

2-2 二元一次方程式的圖形

本節性質與公式摘要

1. 二元一次方程式的圖形與畫法：

- (1) 一個二元一次方程式的任意一組解，可以記錄成數對的形式，此時這一組解在坐標平面上的圖形就是一個點。
- (2) 二元一次方程式的圖形都是一條直線，因此二元一次方程式又稱為直線方程式。
- (3) 畫出二元一次方程式圖形的方法，須先找出此二元一次方程式中，兩組不同的解，然後在坐標平面上標示出此兩點，並畫一條直線通過這兩點，即為此方程式的圖形。

2. 直線方程式 $ax + by = c$ 的圖形：

條件	$a \neq 0, b \neq 0$	$a = 0, b \neq 0$	$a \neq 0, b = 0$
圖形	不垂直兩軸的直線	垂直 y 軸的直線	垂直 x 軸的直線
例	$x - 3y = 4$	$y = -5$	$x = 4$

3. 「二元一次聯立方程式的解」與「兩條直線的交點坐標」：

二元一次聯立方程式的解就是這兩個方程式的圖形的交點坐標；
兩條直線的交點坐標就是這兩條直線所代表的兩個方程式的共同解。

4. 二元一次聯立方程式的圖形：

圖形	兩條直線交於一點	兩條直線互相平行	兩條直線互相重合
解的情形	只有一組解	無解	無限多組解
例	$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 6y = 5 \end{cases}$	$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 4x + 2y = 2 \end{cases}$

基礎題

- ① 已知 $A(-3, 2)$ 在 $ax+y=5$ 的圖形上，求 a 的值。 8分 6分 課 P70 例 1

因為 $A(-3, 2)$ 在直線 $ax+y=5$ 上，

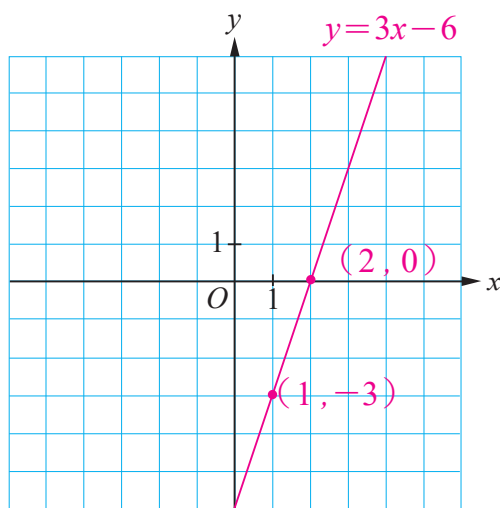
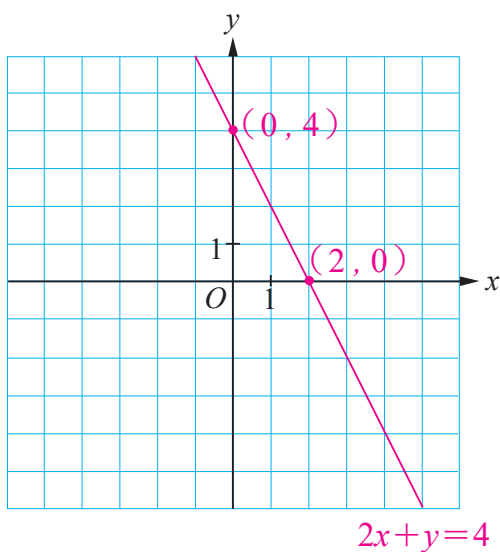
故 $a \times (-3) + 2 = 5$

$$a = -1$$

答：-1。

- ② 在坐標平面上畫出下列各二元一次方程式的圖形：課 P75~77 例 2~4

(1) $2x+y=4$ $\frac{x}{y} \left| \begin{array}{c} 0 \\ 4 \end{array} \right| \frac{2}{0}$ 8分 6分 (2) $y=3x-6$ $\frac{x}{y} \left| \begin{array}{c} 1 \\ -3 \end{array} \right| \frac{2}{0}$ 8分 6分



