1-2 等差級數

1. 等差級數的和　　2. 等差級數和的公式

1 等差級數的和

對應能力指標 8-n-06

動畫　在下水道工程的工地旁放著一堆水管（如圖 1-1），翰翰想知道這堆水管共有多少根。

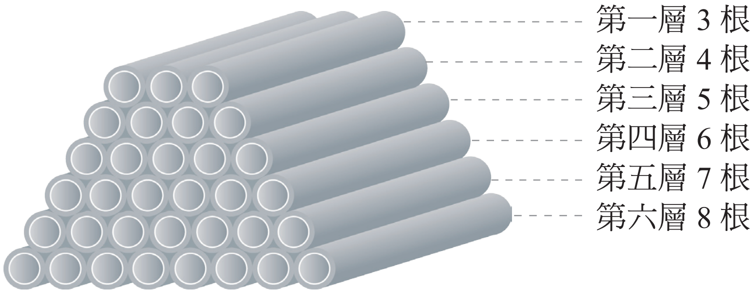


圖 1-1

將圖 1-1 上下顛倒成為圖 1-2，再將圖 1-1 與圖 1-2 拼成圖 1-3。

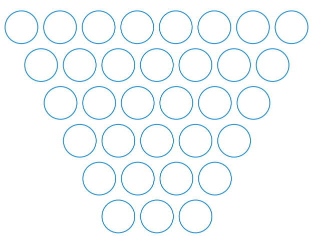


圖 1-2

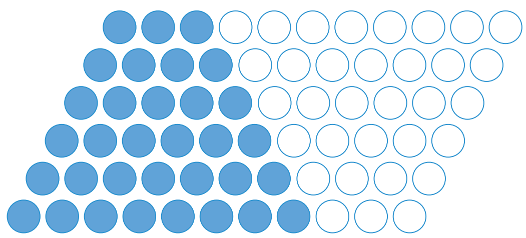


圖 1-3

圖 1-3 中共有 6 層水管，每層的水管都有 11 根，因此總共有 6×11 根水管，而這恰好是圖 1-1 的兩倍，所以圖 1-1 中的水管共有 $\dfrac{6\times11}{2}=33$ 根。

被譽為「數學王子」的德國數學家高斯（Carl Friedrich Gauss，1777-1855），小時候就用過類似的方法計算這類的問題。據說，在高斯十歲那年，有一天老師要求全班同學計算出 $1+2+3+4+5+\cdots\cdots+98+99+100$ 的和。當老師將題目寫完後不久，高斯就在他的小石板上寫出 5050，並舉手告訴老師這個答案。你知道高斯是怎麼算出來的嗎？

加強

教學時數

- 5小時

活動 1 認識等差級數，並從少數項的實例中，理解等差級數 n 項和的求法。

教學眉批

- 利用高斯的方法就可以求出等差級數的和。
- 數列以觀察各項間的關係為重點，而級數則以觀察全體的式子為重點，在解題時也常利用數列的公式。

注意事項

- 等差級數求和公式的建立，依下列三個步驟進行：
  (1) 圖像說明。
  (2) 有限項的求和方法。
  (3) 符號化的求和公式。

會考觀測站－加強演練題　搭配課文

- 已知 $1+2+3+\cdots\cdots+100=5050$，求 $1+2+3+\cdots\cdots+100+99+98+\cdots\cdots+1$ 的和。　10000

備課教學資源

- 補救教學．計算 Basic 1-2
- 免試加強類題本 1-2

教學眉批

- S 常用來表示和，在這裡令$1+2+3+\cdots\cdots+100$ 的和為 S。
- 先用實例介紹級數，再說明等差級數，然後利用文字符號重新教授等差級數的意義。
- 等差級數求和的方法其實與高斯的方法相同，但用符號推導有其難度，教學時應先熟練較少項求和，以建立方法，之後再學習一般式的符號表示。
- 當等差級數的首項、末項及項數都知道時，即可以高斯的作法求得等差級數的和。

