3-1 內角與外角

1. 三角形的外角和
2. 三角形的內角和
3. 三角形的外角定理
4. 多邊形的內角和
5. 多邊形的外角和
6. 正多邊形的內角與外角

教學時數

▪ 5小時

活動 1 理解三角形外角的定義及三角形的一組外角和等於 360 度。

GGB 1 三角形的外角和

對應能力指標 8-s-03

如圖 3-1，有一個三角形公園，翰翰從公園邊的 P 點出發，依序經過 A、B、C 三個頂點，繞公園一圈回到 P 點，那麼翰翰轉了哪些角呢？這些角度的和又是多少？

動態圖解

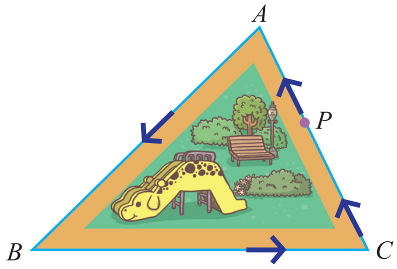


圖 3-1

教學眉批

▪ 可以利用指揮棒或其他道具讓學生了解在行進時，所要轉的角度是外角。

基會

如圖 3-2，翰翰自 P 點沿著 $\overrightarrow{PA}$ 前進至 A 點時，行進方向從面對 D 點的方向逆時針轉一角度面向 B 點，因此翰翰在 A 點所轉的角度就是∠1。

同理，翰翰在 B 點所轉的角度為∠2，在 C 點所轉的角度為∠3。

基會試題

▪ 91 基測 I 第 20 題

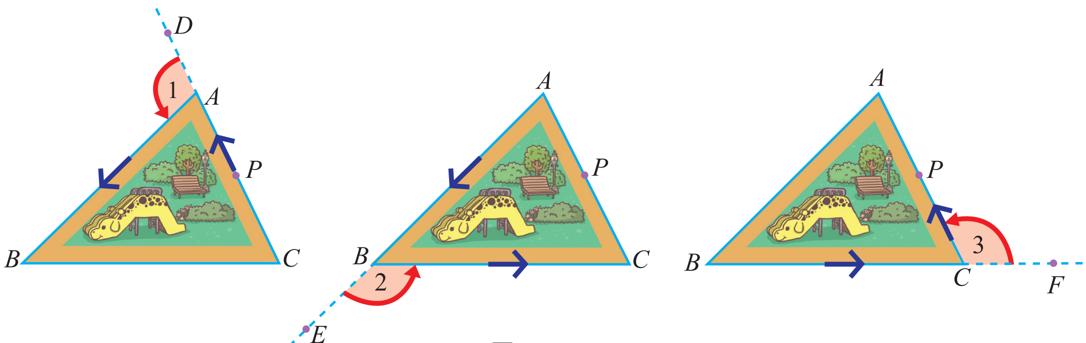


圖 3-2

在圖 3-2 中，∠1、∠2、∠3 都是由△ABC 一邊的延長線和另一邊所形成的角，∠1、∠2、∠3 分別稱為△ABC 三個內角∠A、∠B、∠C 的**外角**。

基礎

備課教學資源

▪ 補救教學．計算 Basic 3-1

▪ 免試加強類題本 3-1

會考觀測站－基礎演練題 搭配課文

((C)) ▪ 下列何者為一個三角形的一組外角度數？

(A) 65°、55°、60° (B) 100°、100°、100°

(C) 100°、110°、150° (D) 70°、80°、120°

如圖 3-3，由於∠1、∠2、∠3 是繞三角形一圈所得到的三個外角，也常將∠1、∠2、∠3 稱為△ABC 的一組外角。

因為翰翰從公園邊的 P 點出發時是面對著 A 點的方向，沿逆時針方向繞公園一圈後回到 P 點，一樣是面對著 A 點的方向。因此，他三次所轉的角度和即為一個周角 360°（如圖 3-4），亦即△ABC 的一組外角和等於 360°。

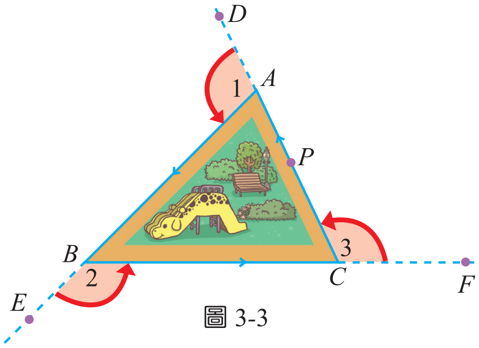


圖 3-3

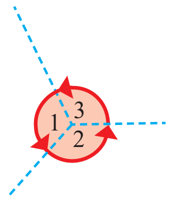


圖 3-4

如圖 3-5，∠4、∠5、∠6 也是由△ABC 一邊的延長線和另一邊所形成的角，因此∠4、∠5、∠6 也分別是∠A、∠B、∠C 的外角，∠4、∠5、∠6 是△ABC 的另一組外角。習慣上，當提到三角形一個內角的外角時，是指其中的一個外角。

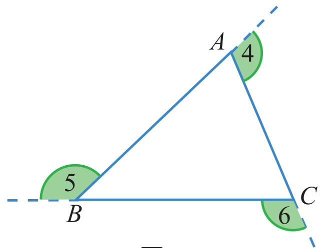
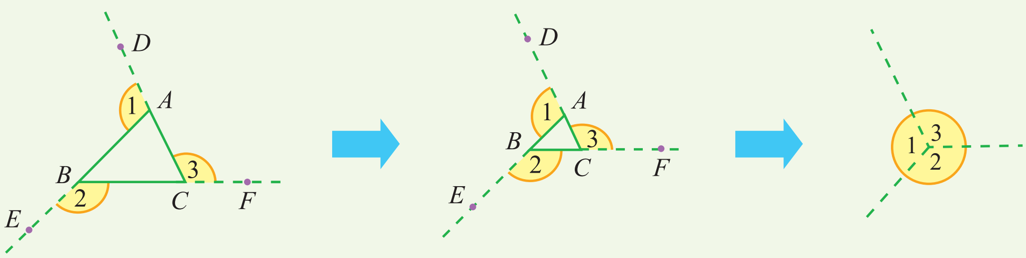


圖 3-5

GGB 動態圖解

補給站 三角形的外角和

如圖，如果將三角形公園漸漸縮小，也可以發現三角形的一組外角和剛好是一個周角，也就是 360°。



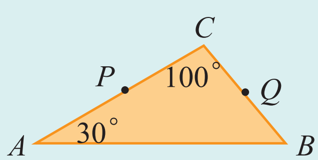
加強

教學眉批

- ∠A、∠B、∠C皆分別有 2 個外角，在取其中一組外角時，宜採取順時針方向的一組或逆時針方向的一組。
- 可以利用圖形縮小或 GSP 軟體將三角形慢慢縮小，讓學生了解外角和為一個周角（360 度）。
- 因為三角形內角和 180 度須由其外角和來證明，故本教材先從三角形的外角和開始教學。

