基測 I 第 25 題
- 94 基測 II 第 29 題
- 103 會考第 9 題

教學眉批

- 利用已知條件判別兩三角形全等的相關題型，不宜讓學生寫出全部的說明過程，可適時的輔以填空題，且讓學生填寫原因即可。
- 教師可增加利用全等後，線段或角度會相等的相關問題。

95 基測 II 第 32 題　搭配例 4

（D）▪右圖是兩全等的正方形 $ABCD$ 與 $APQR$ 重疊情形。若 $\angle BAP=30^\circ$，$\overline{AB}=6\sqrt{3}$，則圖中綠色部分面積為何？
(A) 48　(B) 54　(C) $81-18\sqrt{3}$　(D) $108-36\sqrt{3}$



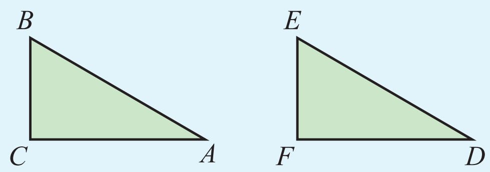
教學眉批

- 例題 5 即是畢氏定理的逆定理。

在上學期我們學過畢氏定理：任意一個直角三角形，其兩股長的平方和等於斜邊長的平方。那麼，如果有一個三角形，其最長邊的邊長平方等於另兩邊長的平方和，則此三角形會是直角三角形嗎？

放大 例 5 由邊長判別直角三角形

如圖，$\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，
$\overline{AB}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2$，$\angle F=90^\circ$，
且 $\overline{AC}=\overline{DF}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，
說明 $\triangle ABC\cong\triangle DEF$。



解

在 $\triangle DEF$ 中，
$\because \angle F=90^\circ$，$\therefore \overline{DE}^2=\overline{DF}^2+\overline{EF}^2$（畢氏定理），
又 $\overline{DF}=\overline{AC}$，$\overline{EF}=\overline{BC}$，$\therefore \overline{DE}^2=\overline{AC}^2+\overline{BC}^2=\overline{AB}^2$，
因此 $\overline{DE}=\overline{AB}$。
在 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DEF$ 中，
$\because \overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{AC}=\overline{DF}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，
$\therefore \triangle ABC\cong\triangle DEF$（$SSS$ 全等性質）。

在例題 5 中，$\because \triangle ABC\cong\triangle DEF$，$\therefore \angle C=\angle F=90^\circ$（對應角相等），故 $\triangle ABC$ 為直角三角形。也就是說，若三角形滿足最長邊的邊長平方等於另兩邊長的平方和，則此三角形為直角三角形。

放大 由邊長判別直角三角形

若三角形滿足最長邊的邊長平方等於另兩邊長的平方和，則此三角形為直角三角形。

配合習作 P39 基礎題 5

隨堂練習

解 下列各組數中，哪幾組可以作為直角三角形的三邊長？（複選）(A)(B)(C)

(A) $\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$、$\sqrt{5}$　　(B) 5、12、13

(C) 6、8、10　　(D) 13、14、15

加強

備課教學資源

- 隨堂輕鬆考第 25 回
- 免試基礎講堂 3-2
- 免試精熟本 3-2

會考觀測站－加強演練題　搭配例 5

- 下列各組數中，哪幾組可以作為直角三角形的三邊長？（複選）(A)(C)(D)

(A) 7、24、25　(B) 3、5、7　(C) 0.5、1.2、1.3　(D) 1、$\sqrt{2}$、$\sqrt{3}$

動態圖解

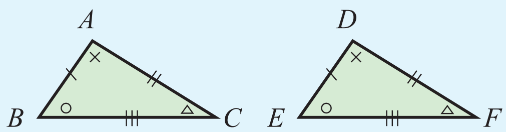
重點回顧

放大 1 全等三角形：

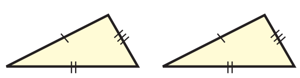
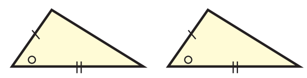
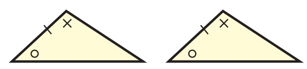
兩個全等三角形的對應邊相等，對應角也相等。

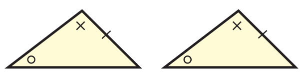
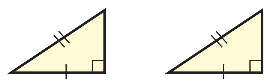
例 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$，若 A、B、C 三點的對應頂點分別為 D、E、F 三點，則：

$\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{EF}$，$\overline{AC}=\overline{DF}$，$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$。