課轉Q 關鍵提問

- 仿照高斯的作法，$13+15+17+19+21$ 的和是多少呢？
答：85。

要計算 $1+2+3+\cdots\cdots+98+99+100$ 的和，可以先假設

$$S=1+2+3+\cdots\cdots+98+99+100$$ ← 由小到大

同樣地，也可以寫成

$$S=100+99+98+\cdots\cdots+3+2+1$$ ← 由大到小

將兩式相加可得：

$$\begin{array}{rrcrcrcccrcrcr} & S= & 1 & + & 2 & + & 3 & + & \cdots\cdots & + & 98 & + & 99 & + & 100 \\ +) & S= & 100 & + & 99 & + & 98 & + & \cdots\cdots & + & 3 & + & 2 & + & 1 \\ \hline & 2S= & 101 & + & 101 & + & 101 & + & \cdots\cdots & + & 101 & + & 101 & + & 101 \end{array}$$ ← 共 100 個 101

所以 $2S=101\times100$

$$S=\frac{101\times100}{2}=5050$$

放大 **隨堂練習**

提問 仿照高斯的作法，求 $43+45+47+49+51$ 的和。

解 設 $S=43+45+47+49+51$

$$\begin{array}{rr} & S=43+45+47+49+51 \\ +) & S=51+49+47+45+43 \\ \hline & 2S=94+94+94+94+94 \end{array}$$

所以 $2S=94\times5$，

$$S=\frac{94\times5}{2}=235$$

因此 $43+45+47+49+51=235$。

將數列的各項用加號「＋」連接而成的式子稱為**級數**。例如：

2, 4, 5, 7, 9 是一個數列，$2+4+5+7+9$ 就是一個級數。

當 a_1，a_2，a_3，……，a_n 為等差數列時，將此數列的各項依序用加號「＋」連接，所得的式子 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ 就稱為**等差級數**。

在高斯計算 $1+2+3+\cdots\cdots+99+100=5050$ 的式子中，

$1+2+3+\cdots\cdots+99+100$ 是一個**等差級數**，5050 是此**等差級數的和**。

基礎

會考觀測站－基礎演練題　搭配課文

(B) 1. 有一級數 $a_1=1$，$a_2=1$，且 $a_{m+2}=a_{m+1}+a_m$，則此級數前 6 項的和為多少？
(A) 19　(B) 20　(C) 21　(D) 22

(D) 2. 有一個等差級數 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$，其和為 S_n，則各項皆加上 5 後所成的新等差級數，其和為 T_n，則下列何者正確？
(A) $S_n=T_n$　(B) $T_n=5S_n$　(C) $T_n=S_n+5$　(D) $T_n=S_n+5n$

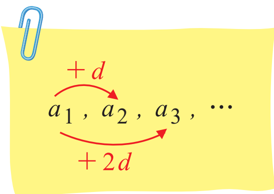
動畫

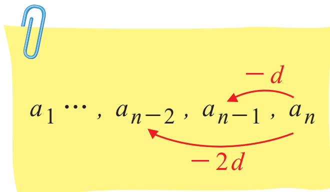
2 等差級數和的公式

對應能力指標 8-n-06

活動 2 推導出等差級數 n 項和的公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，並應用公式解題。

若一個等差級數的首項為 a_1，公差為 d，第 2 項為 a_2，……，第 n 項為 a_n，其前 n 項的和可記為 S_n，即 $S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$。
接下來將依照高斯的做法，推導出等差級數和的公式。





因為

$a_2=a_1+d$　　　　$a_{n-1}=a_n-d$

$a_3=a_1+2d$　　　　$a_{n-2}=a_n-2d$

$\vdots$　　　　$\vdots$

$a_n=a_1+(n-1)d$　　　　$a_1=a_n-(n-1)d$

所以 S_n 也可以寫成下列兩種形式

$$
\begin{array}{rl}
S_n= & a_1+(a_1+d)+(a_1+2d)+\cdots\cdots+[a_1+(n-1)d] \\
+)\ S_n= & a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots\cdots+[a_n-(n-1)d] \\
\hline
2S_n= & \underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\cdots\cdots+(a_1+a_n)}_{\text{共有 } n \text{ 個}(a_1+a_n)}
\end{array}
$$