會考觀測站－加強演練題 搭配課文

- 如圖，佳佳繞三角形的公園散步，由 P 點出發，經 A、B 兩點後到達 Q 點，她一共轉了 <u>280</u> 度。



由前面的敘述可知，$\triangle ABC$ 的一組外角和是 360°。事實上，任何三角形都可透過上述的操作過程，得知三角形的一組外角和是 360°。

三角形的外角和

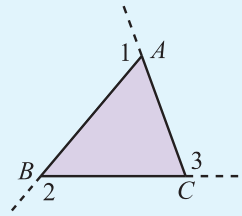
三角形的一組外角和為 360°。

放大 提問

例 1 三角形的外角和 基會

配合習作 P34 基礎題 1

$\triangle ABC$ 中，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的外角。若 $\angle 1=120^\circ$，$\angle 2=130^\circ$，求 $\angle 3$。

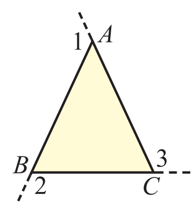


解 因為 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的外角，
所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^\circ$，
$120^\circ+130^\circ+\angle 3=360^\circ$，
$\angle 3=110^\circ$

放大 **隨堂練習**

解 1. $\triangle ABC$ 中，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的外角。若 $\angle 1=130^\circ$，求 $\angle 2+\angle 3$。

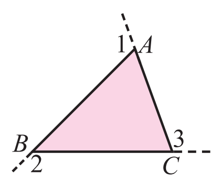
因為 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的外角，
所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^\circ$，
$130^\circ+\angle 2+\angle 3=360^\circ$，$\angle 2+\angle 3=230^\circ$



解 2. $\triangle ABC$ 中，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的外角。若 $\angle 1=(8x-5)^\circ$，$\angle 2=9x^\circ$，$\angle 3=(7x+5)^\circ$，求：

(1) x。
(2) $\angle 1$。

(1) 因為 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 分別為 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的外角，
所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^\circ$，
$(8x-5)^\circ+9x^\circ+(7x+5)^\circ=360^\circ$，$24x=360$，$x=15$
(2) $\angle 1=(8x-5)^\circ=(8\times 15-5)^\circ=115^\circ$



基礎

教學眉批

- 此題利用三角形的一組外角和為 360° 來處理幾何問題。可提醒學生利用上述觀念進行幾何與代數的結合問題時，所解出來的 x 要記得代回原式驗算。

關鍵提問

- $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的角度分別爲何？
答：60°、50°、70°。

基會試題

- 90 基測 II 第 14 題

會考觀測站－基礎演練題 搭配例 1

1. $\triangle ABC$ 中，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 分別爲 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的外角。若 $\angle 1=120^\circ$，$\angle 2$ 的度數是 $\angle 3$ 度數的 2 倍，求 $\angle 2$、$\angle 3$。$\angle 2=160^\circ$，$\angle 3=80^\circ$
2. $\triangle ABC$ 中，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 分別爲 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的外角。若 $\angle 1=x^\circ$，$\angle 2=y^\circ$，$\angle 3=z^\circ$，且 $x:y:z=4:5:6$，求 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$。
$\angle 1=96^\circ$，$\angle 2=120^\circ$，$\angle 3=144^\circ$

GGB 2 三角形的內角和

對應能力指標 8-s-03
配合習作 P34 基礎題 2

動態圖解 如圖 3-6，在國小時，曾經以切割拼補或測量的方式，得知三角形的內角和為 180°。（可搭配附件 10 操作）

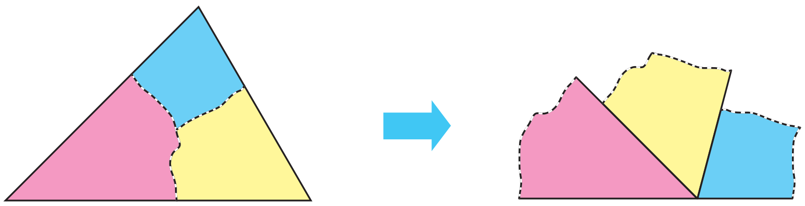


圖 3-6

現在將由三角形的一組外角和是 360°，導出三角形的內角和為 180°。

如圖 3-7，在△ABC 中，$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$ 分別為三個內角 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的外角。

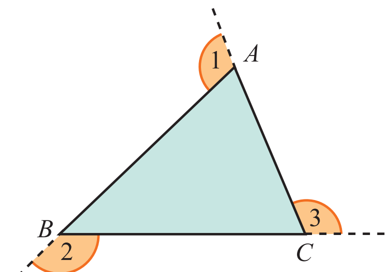


圖 3-7

因為內角與其一個外角形成一個平角，所以

$\angle A+\angle 1=180^\circ$，$\angle B+\angle 2=180^\circ$，$\angle C+\angle 3=180^\circ$。

因此 $\angle A+\angle B+\angle C$

$=(180^\circ-\angle 1)+(180^\circ-\angle 2)+(180^\circ-\angle 3)$

$=180^\circ\times 3-(\angle 1+\angle 2+\angle 3)$

$=540^\circ-360^\circ$ ← 三角形的外角和為 360°

$=180^\circ$

由上面的敘述可知，三角形的內角和為 180°。

放大 三角形的內角和

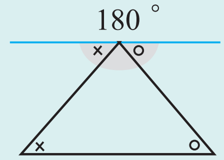
三角形的內角和為 180°。

基礎

活動 2 理解三角形的內角和定理：三角形內角和為 180 度。

教學眉批

- 利用小學學過平行的概念，從一頂點做直線平行底邊，利用平行線的內錯角相等，也可以證明三角形的內角和為 180 度。



- 教師可使用備課用書後附的附件 10 於課堂操作。

會考觀測站－基礎演練題 搭配課文

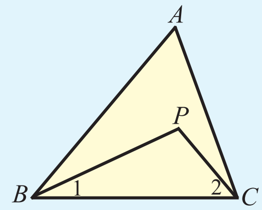
1. △ABC 中，$\angle A=80^\circ$，$2\angle B+\angle C=140^\circ$，求 $\angle B$、$\angle C$。
   $\angle B=40^\circ$，$\angle C=60^\circ$
2. △ABC 中，若 $\angle A$ 是 $\angle C$ 的 2 倍，$\angle B$ 是 $\angle C$ 的 3 倍，求 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$。
   $\angle A=60^\circ$，$\angle B=90^\circ$，$\angle C=30^\circ$

放大 提問 例 2 **三角形內角和的應用**

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle A=60^\circ$，$\angle ABP=25^\circ$，$\angle ACP=20^\circ$，求：

(1) $\angle 1+\angle 2$

(2) $\angle BPC$



解 (1) 由三角形內角和為 180° 可得

$\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$，

$\angle A+(\angle ABP+\angle 1)+(\angle ACP+\angle 2)=180^\circ$，

$60^\circ+(25^\circ+\angle 1)+(20^\circ+\angle 2)=180^\circ$，

$\angle 1+\angle 2=180^\circ-60^\circ-25^\circ-20^\circ=75^\circ$。

(2) 由三角形內角和為 180° 可得

$\angle 1+\angle 2+\angle BPC=180^\circ$，

$75^\circ+\angle BPC=180^\circ$，

$\angle BPC=180^\circ-75^\circ=105^\circ$。

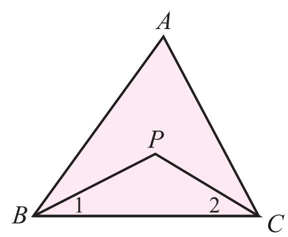
放大 **隨堂練習**

解

如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 與 $\angle C$ 的角平分線交於 P 點。若 $\angle A=64^\circ$，求：

