

# 2-2 二元一次方程式的圖形

## 本節性質與公式摘要

### 1. 二元一次方程式的圖形與畫法：

- (1) 一個二元一次方程式的任意一組解，可以記錄成數對的形式，此時這一組解在坐標平面上的圖形就是一個點。
- (2) 二元一次方程式的圖形都是一條直線，因此二元一次方程式又稱為直線方程式。
- (3) 畫出二元一次方程式圖形的方法，須先找出此二元一次方程式中，兩組不同的解，然後在坐標平面上標示出此兩點，並畫一條直線通過這兩點，即為此方程式的圖形。

### 2. 直線方程式 $ax + by = c$ 的圖形：

條件	$a \neq 0, b \neq 0$	$a = 0, b \neq 0$	$a \neq 0, b = 0$
圖形	不垂直兩軸的直線	垂直 $y$ 軸的直線	垂直 $x$ 軸的直線
例	$x - 3y = 4$	$y = -5$	$x = 4$

### 3. 「二元一次聯立方程式的解」與「兩條直線的交點坐標」：

二元一次聯立方程式的解就是這兩個方程式的圖形的交點坐標；  
兩條直線的交點坐標就是這兩條直線所代表的兩個方程式的共同解。

### 4. 二元一次聯立方程式的圖形：

圖形	兩條直線交於一點	兩條直線互相平行	兩條直線互相重合
解的情形	只有一組解	無解	無限多組解
例	$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

## 基礎題

- ① 已知  $A(-3, 2)$  在  $ax+y=5$  的圖形上，求  $a$  的值。 8分 6分 課 P70 例 1

因為  $A(-3, 2)$  在直線  $ax+y=5$  上，

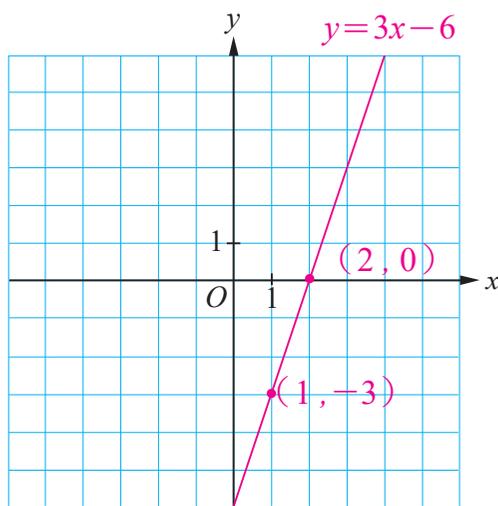
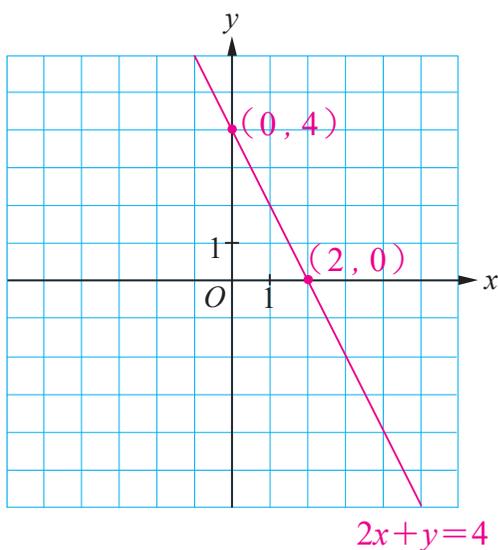
故  $a \times (-3) + 2 = 5$

$$a = -1$$

答：-1。

- ② 在坐標平面上畫出下列各二元一次方程式的圖形：課 P75~77 例 2~4

(1)  $2x+y=4$   $\frac{x}{y} \begin{array}{|l} 0 \\ 4 \end{array} \frac{2}{0}$  8分 6分      (2)  $y=3x-6$   $\frac{x}{y} \begin{array}{|l} 1 \\ -3 \end{array} \frac{2}{0}$  8分 6分