- ③ 已知 $M(a, b)$ 為二元一次方程式 $2x - 3y = 4$ 圖形上一點，求 $4a - 6b$ 之值。

8分 6分 課 P79 例 5

$M(a, b)$ 代入 $2x - 3y = 4$ 得 $2a - 3b = 4$ ，

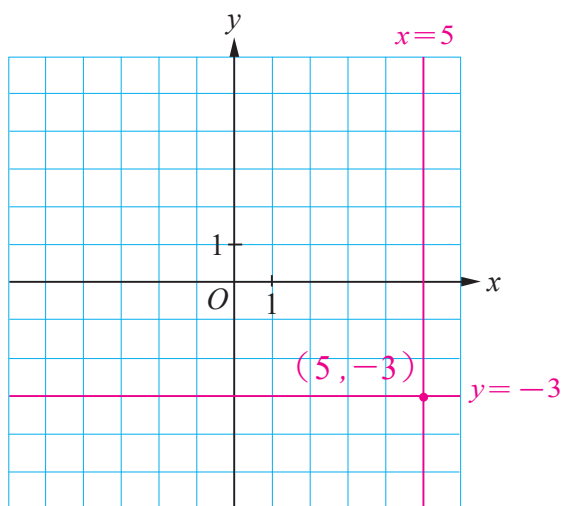
因此 $4a - 6b = 8$ 。

答：8。

- ④ 在坐標平面上分別畫出 $y = -3$ 及 $x = 5$ 的圖形，並標示出此兩條直線交點的坐標。

10分 6分

課 P81~83 例 6~7



- ⑤ 在坐標平面上畫出下列各二元一次聯立方程式的圖形，並判別其解為「只有一組解」、「無解」或「無限多組解」：

課 P85 例 8

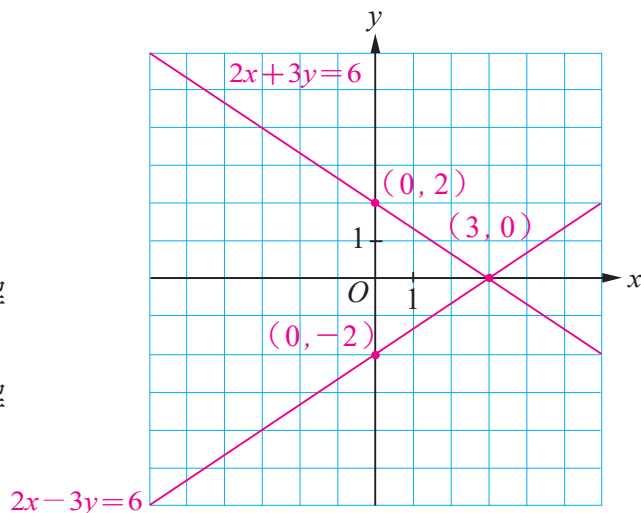
$$(1) \begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ 2x - 3y = 6 \end{cases}$$

10分 6分

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & -2 & 0 \end{array}$$

- 只有一組解
 無解
 無限多組解



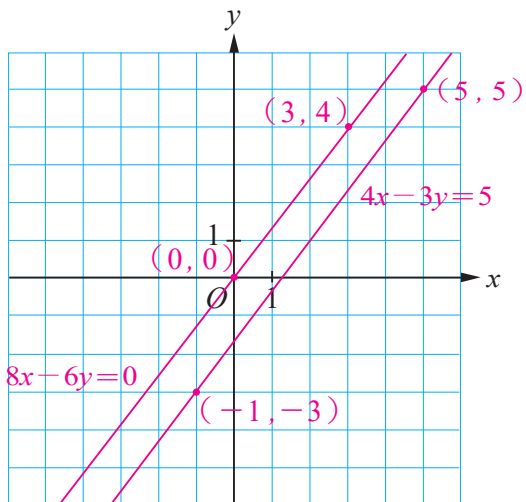
$$(2) \begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ 8x - 6y = 0 \end{cases}$$

10分

6分

$$\begin{array}{c|c|c} x & 5 & -1 \\ \hline y & 5 & -3 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & 3 \\ \hline y & 0 & 4 \end{array}$$