(1) $\angle 1+\angle 2$。

(2) $\angle BPC$。



(1) 由三角形內角和為 180° 可得

$\angle A+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$，

$64^\circ+\angle ABC+\angle ACB=180^\circ$，

$\angle ABC+\angle ACB=180^\circ-64^\circ=116^\circ$，

又 $\overline{BP}$、$\overline{CP}$ 分別平分 $\angle ABC$、$\angle ACB$，

所以 $\angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=116^\circ\times\frac{1}{2}=58^\circ$。

(2) 因為三角形的內角和為 180°，

所以 $\angle BPC=180^\circ-\angle 1-\angle 2$

$=180^\circ-(\angle 1+\angle 2)$

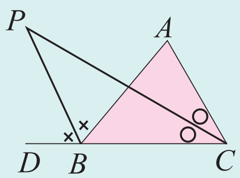
$=180^\circ-58^\circ=122^\circ$

基礎

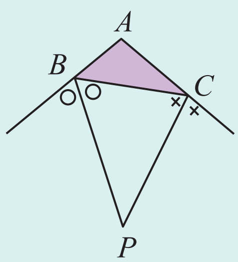
教學眉批

- 隨堂練習可推導出通式：
$\angle BPC=90^\circ+\frac{1}{2}\angle A$ 而其餘類似的題型補充如下：

(1) $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB$ 的角平分線與 $\angle ABD$ 的角平分線交於 P 點，則 $\angle BPC=\frac{1}{2}\angle A$



(2) $\triangle ABC$ 中，$\angle B$ 與 $\angle C$ 的外角角平分線交於 P 點，則 $\angle BPC=90^\circ-\frac{1}{2}\angle A$

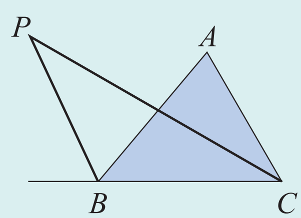


轉Q **關鍵提問**

- 三角形的內角和是幾度呢？
答：180 度。

會考觀測站－基礎演練題 搭配例 2

- 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle ABC=50^\circ$，$\angle A=70^\circ$。若 $\angle C$ 的角平分線交 $\angle B$ 外角的角平分線於 P 點，求 $\angle P$。
$\angle P=35^\circ$



GGB 放大 互動

3 三角形的外角定理

對應能力指標 8-s-03、8-s-10

在一個三角形中，與一個外角不相鄰的兩個內角，都稱為這個外角的內對角。如圖 3-8，$\angle BAC$ 的外角為 $\angle 1$，$\angle 1$ 的兩個內對角為 $\angle B$ 和 $\angle C$。

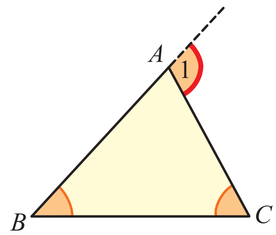


圖 3-8

由 $\angle BAC+\angle B+\angle C=180^\circ$ ← 三角形的內角和為 180°

$\angle BAC+\angle 1=180^\circ$ ← 一個內角與其一個外角的和是 180°

可知 $\angle BAC+\angle 1=\angle BAC+\angle B+\angle C$

因此 $\angle 1=\angle B+\angle C$。

放大 互動

同理，如圖 3-9，$\angle 2=\angle A+\angle C$

$\angle 3=\angle A+\angle B$

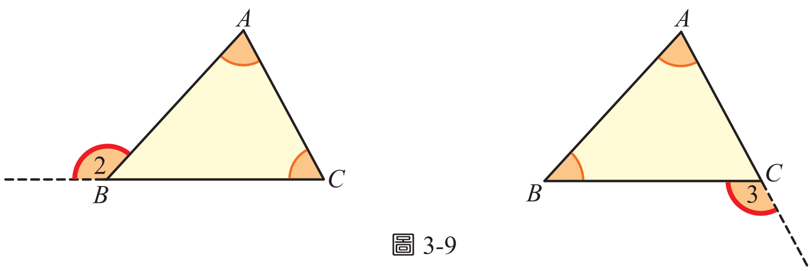


圖 3-9

由上面的敘述可知，三角形的任一個外角等於兩個內對角的和。

放大

三角形的外角定理

三角形任一個外角等於兩個內對角的和。

精熟

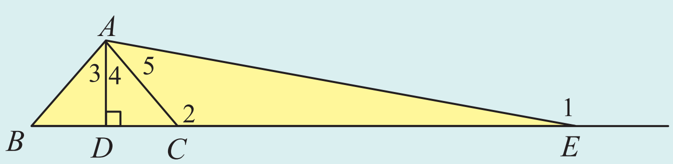
會考觀測站－精熟演練題 搭配課文

- 如圖，$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$\angle 3=\angle 4=\angle 5=40^\circ$，求：

(1) $\angle 2$

(2) $\angle 1$

(1) 130° (2) 170°



活動 3 從三角形內角和爲 180 度及一個內角與它的一個外角和是 180 度推得外角等於兩個內對角的和。

教學眉批

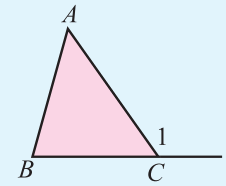
- 現階段學生較不熟悉幾何與代數的結合處理。
- 將不同位置的外角分別畫出，可讓學生更容易熟悉外角與內對角的位置關係。

教學眉批

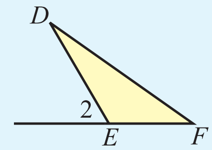
- 利用各種不同的三角形，讓學生認識外角與內對角的位置。

放大 例 3 三角形的外角定理

1. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle A=50^\circ$，$\angle B=75^\circ$，求 $\angle 1$。

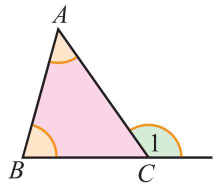


2. 如圖，$\triangle DEF$ 中，$\angle D=25^\circ$，$\angle 2=60^\circ$，求 $\angle F$。

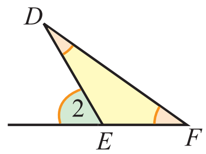


解 利用三角形的外角定理：

1. $\angle 1=\angle A+\angle B$
$=50^\circ+75^\circ$
$=125^\circ$



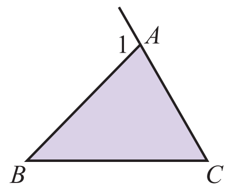
2. $\angle 2=\angle D+\angle F$
$60^\circ=25^\circ+\angle F$
$\angle F=60^\circ-25^\circ$
$=35^\circ$



放大 隨堂練習

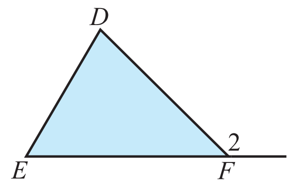
解 1. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\angle B=45^\circ$，$\angle C=60^\circ$，求 $\angle 1$。

利用三角形的外角定理：
$\angle 1=\angle B+\angle C$
$=45^\circ+60^\circ$
$=105^\circ$



解 2. 如圖，$\triangle DEF$ 中，$\angle D=75^\circ$，$\angle 2=135^\circ$，求 $\angle E$。

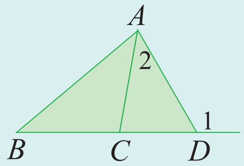
利用三角形的外角定理：
$\angle 2=\angle D+\angle E$
$135^\circ=75^\circ+\angle E$
$\angle E=60^\circ$