$2S_n=n(a_1+a_n)$

即 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$。

注意事項

- 為了使等差級數和的公式易於說明，必須先展出 $S_n=a_n+(a_n-d)+(a_n-2d)+\cdots+(a_1+2d)+(a_1+d)+a_1$ 這個式子；它其實是將原等差級數的末項做為首項，原首項做為末項，而原公差 d 轉變為新公差 $-d$。教學時，可用例題 1 為實例詳加說明。

放大

等差級數和的公式（一）

等差級數的和＝$\dfrac{\text{項數}\times(\text{首項}+\text{末項})}{2}$，即 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$。

基會

93 基測 II 第 18 題 搭配課文

(C) ■ 求等差級數 $4+7+10+\cdots+100$ 的和為何？

(A) 1568　(B) 1664　(C) 1716　(D) 1768

教學眉批

- 例題 1 與例題 2 的不同處在於：例題 1 中，項數可直接由題目得知。
- 例題 2 中，已知 a_1、a_n，要求 S_n。但公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 中尚需知道 n，因此利用前一節所學第 n 項公式先求出 n，再代入計算。

基會試題

- 93基測 II 第 18 題

放大 例 1 **利用 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 求和** 配合習作 P8 基礎題 1

等差級數 $5+8+11+\cdots\cdots+32$ 共 10 項，求此級數的和。

解 首項 $a_1=5$，項數 $n=10$，末項 $a_{10}=32$。

代入公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 得

$$S_{10}=\frac{10\times(5+32)}{2}=185$$

此級數的和為 185。

放大 隨堂練習

等差級數 $23+27+31+\cdots\cdots+107$ 共 22 項，求此級數的和。

解 首項 $a_1=23$，項數 $n=22$，末項 $a_{22}=107$。

代入公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 得

$S_{22}=\dfrac{22\times(23+107)}{2}=1430$

此級數的和為 1430。

放大 動畫 例 2 **先求 n，再代入 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 求和** 基會 配合習作 P8、9 基礎題 2、3、6

求等差級數 $41+38+35+\cdots\cdots+5$ 的和。

解

思路分析

(1)先利用公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，求得項數。

(2)再利用公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，求得總和。

首項 $a_1=41$，末項 $a_n=5$，公差 $d=38-41=-3$。

代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，得

$5=41+(n-1)\times(-3)$

$n=13$

因此 $S_{13}=\dfrac{13\times(41+5)}{2}=299$

即 $41+38+35+\cdots\cdots+5=299$。

基礎

會考觀測站－基礎演練題 搭配例 2、3

((C)) 1. $5+5\dfrac{2}{5}+5\dfrac{4}{5}+\cdots\cdots$ 到第 16 項的和為下列何者？

(A) 120 (B) 124 (C) 128 (D) 132

((C)) 2. 計算 $6+12+18+\cdots\cdots+66=$？

(A) 342 (B) 360 (C) 396 (D) 504

放大 隨堂練習

求下列各等差級數的和：

解 (1) $2+6+10+\cdots\cdots+42$

$a_1=2$，$d=4$，$a_n=42$，代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得

$42=2+(n-1)\times4$

$42=2+4n-4$

$n=11$

代入公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 得 $S_{11}=\dfrac{11\times(2+42)}{2}=242$

解 (2) $5+1+(-3)+\cdots\cdots+(-39)$

$a_1=5$，$d=-4$，$a_n=-39$，代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得

$-39=5+(n-1)\times(-4)$

$-39=5-4n+4$

$n=12$

代入公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 得 $S_{12}=\dfrac{12\times[5+(-39)]}{2}=-204$

由 1-1 節所學的 $a_n=a_1+(n-1)d$，代入公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，可得

$$S_n=\frac{n[a_1+a_1+(n-1)d]}{2}=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}。$$

因此，在不知道末項 a_n 的情形下，也可以直接由首項 a_1、公差 d 與項數 n 求出等差級數的和。

放大 **等差級數和的公式（二）**

$$S_n=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$$

數學小語錄

知識就是力量。

—培根（Francis Bacon，1561-1626）

基礎

活動 3 推導出等差級數 n 項和的公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$，並應用公式解題。