放大 2 三角形全等的判別方法：

SSS 全等性質	SAS 全等性質	ASA 全等性質
		

AAS 全等性質	RHS 全等性質
	

放大 3 由邊長判別直角三角形：

若三角形滿足最長邊的邊長平方等於另兩邊長的平方和，則此三角形為直角三角形。

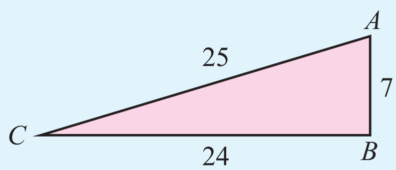
例 在 $\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=7$，$\overline{BC}=24$，$\overline{AC}=25$。

$\because 7^2+24^2=49+576=625$，

$25^2=625$，

$7^2+24^2=25^2$，

$\therefore \triangle ABC$ 為直角三角形。



基會

活化體驗站

趣味數學

■盒子裡有四塊蛋糕，現在有 4 位同學，每人都分到一塊，但盒子裡還有一塊蛋糕，為什麼？

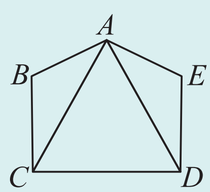
有 1 位同學連盒子都拿走，所以盒子裡還有一塊蛋糕。

107 會考第 11 題　　搭配重點回顧

(C) ■如圖，五邊形 $ABCDE$ 中有一正三角形 ACD。若 $\overline{AB}=\overline{DE}$，$\overline{BC}=\overline{AE}$，$\angle E=115°$，則 $\angle BAE$ 的度數為何？

(A) 115　(B) 120

(C) 125　(D) 130



3-2自我評量

教學眉批

- 第 1 題是利用全等三角形對應邊相等、對應角相等的觀念解題。

基會試題

- 97 基測 II 第 19 題
- 99 基測 II 第 16 題

放大 解

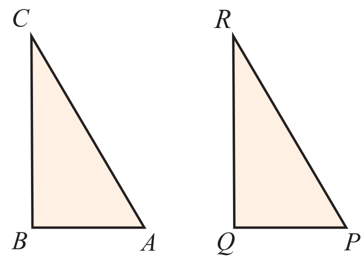
1 如圖，$\triangle ABC\cong\triangle PQR$，且頂點 A、B、C 的對應點分別是頂點 P、Q、R。若 $\angle C=30^\circ$，$\angle P=60^\circ$，$\overline{PR}=2\sqrt{3}$。求： 課 P111 隨堂

(1) $\angle A$。　(1) $\because\triangle ABC\cong\triangle PQR$，$\therefore\angle A=\angle P=60^\circ$

(2) $\angle B$。　(2) $\angle B=180^\circ-\angle A-\angle C=90^\circ$

(3) $\overline{AB}$ 的長。

(4) $\overline{BC}$ 的長。

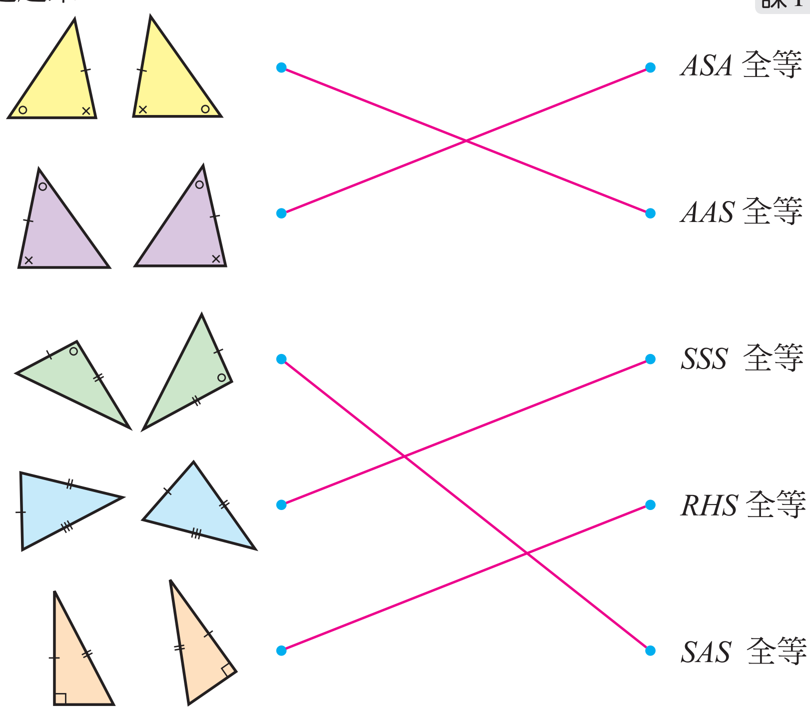


(3) 由(1)(2)可得 $\triangle ABC$ 為 $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ 的直角三角形，且 $\overline{AC}=\overline{PR}=2\sqrt{3}$，
由 $\overline{AC}:\overline{AB}=2:1$ 可得 $2\sqrt{3}:\overline{AB}=2:1$，$\therefore\overline{AB}=\sqrt{3}$