 只有一組解 無解 無限多組解

課 P88 例 9

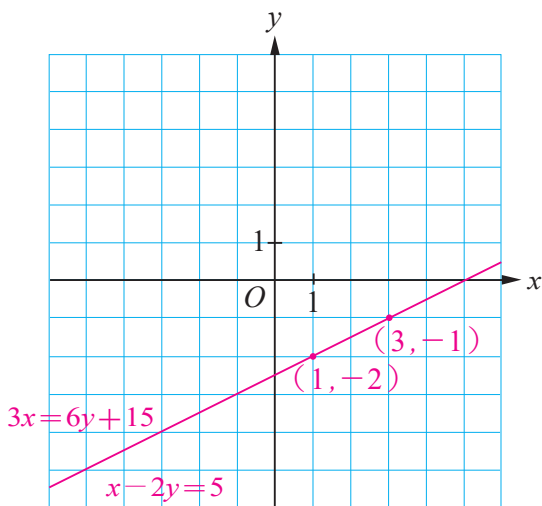
$$(3) \begin{cases} 3x = 6y + 15 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

10分

6分

$$\begin{array}{c|c|c} x & 3 & 1 \\ \hline y & -1 & -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|c|c} x & 3 & 1 \\ \hline y & -1 & -2 \end{array}$$

 只有一組解 無解 無限多組解

課 P90 例 10

⑥ 小飛俠彼得潘在虎克船長的船上，拿到一份損壞的藏寶圖，如圖所示。

- (1) 設方程式 $ax+by+1=0$ 的圖形通過基地 $A(3, 5)$ 、鱷魚潭 $E(-2, -5)$ 兩點，求直線 AE 所代表的方程式。

10分 8分 課 P79 例 5

將 $(3, 5)$ 、 $(-2, -5)$ 代入 $ax+by+1=0$ 。

$$\begin{cases} 3a+5b=-1 & \text{①} \\ -2a-5b=-1 & \text{②} \end{cases}$$

①式+②式得 $a=-2$

將 $a=-2$ 代入①式得 $-6+5b=-1$ ， $b=1$ 。

所以直線 AE 所代表的方程式為 $-2x+y+1=0$ 。 答： $-2x+y+1=0$ 。

- (2) 設方程式 $y=mx+n$ 的圖形通過船塢 $B(-3, 4)$ 、岩洞 $H(5, -2)$ 兩點，求直線 BH 所代表的方程式。

10分 8分 課 P79 例 5

將 $(-3, 4)$ 、 $(5, -2)$ 代入 $y=mx+n$ 。

$$\begin{cases} 4=-3m+n & \text{①} \\ -2=5m+n & \text{②} \end{cases}$$

①式-②式得 $6=-8m$ ， $m=-\frac{3}{4}$

將 $m=-\frac{3}{4}$ 代入①式得 $4=\frac{9}{4}+n$ ， $n=\frac{7}{4}$ 。

所以直線 BH 所代表的方程式為 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$ 。 答： $y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4}$ 。

- (C) (3) 直線 AE 與 BH 的交點坐標(即寶藏地點)為下列哪一點? 8分

- (A) 樹屋 $F(0, -3)$ (B) 黑風洞 $I(2, 1)$
(C) 精靈樹 $J(1, 1)$ (D) 紅毛坑 $K(-1, 2)$

8分
課 P85 例 8

$$\begin{cases} -2x+y+1=0 & \text{①} \\ y=-\frac{3}{4}x+\frac{7}{4} & \text{②} \end{cases}$$