- ③ 已知  $M(a, b)$  為二元一次方程式  $2x - 3y = 4$  圖形上一點，求  $4a - 6b$  之值。

8分 6分 課 P79 例 5

$M(a, b)$  代入  $2x - 3y = 4$  得  $2a - 3b = 4$ ，

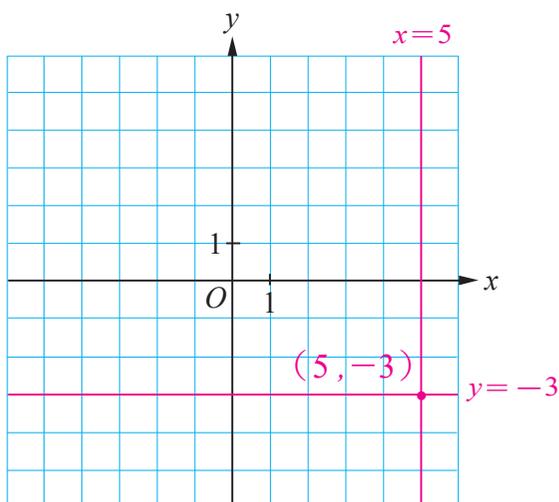
因此  $4a - 6b = 8$ 。

答：8。

- ④ 在坐標平面上分別畫出  $y = -3$  及  $x = 5$  的圖形，並標示出此兩條直線交點的坐標。

10分 6分

課 P81~83 例 6~7



- ⑤ 在坐標平面上畫出下列各二元一次聯立方程式的圖形，並判別其解為「只有一組解」、「無解」或「無限多組解」：

課 P85 例 8

(1) 
$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

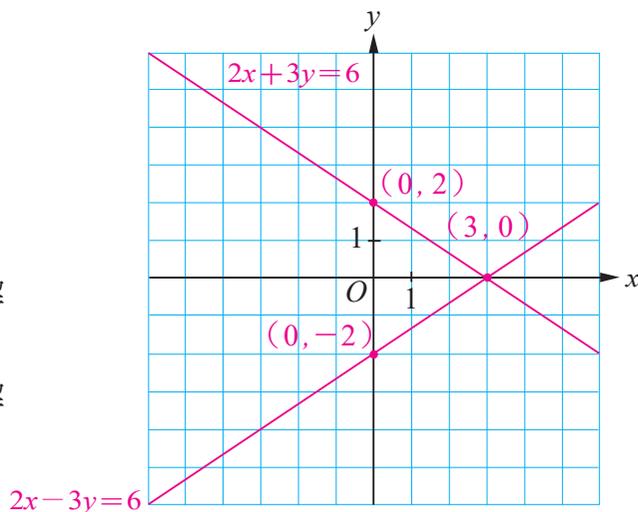
$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & -2 & 0 \end{array}$$

只有一組解

無解

無限多組解



$$(2) \begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 8x - 6y = 0 \end{cases}$$

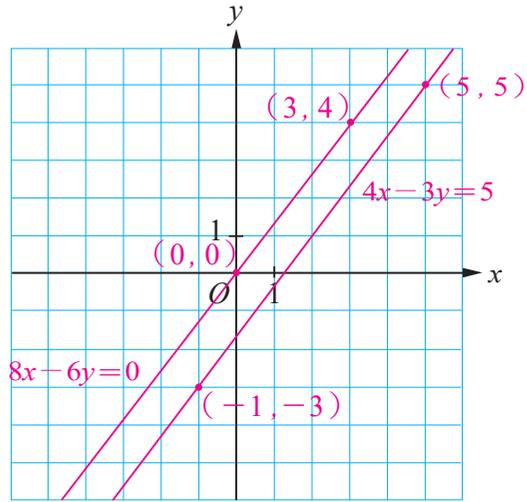
10分

6分

$$\begin{array}{c|c|c} x & 5 & -1 \\ \hline y & 5 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & 0 & 4 \end{array}$$