教學眉批

■ 將公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 中，可得 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$。只知道首項、公差與項數時，利用此公式較為方便。

會考觀測站－基礎演練題 搭配課文

1. 等差級數 $S_n=3n^2+4n$，則 $a_1=$ __7__，$S_{10}=$ __340__。

2. 有一個等差級數的首項是 130，公差是 -4。若前 n 項的和為最大，求 n。 33

教學眉批

- 例題 3 有兩解法，宜分別講解後再比較其差異。
- 公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 較為繁複，宜在課堂中時常請學生唸誦以便記憶。

關鍵提問

- 此題有兩個解法，你喜歡用哪個呢？為什麼？
答：(由學生自行回答)。

放大 提問 例 3 利用等差級數和的公式求和 配合習作 P8 基礎題 4

已知一個等差級數的首項為 3，公差為 -2，求此等差級數前 12 項的和。

解一 利用 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$

思路分析
(1)先利用公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，求得 a_{12}。
(2)再利用公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，求得總和。

首項 $a_1=3$，公差 $d=-2$，項數 $n=12$。
代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得

$$a_{12}=3+(12-1)\times(-2)=3-22=-19$$

因此 $S_{12}=\dfrac{12\times[3+(-19)]}{2}=-96$，
故前 12 項的和為 -96。

放大 解二 利用 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$

思路分析
已知首項、項數及公差，但不知道末項，可利用公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 求和。

首項 $a_1=3$，公差 $d=-2$，項數 $n=12$。
代入公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 得

$$S_{12}=\dfrac{12\times[2\times3+(12-1)\times(-2)]}{2}=-96$$

故前 12 項的和為 -96。

放大 隨堂練習

已知一個等差級數的首項為 7，公差為 3，求此等差級數前 20 項的和。

解 $a_1=7$，$d=3$，$n=20$，代入公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 得

$S_{20}=\dfrac{20\times[2\times7+(20-1)\times3]}{2}=\dfrac{20\times(14+57)}{2}=710$

精熟

會考觀測站－精熟演練題 搭配例 4

1. 某一等差級數共有 19 項。若首項與末項的和為 24，則 $a_6+a_7+a_{10}+a_{13}+a_{14}=$ __60__。

((D)) 2. 有一個等差數列首項為 5，公差為 3，則此級數第 11 項到第 20 項的和為多少？
(A) 460 (B) 465 (C) 480 (D) 485

放大 例 4 代入公式求項數與公差

配合習作 P9 基礎題 5

已知一個等差級數的首項為 29，末項為 -22，和為 63，求其項數與公差。

解 設項數為 n，公差為 d，代入公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 得

$63=\dfrac{n[29+(-22)]}{2}$，$7n=126$，$n=18$

又 $a_n=a_1+(n-1)d$

所以 $-22=29+(18-1)d$

$17d=-51$，$d=-3$

故此等差級數的項數為 18，公差為 -3。

放大 隨堂練習

解 已知一個等差級數的首項為 -4，末項為 26，和為 121，求其項數與公差。

$a_1=-4$，$a_n=26$，$S_n=121$，代入公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 得

$121=\dfrac{n[(-4)+26]}{2}$，$n=11$，代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得

$26=(-4)+(11-1)d$，$26=-4+10d$，$d=3$

放大 例 5 代入公式求項數

配合習作 P9 基礎題 7

等差級數 $-2+2+6+\cdots\cdots$ 前 n 項的和為 126，求 n。

解 首項 $a_1=-2$，公差 $d=2-(-2)=4$，前 n 項的和 $S_n=126$。

代入公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 得

$126=\dfrac{n[2\times(-2)+(n-1)\times 4]}{2}$

$4n^2-8n-252=0$

$n^2-2n-63=0$

$(n-9)(n+7)=0$

$n=9$ 或 $n=-7$（不合），故 $n=9$。

基礎

教學眉批

- 例題 4 先由等差級數和的公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 求出項數 n，再代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 解題。
- 例題 5 是直接利用公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 解題。