(4) $\overline{AB}:\overline{BC}=1:\sqrt{3}$，$\sqrt{3}:\overline{BC}=1:\sqrt{3}$，$\overline{BC}=\sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$

放大 解

2 下列各組圖形中，有一些線段或角有標示符號，相同的符號表示長度或角度相等。對照左邊每一組全等的圖形，在右邊找出適合的全等性質，並將它們連起來。 課 P112～120



基礎

備課教學資源

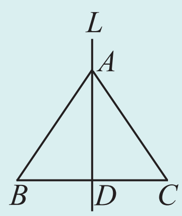
- 會考100分 3-2
- 會考基礎卷 3-2
- 會考精熟卷 3-2
- 段考精選試題 3-2

會考觀測站－基礎演練題　搭配自評第 2 題

■如圖，$\overline{BC}$ 的中垂線 L 與 $\overline{BC}$ 相交於 D 點，A 為 L 上一點，連接 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 後可得 $\triangle ABD$、$\triangle ACD$。若欲證明 $\triangle ABD\cong\triangle ACD$，則可利用何種全等性質來說明？

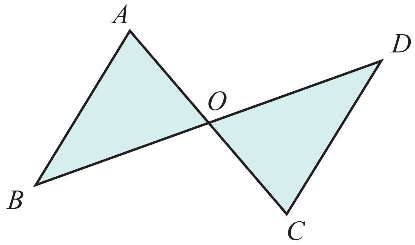
(A) SSS　(B) SAS　(C) ASA　(D) RHS

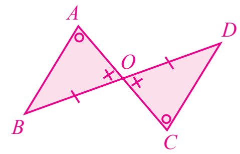
(A)(B)(C)(D)



放大 解 **3** 如圖，$\overline{AC}$ 和 $\overline{BD}$ 交於 O 點，$\angle A=\angle C$，$\overline{BO}=\overline{DO}$。 課 P122 例 3

(1)如圖，在兩個三角形中，請以相同的記號標示對應邊或對應角，來說明$\triangle ABO\cong\triangle CDO$。

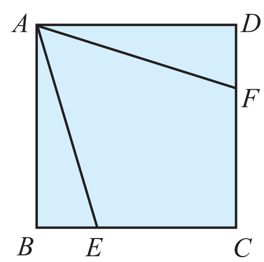




(2)哪一個全等性質可以說明$\triangle ABO\cong\triangle CDO$？(在□中打✓)

□SSS　□SAS　□ASA　☑AAS　□RHS

放大 解 **4** 如圖，在正方形 $ABCD$ 中，$\overline{BE}=\overline{DF}$。 課 P123 例 4



(1)在空格中，填入適當的文字或符號，

說明$\triangle ABE\cong\triangle ADF$。

說明：

在$\triangle ABE$與$\triangle ADF$中，

∵ $\overline{AB}=\overline{AD}$(理由：四邊形 $ABCD$ 是正方形)，

$\overline{BE}=\overline{DF}$(已知)，

$\angle ABE=\angle ADF=90^\circ$(理由：四邊形 $ABCD$ 是正方形)，

∴$\triangle ABE\cong\triangle ADF$($SAS$ 全等性質)。

(2)若$\angle BAE=20^\circ$，則$\angle EAF$是多少度？

∵$\angle DAF=\angle BAE=20^\circ$(對應角相等)，∴$\angle EAF=90^\circ-20^\circ-20^\circ=50^\circ$

解 **5** 下列各組數中，哪幾組可以作為直角三角形的三邊長？(複選) 課 P124 例 5

(A) 3、4、5　(B) 5、6、7　(C) 8、15、17

(D) 7、24、25　(E) 9、40、41

(A)(C)(D)(E)

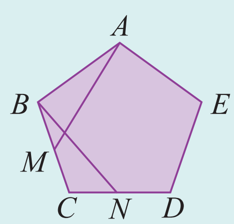
精熟

教學眉批

- 利用已知條件判別兩三角形全等的相關題型，不宜讓學生寫出全部的說明過程，可適時的輔以填空題，且讓學生填寫原因即可。

會考觀測站－精熟演練題　搭配自評第 4 題

- 如圖，五邊形 $ABCDE$ 為正五邊形，M、N 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 的中點。說明$\triangle ABM\cong\triangle BCN$。



說明：

因為$\angle ABM=\angle BCN$，

$\overline{AB}=\overline{BC}$(五邊形 $ABCDE$ 為正五邊形)，

$\overline{BM}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{CD}=\overline{CN}$($M$、$N$ 分別為 $\overline{BC}$、$\overline{CD}$ 的中點)，

根據 SAS 全等性質，$\triangle ABM\cong\triangle BCN$。