- 只有一組解  
 無解  
 無限多組解



$$(3) \begin{cases} 3x = 6y + 15 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

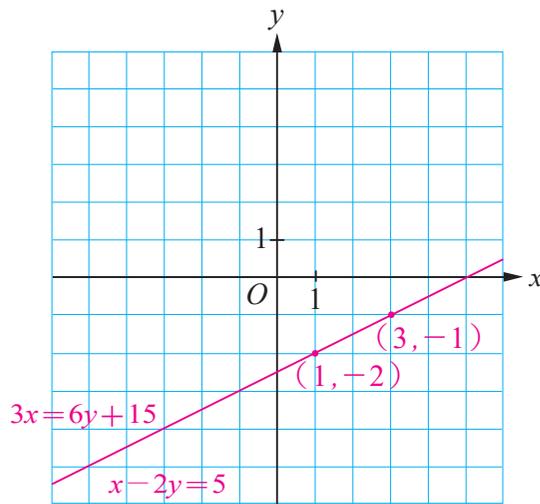
10分

6分

$$\begin{array}{c|c|c} x & 3 & 1 \\ \hline y & -1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 3 & 1 \\ \hline y & -1 & -2 \end{array}$$

- 只有一組解  
 無解  
 無限多組解



⑥ 小飛俠彼得潘在虎克船長的船上，  
拿到一份損壞的藏寶圖，如圖所示。

- (1) 設方程式  $ax+by+1=0$  的圖形通過  
基地  $A(3, 5)$ 、鱷魚潭  $E(-2, -5)$   
兩點，求直線  $AE$  所代表的方程式。

10分 8分 課 P79 例 5

將  $(3, 5)$ 、 $(-2, -5)$  代入  $ax+by+1=0$ 。

$$\begin{cases} 3a+5b=-1 & \text{①} \\ -2a-5b=-1 & \text{②} \end{cases}$$

①式+②式得  $a=-2$

將  $a=-2$  代入①式得  $-6+5b=-1$ ， $b=1$ 。

所以直線  $AE$  所代表的方程式為  $-2x+y+1=0$ 。 答： $-2x+y+1=0$ 。

- (2) 設方程式  $y=mx+n$  的圖形通過船塢  $B(-3, 4)$ 、岩洞  $H(5, -2)$  兩點，  
求直線  $BH$  所代表的方程式。

10分 8分 課 P79 例 5

將  $(-3, 4)$ 、 $(5, -2)$  代入  $y=mx+n$ 。

$$\begin{cases} 4=-3m+n & \text{①} \\ -2=5m+n & \text{②} \end{cases}$$

①式-②式得  $6=-8m$ ， $m=-\frac{3}{4}$

將  $m=-\frac{3}{4}$  代入①式得  $4=\frac{9}{4}+n$ ， $n=\frac{7}{4}$ 。

所以直線  $BH$  所代表的方程式為  $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$ 。 答： $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$ 。

- (C) (3) 直線  $AE$  與  $BH$  的交點坐標(即寶藏地點)為下列哪一點? 8分

- (A) 樹屋  $F(0, -3)$       (B) 黑風洞  $I(2, 1)$   
(C) 精靈樹  $J(1, 1)$       (D) 紅毛坑  $K(-1, 2)$

8分  
課 P85 例 8

$$\begin{cases} -2x+y+1=0 & \text{①} \\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4} & \text{②} \end{cases}$$