會考觀測站－基礎演練題　搭配例 4、6

1. 某一等差級數共有 21 項。若第 11 項爲 30，則此等差級數和爲 630 。
2. 已知一個等差級數的首項是 72，末項是 6，和爲 468，則此級數共有幾項？
   12 項

教學眉批

- 此類題型常會有較繁雜的一元二次方程式要化簡與求解，教師宜鼓勵學生解題要細心與耐心。
- 隨堂練習 2 的 n 有兩個答案，教師可提出此點讓學生討論其理由。

放大 隨堂練習

解 1. 等差級數 $1+5+9+\cdots\cdots$ 前 n 項的和為 153，求 n。

$a_1=1$，$d=4$，$S_n=153$，代入公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 得

$153=\dfrac{n[2\times1+(n-1)\times4]}{2}$

$n(2n-1)=153$，$2n^2-n-153=0$，

$(n-9)(2n+17)=0$，$n=9$ 或 $n=-\dfrac{17}{2}$（不合），故 $n=9$

解 2. 等差級數 $(-76)+(-68)+(-60)+\cdots\cdots$ 前 n 項的和為 -384，求 n。

$a_1=-76$，$d=8$，$S_n=-384$，代入公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 得

$-384=\dfrac{n[2\times(-76)+(n-1)\times8]}{2}$

$n(4n-80)=-384$，$n^2-20n+96=0$，$(n-8)(n-12)=0$，$n=8$ 或 $n=12$

補給站 等差級數和的公式

等差級數和的公式，也可以推導成其他不同的形式：

$$a_1=a_1$$
$$a_2=a_1+d$$
$$a_3=a_1+2d$$
$$\vdots$$
$$a_n=a_1+(n-1)d$$

將上面的式子相加，可得

$$\begin{aligned}a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n&=n\cdot a_1+[d+2d+\cdots\cdots+(n-1)d]\\&=n\cdot a_1+[1+2+\cdots\cdots+(n-1)]d\\&=n\cdot a_1+\frac{[1+(n-1)](n-1)}{2}d\\&=n\cdot a_1+\frac{n(n-1)}{2}d\end{aligned}$$

即 $S_n=n\cdot a_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d$。

基礎

備課教學資源

- 隨堂輕鬆考第 4 回

會考觀測站－基礎演練題 搭配隨堂

1. 等差級數 $(-20)+(-3)+14+\cdots\cdots$ 前 n 項的和爲多少？（以 n 的多項式表示）

$\dfrac{n(17n-57)}{2}$

2. 等差級數 $(-28)+(-25)+(-22)+\cdots\cdots$ 加到第幾項時，其和爲最小值？

第 10 項

放大 動畫

例 6 等差級數的應用 基會

配合習作 P10 基礎題 8

一架直升機空拋救災物資，第 1 秒落下 4.9 公尺，以後落下的距離每秒增加 9.8 公尺(即第 2 秒落下 4.9+9.8=14.7 公尺，第 3 秒落下 4.9+9.8+9.8=24.5 公尺)。如果救災物資空拋 6 秒後剛好到達地面，求當時直升機離地面的高度。

解 第 6 秒落下的距離為 $4.9+(6-1)\times 9.8=53.9$(公尺)

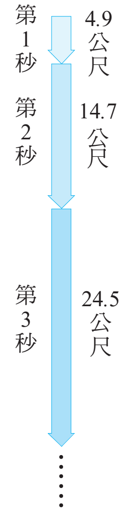
所以救災物資每秒落下的距離依次為

4.9 公尺, 14.7 公尺, 24.5 公尺, ⋯⋯, 53.9 公尺，

成等差數列。

其和為 $S_6=\dfrac{6\times(4.9+53.9)}{2}=176.4$(公尺)