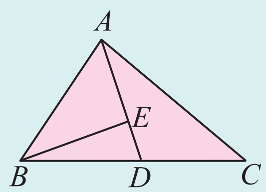
基礎

會考觀測站－基礎演練題 搭配例 3

1. 如圖，C 點在直線 BD 上，$\overline{AC}=\overline{BC}$。若 $\angle 1=120^\circ$，$\angle 2=40^\circ$，求 $\angle B$。
40°



2. 如圖，$\angle CAD=30^\circ$，$\angle C=40^\circ$，$\angle DBE=20^\circ$，求 $\angle AEB$。
90°



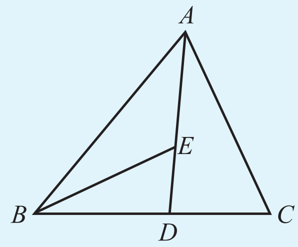
放大 例 4 三角形的外角定理之應用 基會

配合習作 P34 基礎題 3

如圖，$\triangle ABC$ 中，D 點在 $\overline{BC}$ 上，E 點在 $\overline{AD}$ 上。若 $\angle CAD=30^\circ$，$\angle C=65^\circ$，$\angle DBE=25^\circ$，求：

(1) $\angle ADB$。

(2) $\angle AEB$。



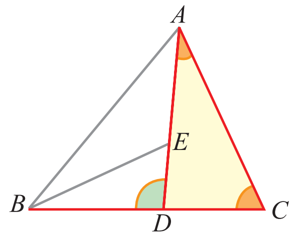
解 利用三角形的外角定理，

(1)因為 $\angle ADB$ 為 $\triangle ADC$ 的外角，

所以 $\angle ADB=\angle CAD+\angle C$

$=30^\circ+65^\circ$

$=95^\circ$

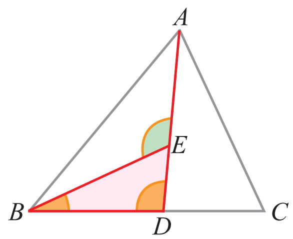


(2)因為 $\angle AEB$ 為 $\triangle BED$ 的外角，

所以 $\angle AEB=\angle EDB+\angle DBE$

$=95^\circ+25^\circ$

$=120^\circ$

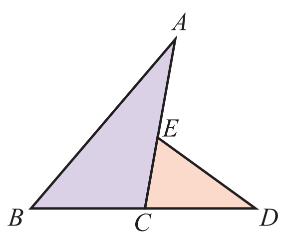


放大 隨堂練習

解 如圖，C 點在 $\overline{BD}$ 上，E 點在 $\overline{AC}$ 上。若 $\angle A=30^\circ$，$\angle B=50^\circ$，$\angle AED=115^\circ$，求：

(1) $\angle ACD$。

(2) $\angle D$。



(1)利用三角形的外角定理：

$\angle ACD=\angle A+\angle B$

$=30^\circ+50^\circ$

$=80^\circ$

(2) $\angle AED=\angle ACD+\angle D$

$115^\circ=80^\circ+\angle D$

$\angle D=35^\circ$

教學眉批

- 例題 4 在教學時，可在圖形上強調欲求外角的三角形。

基會試題

- 92 基測 I 第 5 題
- 93 基測 II 第 12 題
- 97 基測 I 第 14 題
- 100 基測 I 第 7 題
- 104 會考第 20 題
- 107 會考第 9 題

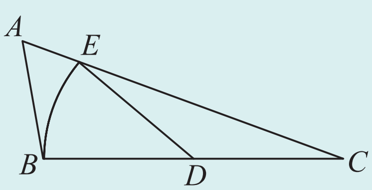
基會

107 會考第 9 題　搭配例 4

(（C）) ▪ 如圖，$\triangle ABC$ 中，D 為 $\overline{BC}$ 的中點，以 D 為圓心，$\overline{BD}$ 長為半徑畫一弧交 $\overline{AC}$ 於 E 點。若 $\angle A=60^\circ$，$\angle B=100^\circ$，$\overline{BC}=4$，則扇形 BDE 的面積為何？

(A) $\frac{1}{3}\pi$　(B) $\frac{2}{3}\pi$

(C) $\frac{4}{9}\pi$　(D) $\frac{5}{9}\pi$



教學眉批

由前面的學習，你是否發現在圖 3-10 中，
$\angle ADC$ 和 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 這三個角的關係呢？

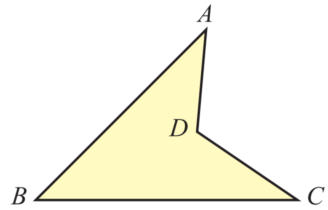


圖 3-10

我們作 $\overline{AD}$ 的延長線交 $\overline{BC}$ 於 E 點，如圖 3-11。
利用三角形的外角定理可知：

$\angle ADC=\angle AEC+\angle C$

$\quad=\angle A+\angle B+\angle C$

即 $\angle ADC=\angle A+\angle B+\angle C$。

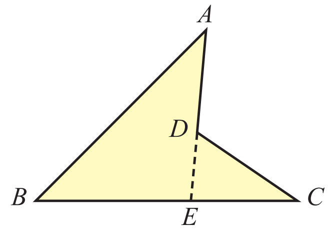


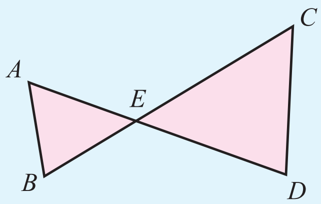
圖 3-11

- 例題 5 也可以利用三角形內角和爲 180° 及對頂角相等說明：
  $\because \angle A+\angle B+\angle AEB=180^\circ$
  $\angle C+\angle D+\angle CED=180^\circ$
  又 $\angle AEB=\angle CED$（對頂角相等）
  $\therefore \angle A+\angle B=\angle C+\angle D$

基會試題
- 99 基測 II 第 4 題

放大 例 5 三角形的外角定理之應用 基會

如圖，$\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 相交於 E 點，
說明 $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$。

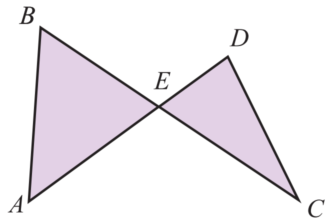


說明 因為 $\angle AEC$ 是 $\triangle AEB$ 與 $\triangle CED$ 的外角，
所以 $\angle AEC=\angle A+\angle B$ 且 $\angle AEC=\angle C+\angle D$，
故 $\angle A+\angle B=\angle C+\angle D$。

放大 隨堂練習

解 如圖，$\overline{BC}$ 與 $\overline{AD}$ 相交於 E 點，$\angle A=50^\circ$，
$\angle B=60^\circ$，$\angle C=30^\circ$，求 $\angle D$。

因為 $\angle A+\angle B=\angle BED=\angle C+\angle D$，
所以 $50^\circ+60^\circ=30^\circ+\angle D$，
故 $\angle D=80^\circ$。