①式 $\times 4$ 得 $-8x+4y=-4$ ③

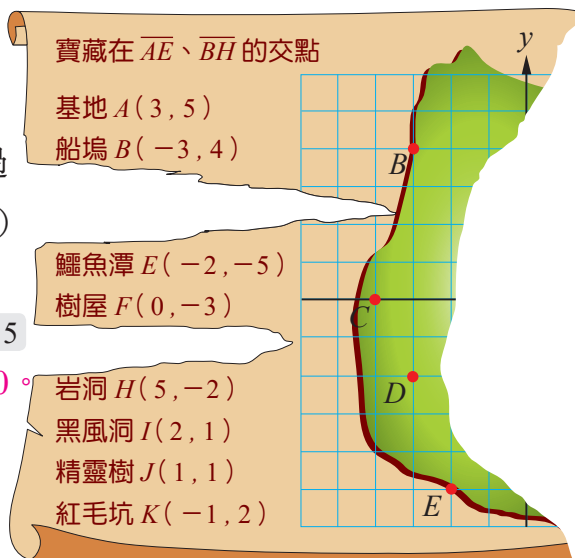
②式 $\times 4$ 得 $3x+4y=7$ ④

③式-④式得 $-11x=-11$ ， $x=1$ 。

將 $x=1$ 代入①式得 $-2+y+1=0$ ， $y=1$ 。

所以交點坐標為 $(1, 1)$ ，

即寶藏地點為精靈樹 $J(1, 1)$ 。



精熟題

① 直線 L_1 的方程式為 $x-y=4$ ，直線 L_2 的方程式為 $2x+y=5$ 。則：

(1) 將直線 L_1 及 L_2 畫在坐標平面上。 **6分**

(2) 設 A 點為 L_1 及 L_2 的交點，求 A 點的坐標。 **6分**

(3) 直線 L_1 、 L_2 分別與 x 軸交於 B 、 C 兩點，求三角形 ABC 的面積。 **6分**

$$(1) \quad x-y=4 \quad 2x+y=5$$

$$\begin{array}{r|l} x & 0 & 4 \\ \hline y & -4 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} x & 0 & 1 \\ \hline y & 5 & 3 \end{array}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x-y=4 & \text{..... ①} \\ 2x+y=5 & \text{..... ②} \end{cases}$$

$$\text{①式} + \text{②式得} \quad 3x=9, x=3。$$

將 $x=3$ 代入①式得

$$3-y=4, y=-1。$$

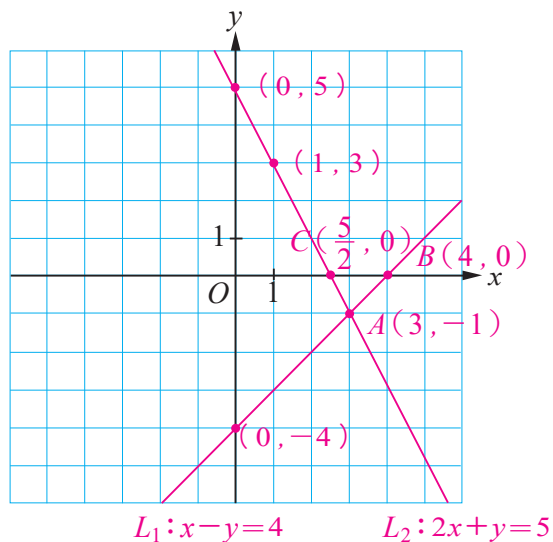
故 A 點坐標為 $(3, -1)$ 。

(3) L_1 與 x 軸交點為 $B(4, 0)$ ，

L_2 與 x 軸交點為 $C(\frac{5}{2}, 0)$ ，

$$\text{故三角形 } ABC \text{ 的面積} = \frac{1}{2} \times (4 - \frac{5}{2}) \times 1 = \frac{3}{4}。$$

答：(2) $A(3, -1)$ (3) $\frac{3}{4}$ 。



② 已知坐標平面上兩條直線的方程式分別為 $ax+3y=2$ 與 $4x+by=-4$ ，如果點 $(2, -4)$ 為此兩條直線的交點，求 a 、 b 的值。 **10分**

因為點 $(2, -4)$ 為 $ax+3y=2$ 與 $4x+by=-4$ 的交點，

$$\text{故 } 2 \times a + 3 \times (-4) = 2$$

$$a = 7$$

$$\text{且 } 4 \times 2 + b \times (-4) = -4$$

$$b = 3$$

故 $a=7, b=3$ 。

答： $a=7, b=3$ 。