

# 1-2 等差級數

## 本節性質與公式摘要

1. 級數：將一個數列的各項用加號「+」連接，所成的式子稱為級數。

**例**  $1+7+(-2)+(-6)$  是一個級數。

2. 等差級數：當  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  為等差數列時， $a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$  為等差級數。

**例**  $10+20+30+40+50$  是一個等差級數。

3. 等差級數和的公式：

(1) 如果一個等差級數的首項為  $a_1$ ，末項為  $a_n$ ，則此等差級數前  $n$  項的和為  $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 。即等差級數的和為  $\frac{\text{項數} \times (\text{首項} + \text{末項})}{2}$ 。

**例** 等差級數  $10+20+30+40+50$  ( $a_1=10, a_5=50, d=10$ ) 的和為

$$S_5 = \frac{5}{2} (a_1 + a_5) = \frac{5}{2} (10 + 50) = 150$$

**例** 一等差級數共有  $n$  項，其首項為 10，末項為 50，總和為 150，則由  $150 = \frac{n(10+50)}{2}$ ，可得項數  $n=5$ 。

(2) 將  $a_n = a_1 + (n-1)d$  代入公式  $S_n = \frac{n(a_1+a_n)}{2}$ ，可得

$$S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}。$$

**例** 等差級數  $10+20+30+40+50$  ( $a_1=10, a_5=50, d=10$ ) 的和為

$$S_5 = \frac{5}{2} [2a_1 + (5-1)d] = \frac{5}{2} [2 \times 10 + 4 \times 10] = 150$$

**例** 一等差級數共有  $n$  項，其首項為 20，公差為 10，總和為 140，則由  $140 = \frac{n[2 \times 20 + (n-1) \times 10]}{2}$ ，可得項數  $n=4$ 。


**基礎題**

- ① 設一個等差級數共有 31 項，其首項為  $-9$ ，末項為  $201$ ，求此等差級數的和與公差。 **11分 8分** 課 P28 例 2

$$S_{31} = \frac{31 \times [(-9) + 201]}{2} = 2976$$

$$201 = (-9) + (31-1)d$$

$$d = 7$$

**答：**和為 2976，公差為 7。

- ② 求等差級數  $8 + 10 + 12 + \dots + 206$  的和。 **11分 8分** 課 P28 例 2

$$\text{公差 } d = 10 - 8 = 2$$

$$206 = 8 + (n-1) \times 2 \text{ 得 } n = 100$$

$$S_{100} = \frac{100 \times (8 + 206)}{2} = 10700$$

**答：**10700。

- ③ 在 12 與 36 之間插入 15 個數，使其成為一個等差數列，求此等差數列的和。 **11分 8分** 課 P28 例 2

$$a_1 = 12, a_{17} = 36$$

$$S_{17} = \frac{17 \times (12 + 36)}{2} = 408$$

**答：**408。

- ④ 設一個等差級數的首項為  $-8$ ，公差為 4，求此等差級數前 11 項的和。 **11分 8分** 課 P30 例 3

$$a_1 = -8, d = 4, n = 11, \text{ 代入公式 } S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2} \text{ 得}$$

$$S_{11} = \frac{11 \times [2 \times (-8) + (11-1) \times 4]}{2} = \frac{11 \times [(-16) + 40]}{2} = 132$$

**答：**132。

- ⑤ 設一個等差級數的首項為 $-5$ ，末項為 $315$ ，和為 $2635$ ，求其項數與公差。

11分 8分 課 P31 例 4

$$a_1 = -5, a_n = 315, S_n = 2635, \text{ 代入公式 } S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \text{ 得}$$