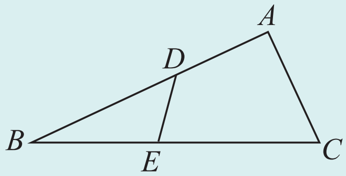


基礎

備課教學資源
- 隨堂輕鬆考第 19 回

會考觀測站－基礎演練題 搭配例 5

- 如圖，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle A=90^\circ$，$\angle BDE=50^\circ$，$\angle BED=105^\circ$，求 $\angle C$。
  作 $\angle B$ 的外角，則 $\angle B$ 的外角 $=\angle A+\angle C$
  $=\angle BDE+\angle BED$
  $\therefore 90^\circ+\angle C=50^\circ+105^\circ$
  $\angle C=65^\circ$



動畫 GGB

4 多邊形的內角和 基會

對應能力指標 8-s-03

如圖 3-12，自四邊形 $ABCD$ 的頂點 A 作對角線 $\overline{AC}$，可得兩個三角形。因此四邊形 $ABCD$ 的內角和等於兩個三角形的內角和，即四邊形 $ABCD$ 的內角和為 $2\times180^\circ=360^\circ$ 。

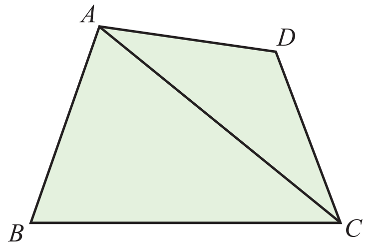


圖 3-12

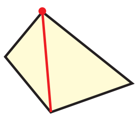
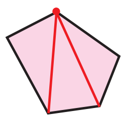
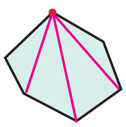
活動 4 利用分割三角形的組合，理解四邊形的內角和等於 360 度，進一步推廣可得 n 邊形的內角和為 $(n-2)\times180^\circ$。

基會試題
- 97 基測 I 第 3 題

放大 解

探索活動 多邊形的內角和

1. 自多邊形的一個頂點作對角線，並完成下表。

邊數	圖形	三角形個數	內角和
4		2	$2\times180^\circ=360^\circ$
5		3	$3\times180^\circ=540^\circ$
6		4	$4\times180^\circ=720^\circ$

放大 提問

2. 自十二邊形的一個頂點作對角線，可得到__10__個三角形，其內角和為__1800__度。

配合習作 P35 基礎題 4

3. 自 n 邊形的一個頂點作對角線，可得到__$(n-2)$__個三角形，其內角和為__$(n-2)\times180$__度。

關鍵提問
- 自十邊形的一個頂點作對角線，可以得到幾個三角形呢？其內角和為幾度？
答：8 個，1440 度。

放大

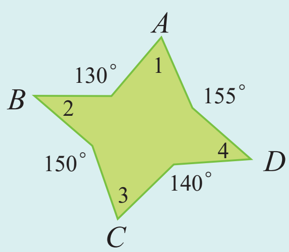
n 邊形的內角和

n 邊形的內角和為 $(n-2)\times180^\circ$ 。

精熟

會考觀測站－精熟演練題 搭配課文

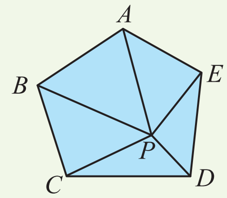
- 如圖，$\angle1+\angle2+\angle3+\angle4=$__215__度。



教學眉批

- 對於多邊形內角和公式的應用，可視學生程度先教導以實際數字做計算的例題，再教導利用代數求值的例題。例如：五邊形 $ABCDE$ 中，$\angle A=120^\circ$，$\angle B=150^\circ$，$\angle D=50^\circ$，$\angle E=100^\circ$，求$\angle C$。

補給站 多邊形的內角和



如圖，P 點為五邊形 $ABCDE$ 內部的一點，將 P 點與各頂點相連可得到 5 個三角形，這 5 個三角形的內角和為 $5\times180^\circ=900^\circ$。因此，五邊形 $ABCDE$ 的內角和為

（5 個三角形的內角和）－（1 個周角）$=900^\circ-360^\circ=540^\circ$。

在 n 邊形內部任取一點，連接此點與 n 邊形的 n 個頂點，可以得到 n 個三角形。因此，n 邊形的內角和為

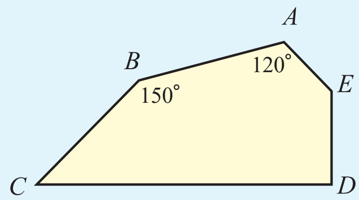
（n 個三角形的內角和）－（1 個周角）$=n\times180^\circ-360^\circ$

$=n\times180^\circ-2\times180^\circ$

$=(n-2)\times180^\circ$

放大 例 6 多邊形內角和的應用

五邊形 $ABCDE$ 中，$\angle A=120^\circ$，$\angle B=150^\circ$，設$\angle C$：$\angle D$：$\angle E=1:2:3$，求 $\angle E$。



解 設$\angle C=k^\circ$，$\angle D=2k^\circ$，$\angle E=3k^\circ$，

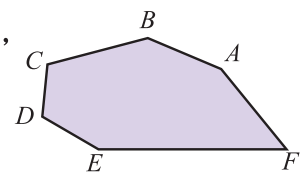
五邊形的內角和為$(5-2)\times180^\circ=540^\circ$

因此 $120+150+k+2k+3k=540$，解得 $k=45$，

故$\angle E=45^\circ\times3=135^\circ$。

放大 隨堂練習

解 六邊形 $ABCDEF$ 中，$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=520^\circ$，若$\angle E=3\angle F$，求$\angle F$。



由六邊形的內角和公式得

$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E+\angle F=(6-2)\times180^\circ$

$520^\circ+3\angle F+\angle F=720^\circ$，$4\angle F=200^\circ$，$\angle F=50^\circ$

加強

備課教學資源

- 隨堂輕鬆考第 20 回

會考觀測站－加強演練題 搭配例 6

1. 自十二邊形的一個頂點作對角線：
   (1) 可將十二邊形切割成 __10__ 個三角形。
   (2) 十二邊形的內角和爲 __1800__ 度。
2. 從凸八邊形的一個頂點最多可做出 a 條對角線，而這些對角線將凸八邊形切割成 b 個三角形，則 $a+b=$ __11__ 。

動畫 GGB

5 多邊形的外角和

對應能力指標 8-s-03

如圖 3-13，有一個四邊形公園，翰翰從公園邊的 P 點出發，依序經過 A、B、C、D 四個頂點，繞公園一圈回到 P 點。翰翰所轉的角度分別為∠1、∠2、∠3、∠4（如圖 3-14），就是四邊形的一組外角，那麼這一組外角的和是多少呢？

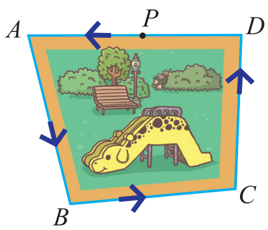


圖 3-13

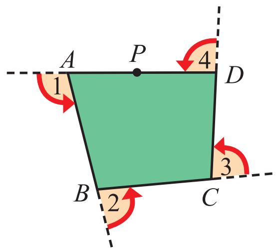


圖 3-14

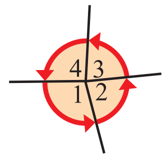


圖 3-15

基會　因為翰翰從公園邊的 P 點出發時是面對著 A 點的方向，沿逆時針方向繞公園一圈後回到 P 點，一樣是面對著 A 點的方向。因此，他四次所轉的角度和即為一個周角 360°（如圖 3-15），亦即四邊形 $ABCD$ 的一組外角和等於 360°。