①式 $\times 4$ 得  $-8x+4y=-4$  ③

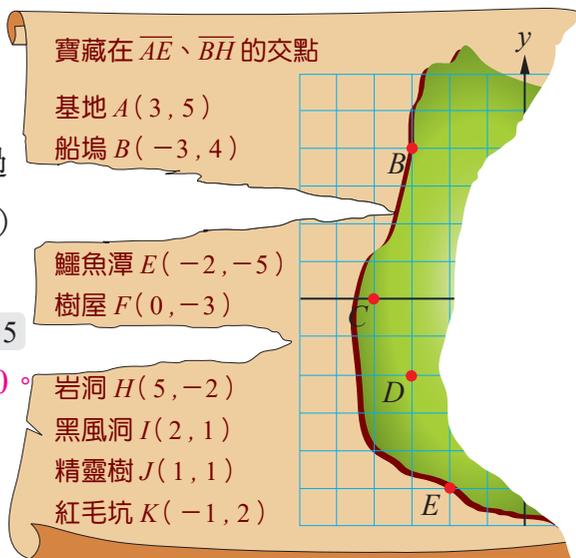
②式 $\times 4$ 得  $3x+4y=7$  ④

③式-④式得  $-11x=-11$ ， $x=1$ 。

將  $x=1$  代入①式得  $-2+y+1=0$ ， $y=1$ 。

所以交點坐標為  $(1, 1)$ ，

即寶藏地點為精靈樹  $J(1, 1)$ 。



## 精熟題

① 直線  $L_1$  的方程式為  $x-y=4$ ，直線  $L_2$  的方程式為  $2x+y=5$ 。則：

(1) 將直線  $L_1$  及  $L_2$  畫在坐標平面上。 6分

(2) 設  $A$  點為  $L_1$  及  $L_2$  的交點，求  $A$  點的坐標。 6分

(3) 直線  $L_1$ 、 $L_2$  分別與  $x$  軸交於  $B$ 、 $C$  兩點，求三角形  $ABC$  的面積。 6分

(1)  $x-y=4$        $2x+y=5$

$$\begin{array}{r|l} x & 0 & 4 \\ \hline y & -4 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x & 0 & 1 \\ \hline y & 5 & 3 \end{array}$$

(2)  $\begin{cases} x-y=4 & \text{..... ①} \\ 2x+y=5 & \text{..... ②} \end{cases}$

①式+②式得  $3x=9$ ， $x=3$ 。

將  $x=3$  代入①式得

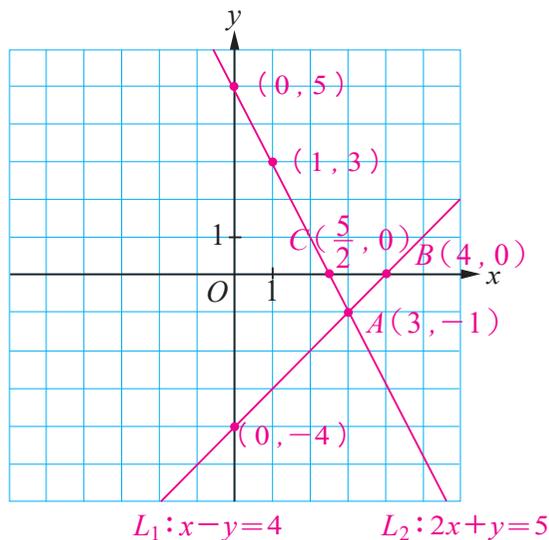
$$3-y=4, y=-1。$$

故  $A$  點坐標為  $(3, -1)$ 。

(3)  $L_1$  與  $x$  軸交點為  $B(4, 0)$ ，

$L_2$  與  $x$  軸交點為  $C(\frac{5}{2}, 0)$ ，

$$\text{故三角形 } ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times (4 - \frac{5}{2}) \times 1 = \frac{3}{4}。$$



答：(2)  $A(3, -1)$  (3)  $\frac{3}{4}$ 。

② 已知坐標平面上兩條直線的方程式分別為  $ax+3y=2$  與  $4x+by=-4$ ，如果點  $(2, -4)$  為此兩條直線的交點，求  $a$ 、 $b$  的值。 10分

因為點  $(2, -4)$  為  $ax+3y=2$  與  $4x+by=-4$  的交點，

$$\text{故 } 2 \times a + 3 \times (-4) = 2$$

$$a = 7$$

$$\text{且 } 4 \times 2 + b \times (-4) = -4$$

$$b = 3$$

故  $a=7$ ， $b=3$ 。

答： $a=7$ ， $b=3$ 。