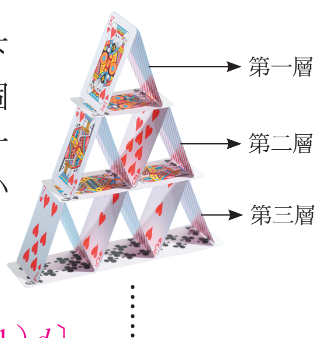
所以直升機離地面的高度為 176.4 公尺。



放大 提問 解

隨堂練習

用撲克牌堆疊的高塔中，小三角形的數量由上而下逐層增加，第一層有 1 個小三角形，第二層有 3 個小三角形，⋯⋯，每層的小三角形個數依序形成一個有規律的數列。如果排了 10 層，總共會有幾個小三角形？



$a_1=1$，$d=2$，$n=10$，代入公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 得

$S_{10}=\dfrac{10\times[2\times1+(10-1)\times2]}{2}=100$

所以 10 層總共有 100 個小三角形。

精熟

活動 4 應用等差級數解決生活中的問題。

教學眉批

- 例題 6 是自由落體運動。其公式為 $H=\dfrac{1}{2}gt^2$。
（H：落下的距離；g：重力加速度，約為 9.8 公尺/秒^2；t：時間）
- 例題 6 另解：
$S_6=\dfrac{6[2\times4.9+(6-1)\times9.8]}{2}$
- 隨堂練習教師可加問總共用了幾張撲克牌。(解：3+6+9+⋯⋯+30)

基會試題

- 91 基測 I 第 11 題
- 104 會考第 17 題

轉Q 關鍵提問

- 如果排了 5 層，總共會有幾個小三角形呢？
答：25 個。

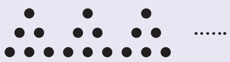
會考觀測站－精熟演練題 搭配例 7

- 聯歡晚會抽獎活動共抽出 10 個獎項，各獎為面額成等差數列的圖書禮券，公差為100元，總值 15500 元。若翰翰得到最小獎，則他可得到面額 1100 元的圖書禮券。

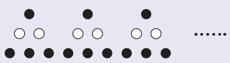
教學眉批

- 重新布題時，宜注意所得一元二次方程式的求解難易度。
- 改變圖形時，可考慮以三角形數的圖形來命題，如：

或其變化，如：



及



放大 例 7 等差級數的應用

配合習作 P10 基礎題 9

大偉設計工藝作品時，在長方形紙板上有規律的打洞，如圖：

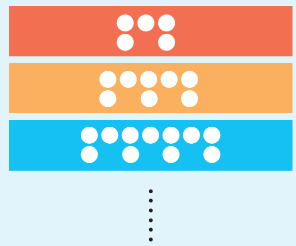
第 1 張紙板的洞形成 1 個ㄇ字，

第 2 張紙板的洞形成 2 個相連的ㄇ字，

第 3 張紙板的洞形成 3 個相連的ㄇ字，

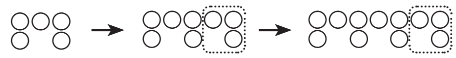
⋮

第 n 張紙板的洞形成 n 個相連的ㄇ字。



已知大偉在所有紙板上總共打了 185 個洞，求 n。

解 由



第 1 張紙板　第 2 張紙板　第 3 張紙板

發現每張紙板依序增加 3 個洞，因此每張紙板上的洞數，形成

公差為 3 的等差數列，其首項 $a_1=5$，項數 n，前 n 項的和 $S_n=185$

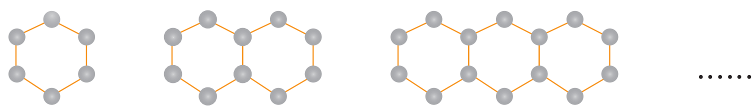
代入公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 得 $185=\dfrac{n[2\times5+(n-1)\times3]}{2}$

$3n^2+7n-370=0$

$(n-10)(3n+37)=0$

$n=10$ 或 $n=-\dfrac{37}{3}$（不合），故 $n=10$。

放大 隨堂練習



圖一　圖二　圖三

上方各圖是由牙籤與保麗龍小球所串成。圖一為 1 個正六邊形，圖二為 2 個相連的正六邊形，……，圖 n 為 n 個相連的正六邊形。若圖一至圖 n 共用去 286 顆保麗龍小球，求 n。