同理，在圖 3-16 中，∠1、∠2、∠3、∠4、∠5 為五邊形 $ABCDE$ 的一組外角，這一組外角的和等於 360°（如圖 3-17）。

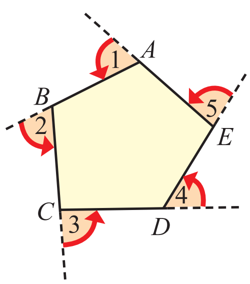


圖 3-16

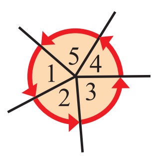


圖 3-17

事實上，任意 n 邊形的一組外角和都是為 360°。

提問

n 邊形的外角和

n 邊形的一組外角和為 360°。

基礎

活動 5 理解多邊形的外角和為 360 度。

教學眉批

- 利用繞多邊形公園所轉的角度認識多邊形的外角，再利用 n 邊形的內角和導出外角和為 360 度。
- 宜從邊數較少的多邊形來討論多邊形的外角和，學生比較容易得到結論。

基會試題

- 93 基測 II 第 10 題

轉Q 關鍵提問

- 二十邊形的一組外角和是幾度呢？
答：360 度。

會考觀測站－基礎演練題　搭配例 6

1. 求九邊形的內角和。
1260°
2. 若一個 n 邊形的內角和為1800°，求 n。
12
3. 四邊形 $ABCD$ 中，設$\angle A=x^\circ$，$\angle B=y^\circ$，$\angle C=z^\circ$，$\angle D=w^\circ$。
若 $3x=4y=6z=12w$，求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$。
$\angle A=144^\circ$，$\angle B=108^\circ$，$\angle C=72^\circ$，$\angle D=36^\circ$

教學眉批

- 任意多邊形的外角和皆爲 360°

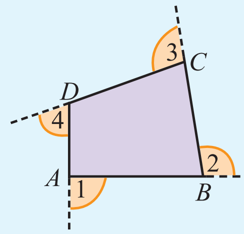
關鍵提問

- 四邊形 $ABCD$ 的內角和是幾度呢？
答：360 度。

放大 動畫 提問

例 7 多邊形外角和的應用

$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$、$\angle 4$ 為四邊形 $ABCD$ 的一組外角。若 $\angle 1=90^\circ$，$\angle 2=100^\circ$，$\angle 3=2x^\circ$，$\angle 4=(x+20)^\circ$，求 $\angle 3$、$\angle 4$。



解 因為四邊形的一組外角和為 360°，

所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+\angle 4=360^\circ$。

$90+100+2x+(x+20)=360$

$3x+210=360$

$3x=150$

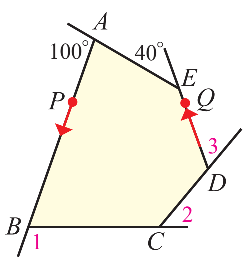
$x=50$

因此 $\angle 3=50^\circ\times 2=100^\circ$，

$\angle 4=50^\circ+20^\circ=70^\circ$。

放大 隨堂練習

解 右圖是一座五邊形的公園，阿貴從 P 點以逆時針方向繞著公園散步，經過 B、C、D 三點，到達 Q 點，則阿貴共轉了多少度？



因為五邊形的一組外角和為 360°，

所以 $\angle 1+\angle 2+\angle 3+40^\circ+100^\circ=360^\circ$

$\angle 1+\angle 2+\angle 3=220^\circ$

阿貴共轉了 220 度。

加強

會考觀測站－加強演練題 搭配例 7

1. 十二邊形的一組外角和是幾度？
360°
2. 十四邊形的一組外角和是幾度？
360°

動畫 6 正多邊形的內角與外角

對應能力指標 8-s-03

每一個內角都相等，且每一個邊長也都相等的 n 邊形，稱為正 n 邊形。由於正 n 邊形的內角和為 $(n-2)\times180^\circ$，且每個內角都相等，故每一個內角皆為 $\dfrac{(n-2)\times180^\circ}{n}$。

由一個內角與其一個外角的和皆為 180° 可知，正 n 邊形的每一個外角也都相等。因為任意多邊形的外角和都是 360°，所以正 n 邊形的每一個外角皆為 $\dfrac{360^\circ}{n}$，因此正 n 邊形的每一個內角也可以寫成 $180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$。

放大 正 n 邊形的內角與外角 基會

1. 正 n 邊形的每一個內角皆為 $\dfrac{(n-2)\times180^\circ}{n}$，亦為 $180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$。
2. 正 n 邊形的每一個外角皆為 $\dfrac{360^\circ}{n}$。

例 8 正多邊形的內角與外角

配合習作 P35 基礎題 6

正九邊形的每一個內角與外角分別是多少度？

解一 先求內角，再求外角

正九邊形的每一個內角為 $\dfrac{(9-2)\times\cancel{180^\circ}^{\,20^\circ}}{\cancel{9}}=7\times20^\circ=140^\circ$。

正九邊形的每一個外角為 $180^\circ-140^\circ=40^\circ$。

解二 先求外角，再求內角

正九邊形的每一個外角為 $\dfrac{360^\circ}{9}=40^\circ$。

正九邊形的每一個內角為 $180^\circ-40^\circ=140^\circ$。

放大 隨堂練習

配合習作 P35 基礎題 5

解 正 n 邊形的一個內角是 135°，求 n。

因為正 n 邊形的每一個外角為 $180^\circ-135^\circ=45^\circ$，

所以 $\dfrac{360}{n}=45$，$n=8$

基礎

活動 6 熟悉正多邊形的內角與外角，及相關應用。

教學眉批

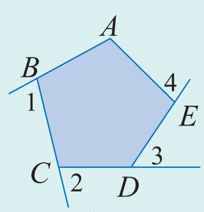
- 由 n 邊形的內角和為 $(n-2)\times180^\circ$ 推得正 n 邊形的每一個內角為 $\dfrac{(n-2)\times180^\circ}{n}$。
- 正多邊形的每一個外角比內角好記，故可引導學生熟記每一個外角為 $\dfrac{360^\circ}{n}$，再由外角與內角相加等於 180°，得到每一個內角為 $180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$。

基會試題

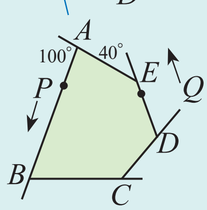
- 92 基測 I 第 18 題
- 94 基測 II 第 15 題
- 100 基測 I 第 18 題
- 100 基測 II 第 12 題
- 101 基測第 21 題

會考觀測站－基礎演練題 搭配例 7

1. 如圖，五邊形 $ABCDE$ 中，$\angle1$、$\angle2$、$\angle3$、$\angle4$ 分別為 $\angle B$、$\angle C$、$\angle D$、$\angle E$ 的外角，設 $\angle A=100^\circ$，求 $\angle1+\angle2+\angle3+\angle4$。$280^\circ$