$$2635 = \frac{n[(-5) + 315]}{2}, n = 17$$

代入公式  $a_n = a_1 + (n-1)d$  得

$$315 = (-5) + (17-1) \times d$$

$$d = 20$$

答：項數為 $17$ ，公差為 $20$ 。

- ⑥ 等差級數  $(a-10) + (5a-10) + (9a-10) + \dots + (41a-10)$  的和為 $-803$ ，求 $a$ 的值。

11分 8分

課 P28 例 2

$$\text{公差 } d = (5a-10) - (a-10) = 4a$$

由公式  $a_n = a_1 + (n-1)d$  得

$$41a-10 = (a-10) + (n-1) \times 4a$$

$$41a-10 = a-10 + 4an-4a$$

$$44a = 4an$$

$$n = 11$$

$$S_{11} = \frac{11 \times [(a-10) + (41a-10)]}{2} = -803$$

$$a = -3$$

答： $a = -3$ 。

- ⑦ 等差級數  $35 + 30 + 25 + \dots$  前 $n$ 項的和為 $110$ ，求 $n$ 。

課 P31 例 5

11分 8分

$$\text{公差 } d = 30 - 35 = -5$$

$$S_n = \frac{n[2 \times 35 + (n-1) \times (-5)]}{2} = 110$$

$$n(70 - 5n + 5) = 220$$

$$n^2 - 15n + 44 = 0$$

$$(n-4)(n-11) = 0$$

$$n = 4 \text{ 或 } n = 11$$

答： $n = 4$  或  $n = 11$ 。

- ⑧ 小佩擬定減重計畫：自現在起，每個月以等差數列減重，第一個月減重 0.5 公斤，第二個月減重 0.6 公斤，第三個月減重 0.7 公斤，……。若減重一年的目標體重為 70 公斤，則小佩目前體重為多少公斤？

課 P33 例 6

11 分 8 分

$$a_1 = 0.5, d = (0.6 - 0.5) = 0.1, n = 12$$

$$S_{12} = \frac{12 \times [2 \times 0.5 + (12 - 1) \times 0.1]}{2} = \frac{12 \times (1 + 1.1)}{2} = 12.6$$

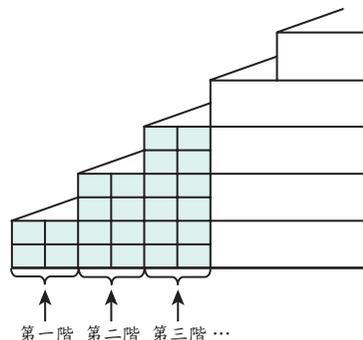
小佩目前的體重為  $70 + 12.6 = 82.6$  (公斤)

答：82.6 公斤。

- ⑨ 如圖，樓梯每一階的深度與增加的高度都固定。工人在此樓梯的一側貼上大小相同的瓷磚，第一階貼 4 塊瓷磚，第二階貼 8 塊瓷磚，……，依此規則貼了 220 塊瓷磚後，剛好貼完此樓梯的一側。則此樓梯共有多少階？

12 分 8 分

課 P34 例 7



$$a_1 = 4, d = 8 - 4 = 4, S_n = 220$$

$$S_n = \frac{n [2 \times 4 + (n - 1) \times 4]}{2} = 220$$

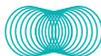
$$n(8 + 4n - 4) = 440$$

$$n^2 + n - 110 = 0$$

$$(n - 10)(n + 11) = 0$$

$$n = 10 \text{ 或 } n = -11 \text{ (不合)}$$

答：10 階。


**精熟題**

- ① 求 50 至 150 中，被 3 除餘 1 的所有整數之和。 **8 分**

50 至 150 中，被 3 除餘 1 的整數為 52, 55, 58, ……，148。

$$148 = 52 + (n-1) \times 3 \text{ 得 } n = 33$$

$$S_{33} = \frac{33 \times (52 + 148)}{2} = 3300$$

**答：**3300。

- ② 設一個等差數列的首項為 -49，第 10 項為 -22，則：**每小題 5 分，共 10 分**

(1) 此等差數列自第幾項開始為正數？

$$-22 = (-49) + (10-1)d$$

$$d = 3$$

$$a_n = (-49) + (n-1) \times 3 = 3n - 52 > 0$$

$$n > 17\frac{1}{3}$$

因此自第 18 項開始為正數。

**答：**第 18 項。

(2) 自第 1 項加到第幾項時，其和會最小？

由(1)得知第 18 項開始為正數，且第 17 項為負數，

因此自第 1 項加到第 17 項時，其和會最小。

**答：**第 17 項。

- ★③ 若有一等差數列，前 10 項和為 90，且第 2 項、第 5 項、第 8 項的和為 36，則此等差數列的公差為何？ **10 分**

$$\begin{cases} 90 = \frac{10(2a_1 + 9d)}{2} \\ (a_1 + d) + (a_1 + 4d) + (a_1 + 7d) = 36 \end{cases}$$

$$\text{整理後可得} \begin{cases} 2a_1 + 9d = 18 \cdots \cdots \text{①} \\ a_1 + 4d = 12 \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\text{①} - 2 \times \text{②} \text{ 得 } d = -6, \text{ 即公差為 } -6$$

**答：**-6。