$a_1=6$，$d=4$，$S_n=286$，代入公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 得

$286=\dfrac{n[2\times6+(n-1)\times4]}{2}$

$n^2+2n-143=0$，$(n+13)(n-11)=0$，$n=11$ 或 $n=-13$（不合）

基礎

備課教學資源

- 隨堂輕鬆考第 5 回
- 免試基礎講堂 1-2
- 免試精熟本 1-2

會考觀測站－基礎演練題　搭配例 7

- 有一個用鋼珠堆成的梯形，第一層有 534 個鋼珠，第二層有 526 個鋼珠，……，每一層都比前一層少 8 個鋼珠，如此往下，一直堆到不能再堆爲止，則：
  (1)此梯形共有幾層？　67 層
  (2)共有多少個鋼珠？ 18090 個

重點回顧

教學眉批

放大 ① **級數**：將數列的各項用加號「＋」連接而成的式子稱為級數。

例 $1+3+(-1)+(-5)$ 是一個級數。

放大 ② **等差級數**：當 $a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots, a_n$ 為等差數列時，$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$ 為等差級數。

例 $5+10+15+20+25+30$ 是一個等差級數。

放大 ③ **等差級數和的公式**：

(1) 如果一個等差級數的首項為 a_1，末項為 a_n，則此等差級數前 n 項的和為 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，即等差級數的和為 $\dfrac{\text{項數}\times(\text{首項}+\text{末項})}{2}$。

(2) 將 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入公式 $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$，

可得 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$。

例 等差級數 $5+10+15+20+25+30$（$a_1=5$，$a_6=30$，$d=5$）的和為

$S_6=\dfrac{6}{2}(a_1+a_6)=\dfrac{6}{2}(5+30)=105$ 或

$S_6=\dfrac{6}{2}[2a_1+(6-1)d]=\dfrac{6}{2}[2\times5+5\times5]=105$

- $S_n=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}$ 亦可視為 $S_n=n\left(\dfrac{a_1+a_n}{2}\right)$，$a_1$、$a_n$ 的等差中項利用等差中項處理等差級數的問題，也是常用的方法。
- 等差級數前 n 項的和＝$\dfrac{\text{項數}\times[2\times\text{首項}+(\text{項數}-1)\times\text{公差}]}{2}$

數學小語錄

沒有知識的人總愛議論別人的無知，而知識豐富的人卻時時發現自己的無知。

—笛卡兒（René Descartes，1596-1650）

基礎

會考觀測站－基礎演練題　搭配重點回顧

- 等差級數 $(a-2b)+(3a-4b)+\cdots\cdots$ 前 10 項的和為 $\underline{\ 100a-110b\ }$。

1-2自我評量

教學眉批

- 第 1 題的各小題中，a_1 與 a_n 都是已知，因此透過 $a_n=a_1+(n-1)d$ 求出 n，再代入 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$。
- 第 2 題中 4 的倍數形成公差為 4 的等差數列，其一般項 $a_n=4n$。

基會試題

- 92 基測 II 第 18 題
- 97 基測 II 第 18 題
- 98 基測 I 第 27 題
- 103 會考第 23 題

放大 **1** 求等差級數 $74+67+60+\cdots\cdots+(-10)$ 的和。 課 P28 例 3

解

$a_1=74$，$d=-7$，$a_n=-10$，代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得

$-10=74+(n-1)\times(-7)$

$n=13$

代入公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 得 $S_{13}=\frac{13\times[74+(-10)]}{2}=416$

放大 **2** 求 1 至 1000 的整數中，所有 4 的倍數的和。 課 P30 例 4

解

$a_1=4$，$d=4$，$a_n=1000$，代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得

$1000=4+(n-1)\times4$

$n=250$

代入公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 得 $S_{250}=\frac{250\times(4+1000)}{2}=125500$

答：125500。

放大 **3** 已知一個等差級數的首項為 5，末項為 138，和為 1430，求此等差級數的項數與公差。 課 P31 例 5

解

$a_1=5$，$a_n=138$，$S_n=1430$，代入公式 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}$ 得