2. 如圖，一座五邊形的公園，今由 P 點出發，以逆時針方向繞著公園散步，當走到 Q 點時，求圖形上的箭頭方向共轉了幾度。220°



教學眉批

■ 正多邊形地磚的一個內角度數若是 360 的因數，則可以鋪滿地面，因此只有正三角形、正方形及正六邊形的地磚可以鋪滿地面。

在生活中時常看到由大小相同的正方形地磚緊密連結鋪滿的地面，如圖 3-18。為什麼這些正方形地磚可以緊密連結呢？

圖 3-18

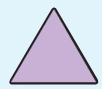
因為正方形地磚的每一個內角都是 90°，所以在相同頂點的四個地磚內角之和為 $90^\circ \times 4 = 360^\circ$，恰好形成一個周角。因此相同頂點的 4 個正方形地磚可以緊密連結。

同理，如果要判別大小相同的正多邊形地磚是否可以緊密連結，只要檢查此正多邊形地磚內角的度數是否為 360 的因數即可。

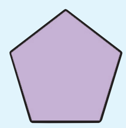
放大 互動

例 9 正多邊形的應用

1. 判別是否可以將大小相同的正三角形地磚緊密地鋪設在地面上？



2. 判別是否可以將大小相同的正五邊形地磚緊密地鋪設在地面上？

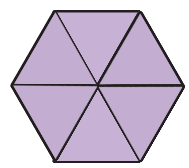


解

1. 因為正三角形地磚的每一個內角為 60°，

$360 \div 60 = 6$

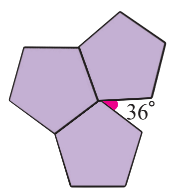
所以可以緊密地鋪設在地面上。



2. 因為正五邊形的每一個內角為 $180^\circ - \dfrac{360^\circ}{5} = 108^\circ$，

$360 \div 108 = 3 \cdots\cdots 36$

所以不可以緊密地鋪設在地面上。



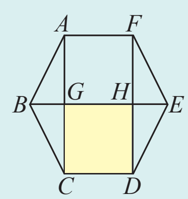
精熟

備課教學資源

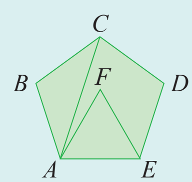
■ 隨堂輕鬆考第 21 回

會考觀測站－精熟演練題 搭配例 9

1. 右圖為正六邊形 $ABCDEF$，其邊長為 2，連接 $\overline{AC}$、$\overline{BE}$、$\overline{DF}$，求圖中黃色區域四邊形的周長。$4+2\sqrt{3}$

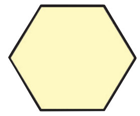


2. 如圖，五邊形 $ABCDE$ 為正五邊形，$\triangle AEF$ 為正三角形，求 $\angle FAC$。12°

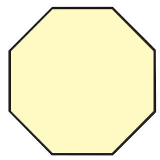


放大 提問 **隨堂練習**

解 1. 判別是否能將大小相同的正六邊形地磚緊密地鋪設在地面上？ 因為正六邊形地磚的每一個內角為 120°
$360^\circ \div 120^\circ = 3$，所以能夠鋪滿地面。



解 2. 判別是否能將大小相同的正八邊形地磚緊密地鋪設在地面上？ 因為正八邊形地磚的每一個內角為 135°
$360^\circ \div 135^\circ = 2 \cdots 90$，所以不能夠鋪滿地面。

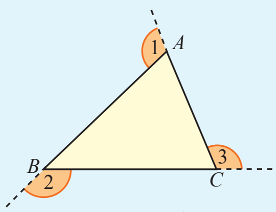


轉Q 關鍵提問

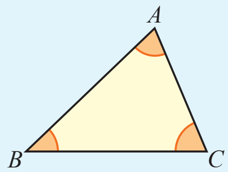
- 判別是否能將大小相同的正十邊形地磚緊密地鋪設在地面上呢？
答：不能。

重點回顧

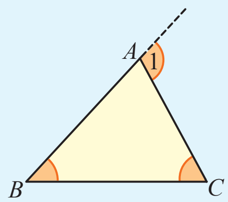
放大 ❶ **三角形的外角和：**
三角形的一組外角和為 360°。
例 如圖，$\angle 1+\angle 2+\angle 3=360^\circ$。



❷ **三角形的內角和：**
三角形的內角和為 180°。
例 如圖，$\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$。



❸ **三角形的外角定理：**
三角形的任一外角等於兩個內對角的和。
例 如圖，$\angle 1=\angle B+\angle C$。



放大 ❹ **n 邊形的內角和：**
n 邊形的內角和為 $(n-2)\times 180^\circ$。

❺ **n 邊形的外角和：**
n 邊形的一組外角和為 360°。

❻ **正 n 邊形的內角度數：**
正 n 邊形的每一個內角皆為 $\dfrac{(n-2)\times 180^\circ}{n}$ 或 $180^\circ-\dfrac{360^\circ}{n}$。

❼ **正 n 邊形的外角度數：**
正 n 邊形的每一個外角皆為 $\dfrac{360^\circ}{n}$。

基礎

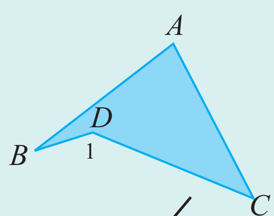
活化體驗站

趣味數學

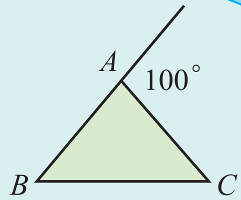
- 老師：「小花，你計算完這道加法題了嗎？」
小花：「算完了，而且計算了十次。」
老師：「你真是個認真的好孩子。」
小花：「但是，我得到十個不同的答案！」

會考觀測站－基礎演練題 搭配重點回顧

1. 如圖，$\angle A=80^\circ$，$\angle B=20^\circ$，$\angle C=40^\circ$，
則$\angle 1=$ 140 度。



2. 如圖，$\triangle ABC$ 中，$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\angle BAC$ 的外角為 100°，
則$\angle B=$ 50 度。



備課教學資源

- 免試基礎講堂 3-1
- 免試精熟本 3-1

基會試題
- 93 基測 I 第 13 題
- 97 基測 II 第 24 題
- 98 基測 II 第 21 題
- 106 會考第 19 題

3-1 自我評量

放大 **1** 已知∠1、∠2、∠3 為△ABC 的一組外角，且∠1：∠2：∠3＝3：4：5，求∠3。 課 P94 例 1

解

設∠1＝$3x^{\circ}$，∠2＝$4x^{\circ}$，∠3＝$5x^{\circ}$，

因為∠1、∠2、∠3 為△ABC 的一組外角

所以 $3x^{\circ}+4x^{\circ}+5x^{\circ}=360^{\circ}$，$12x=360$，$x=30$

因此∠3＝150°

答：∠3＝150°。

放大 **2** 已知△ABC 為等腰三角形，$\angle A=80^{\circ}$，則： 課 P95

解

(1)若∠A 是頂角，∠B 是多少度？

(2)若∠A 是底角，∠B 是多少度？

(1)因為△ABC 為等腰三角形，∠A 為頂角，所以∠B＝∠C，

$\angle A+\angle B+\angle C=180^{\circ}$，

$80^{\circ}+2\angle B=180^{\circ}$，$\angle B=50^{\circ}$

(2)① ∠A 為底角，若∠B 亦為底角，則 $\angle B=\angle A=80^{\circ}$

② ∠A 為底角，若∠B 為頂角，則 $\angle B=180^{\circ}-2\times80^{\circ}=20^{\circ}$

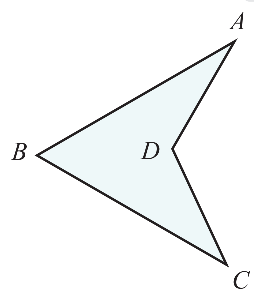
答：(1) 50° (2) 80° 或 20°。

放大 **3** 如圖，$\angle A=30^{\circ}$，$\angle B=60^{\circ}$，$\angle C=35^{\circ}$，求∠ADC。 課 P100