$1430=\frac{n(5+138)}{2}$，$n=20$

代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得

$138=5+(20-1)d$，$d=7$

答：項數為 20，公差為 7。

放大 **4** 等差級數 $15+18+21+\cdots\cdots$ 前 n 項的和為 600，求 n。 課 P31 例 6

解

$a_1=15$，$d=3$，$S_n=600$，代入公式 $S_n=\frac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 得

$600=\frac{n[2\times15+(n-1)\times3]}{2}$

$1200=n(3n+27)$，$n^2+9n-400=0$

$(n-16)(n+25)=0$，$n=16$ 或 $n=-25$（不合）

答：16。

精熟

備課教學資源

- 會考100分 1-2
- 會考基礎卷 1-2
- 會考精熟卷 1-2
- 段考精選試題 1-2

會考觀測站－精熟演練題 搭配自評第 5 題

1. 一個等差級數的第 n 項為 a_n，若 $a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=240$，$a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=220$，則 $a_1=$ __64__。

2. 在 15 與 -5 之間插入 n 個數，使其成為一個等差數列。若插入的 n 個數，其總和為 200，則 $n=$ __40__。

放大 **5** 已知一個等差級數的第 4 項為 15，第 7 項為 27，和為 903，求此等差級數的首項、公差與項數。 課 P30～31 例 4～6

解

$$\begin{cases} a_1+3d=15 \cdots\cdots ① \\ a_1+6d=27 \cdots\cdots ② \end{cases}$$ ②式－①式得 $3d=12$，$d=4$

代入①式得 $a_1=3$

代入公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 得 $903=\dfrac{n[2\times3+(n-1)\times4]}{2}$

$2n^2+n-903=0$，$(n-21)(2n+43)=0$，$n=21$ 或 $n=-\dfrac{43}{2}$（不合）

答：首項為 3，公差為 4，項數為 21。

放大 **6** 全民影城共有 25 排座位，自第二排起，每一排比前一排多 2 個座位。已知最後一排有 80 個座位，則全民影城共有多少個座位？ 課 P34 例 8

解

$a_1=80$，$d=-2$，$n=25$

代入公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 得

$S_{25}=\dfrac{25\times[2\times80+(25-1)\times(-2)]}{2}=1400$

答：1400 個。

放大 **7**

圖一 圖二 圖三

上方各圖是由火柴棒排成的正方形所組成，圖一有 1 個正方形，圖二有 2 個正方形，……，圖 n 有 n 個正方形。若圖一至圖 n 共用去 175 根火柴棒，則圖 n 用了幾根火柴棒？ 課 P34 例 8

解

$a_1=4$，$d=3$，$S_n=175$，代入公式 $S_n=\dfrac{n[2a_1+(n-1)d]}{2}$ 得

$175=\dfrac{n[2\times4+(n-1)\times3]}{2}$

$3n^2+5n-350=0$，$(n-10)(3n+35)=0$，$n=10$ 或 $n=-\dfrac{35}{3}$（不合）

代入公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得

$a_{10}=4+(10-1)\times3=31$

答：31 根。

基礎

教學眉批

- 第 5 題是等差數列與等差級數的綜合應用題，先求出 a_1 與 d，再求 n。
- 第 5 題的難處在於解一元二次方程式 $2n^2+n-903=0$，其解法可利用十字交乘法分解如下：

$$\begin{array}{ccc} 2n & \times & 43 \\ n & & -21 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{-42n+43n=n} \end{array}$$

會考觀測站－基礎演練題　搭配自評第 5 題

1. 有一個等差級數 $a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_n$。若 $a_{50}+a_{51}=70$，則 $S_{100}=$ __3500__。

2. 一個等差級數共有 8 項，第 4 項爲 19，且末項比首項小 35，則此等差級數和爲 __132__。

備課教學資源

- 會考100分第 1 章
- 會考基礎卷第 1 章
- 會考精熟卷第 1 章
- 隨堂輕鬆考第 6、7 回