解

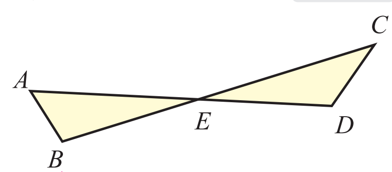
$\angle ADC=\angle A+\angle B+\angle C$

$=30^{\circ}+60^{\circ}+35^{\circ}=125^{\circ}$



答：125°。

放大 **4** 如圖，$\overline{AD}$ 與 $\overline{BC}$ 相交於 E 點，若 $\angle A=(4x-1)^{\circ}$，$\angle B=(6x+21)^{\circ}$，$\angle C=(3x-4)^{\circ}$，$\angle D=(10x-18)^{\circ}$，求 x。 課 P100



解

因為 $\angle A+\angle B=\angle BED=\angle C+\angle D$，

所以 $(4x-1)+(6x+21)=(3x-4)+(10x-18)$，

$10x+20=13x-22$

$-3x=-42$，$x=14$

答：$x=14$。

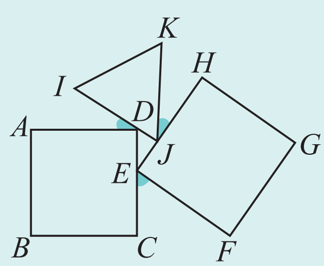
基會

備課教學資源
- 會考100分 3-1
- 會考基礎卷 3-1
- 會考精熟卷 3-1
- 段考精選試題 3-1

98 基測 II 第 21 題 搭配自評第 1 題

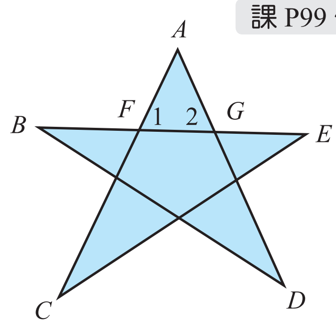
((C)) 右圖為兩正方形 $ABCD$、$EFGH$ 與正三角形 IJK 的位置圖，其中 D、E、J 三點分別在 $\overline{IJ}$、$\overline{CD}$、$\overline{EH}$ 上。若 $\angle CEF=55^{\circ}$，則∠IDA 與∠KJH 的角度和為何？

(A) 55° (B) 60° (C) 65° (D) 70°



放大 解 **5** 右圖為五角星形 $ABCDE$，利用「外角等於兩個內對角的和」，以含有$\angle 1$、$\angle 2$ 的算式完成下面的空格。

課 P99 例 4



$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$

$=\angle A+(\angle C+\angle E)+(\angle B+\angle D)$

$=\angle A+$ __$\angle 1$__ $+$ __$\angle 2$__

$=$ __180__ 度

放大 **6** 四邊形 $ABCD$ 中，設$\angle A=x^\circ$，$\angle B=y^\circ$，$\angle C=z^\circ$，$\angle D=t^\circ$。若將 x、y、z、t 依序排列，形成公差為 10 的等差數列，求$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$、$\angle D$。

課 P102 例 6

解

設$\angle A=x^\circ$，則$\angle B=(x+10)^\circ$，$\angle C=(x+20)^\circ$，$\angle D=(x+30)^\circ$。

因為四邊形的內角和為 360°，所以$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D=360^\circ$。

$x+(x+10)+(x+20)+(x+30)=360$

$4x+60=360$

$x=75$

所以$\angle A=75^\circ$，$\angle B=85^\circ$，$\angle C=95^\circ$，$\angle D=105^\circ$。

答：$\angle A=75^\circ$，$\angle B=85^\circ$，$\angle C=95^\circ$，$\angle D=105^\circ$。

放大 **7** 設一個正 n 邊形其一個外角是 30°，求 n。

課 P105 例 8

解

正 n 邊形的每一個外角為 $\dfrac{360^\circ}{n}$。

$\dfrac{360^\circ}{n}=30^\circ$

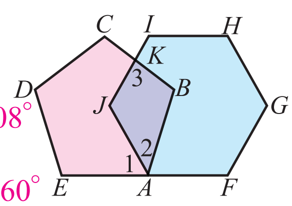
$n=12$

答：12。

放大 **8** 如圖，A 點在 $\overline{EF}$ 上，正五邊形 $ABCDE$ 及正六邊形 $AFGHIJ$ 中，$\overline{BC}$ 與 $\overline{IJ}$ 相交於 K 點，求$\angle 1$、$\angle 2$、$\angle 3$。

課 P105 例 8

解



$\angle 1$ 為正六邊形 $AFGHIJ$ 的外角

所以$\angle 1=\dfrac{360^\circ}{6}=60^\circ$

正五邊形 $ABCDE$ 的一個內角為$180^\circ-\dfrac{360^\circ}{5}=108^\circ$

$\angle 1+\angle 2=108^\circ$，$\angle 2=48^\circ$

在四邊形 $ABKJ$ 中，$\angle 2+\angle ABK+\angle 3+\angle AJK=360^\circ$

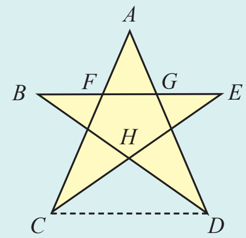
$48^\circ+108^\circ+\angle 3+120^\circ=360^\circ$，$\angle 3=84^\circ$

答：$\angle 1=60^\circ$，$\angle 2=48^\circ$，$\angle 3=84^\circ$。

基會

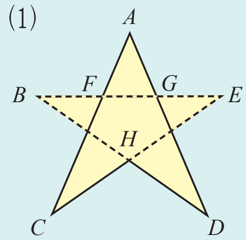
教學眉批

■第 5 題另解：



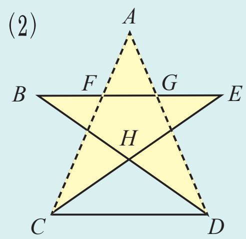
連 $\overline{CD}$，設 $\overline{BD}$ 和 $\overline{CE}$ 交於 H 點。

(1)



$\angle CHD=$
$\angle A+\angle C+\angle D$

(2)



$\angle HCD+\angle HDC$
$=\angle B+\angle E$

由(1)、(2)得
$\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E$
$=\angle CHD+\angle HCD+\angle HDC$
$=180^\circ$
（三角形內角和為 180°）

100 基測 I 第 30 題 搭配自評第 1 題

(C) ■如圖，△ABC 中，以 B 點為圓心，$\overline{BC}$ 長為半徑畫弧，分別交 $\overline{AC}$、$\overline{AB}$ 於 D、E 兩點，並連接 $\overline{BD}$、$\overline{DE}$。若$\angle A=30^\circ$，$\overline{AB}=\overline{AC}$，則$\angle BDE=$？

(A) 45°　(B) 52.5°　(C) 67.5°　(D) 75°