

2-2 最大公因數與最小公倍數

本節性質與公式摘要

1. 公因數與最大公因數：

- (1) 幾個整數共同的因數稱為這幾個整數的公因數。
- (2) 在這幾個整數的公因數中，最大的一個稱為這幾個整數的最大公因數。

2. 公倍數與最小公倍數：

- (1) 幾個整數共同的倍數稱為這幾個整數的公倍數。
- (2) 在這幾個整數的公倍數中，最小的一個稱為這幾個整數的最小公倍數。

3. 互質：

如果兩數的最大公因數為 1，則稱兩數互質。

例 $(8, 15) = 1$ ，所以 8 與 15 互質。

4. 利用標準分解式求最大公因數：

求 a 、 b 的最大公因數時，可先求出 a 和 b 的標準分解式，找出兩者共同的質因數，由共同質因數中，分別取指數（次方）最小者相乘，即為 a 和 b 的最大公因數。

例 $(2^2 \times 3 \times 5^3, 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7) = 2^2 \times 3 \times 5^2$

5. 利用標準分解式求最小公倍數：

求 a 、 b 的最小公倍數時，可先求出 a 和 b 的標準分解式，找出兩者全部的質因數，再把兩者所有質因數中，分別取指數（次方）最大者相乘，即為 a 和 b 的最小公倍數。

例 $[2^2 \times 3 \times 5^3, 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7] = 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7$


基礎題

每題 6 分，共 36 分

① 求下列各組數的最大公因數：每題 5 分，共 30 分

課 P116~118 隨堂

(1) 35、64

$$\begin{array}{r|l} 1 & 35 \quad 64 \\ \hline & 35 \quad 64 \end{array}$$

$(35, 64) = 1$

(2) 36、8

$$\begin{array}{r|l} 2 & 36 \quad 8 \\ \hline 2 & 18 \quad 4 \end{array}$$

$9 \quad 2$

$(36, 8) = 2^2 = 4$

(3) 132、210

$$\begin{array}{r|l} 2 & 132 \quad 210 \\ \hline 3 & 66 \quad 105 \\ \hline & 22 \quad 35 \end{array}$$

$(132, 210) = 2 \times 3 = 6$

(4) 28、8、36

$$\begin{array}{r|l} 2 & 28 \quad 8 \quad 36 \\ \hline 2 & 14 \quad 4 \quad 18 \\ \hline & 7 \quad 2 \quad 9 \end{array}$$

$(28, 8, 36) = 2^2 = 4$

(5) 15、40、36

$$\begin{array}{r|l} 1 & 15 \quad 40 \quad 36 \\ \hline & 15 \quad 40 \quad 36 \end{array}$$

$(15, 40, 36) = 1$

(6) 144、12、54

$$\begin{array}{r|l} 2 & 144 \quad 12 \quad 54 \\ \hline 3 & 72 \quad 6 \quad 27 \\ \hline & 24 \quad 2 \quad 9 \end{array}$$

$(144, 12, 54) = 2 \times 3 = 6$

每題 6 分，共 36 分

② 求下列各組數的最小公倍數：每題 5 分，共 30 分

課 P123~126 隨堂

(1) 54、114

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 54 & 114 \\ 3 & 27 & 57 \\ \hline & 9 & 19 \end{array}$$

$$\begin{aligned} [54, 114] &= 2 \times 3 \times 9 \times 19 \\ &= 1026 \text{ (或 } 2 \times 3^3 \times 19 \text{)} \end{aligned}$$

(2) 26、7

$$\begin{aligned} [26, 7] &= 26 \times 7 \\ &= 182 \text{ (或 } 2 \times 7 \times 13 \text{)} \end{aligned}$$

(3) 90、27

$$\begin{array}{r|rr} 3 & 90 & 27 \\ 3 & 30 & 9 \\ \hline & 10 & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} [90, 27] &= 3 \times 3 \times 10 \times 3 \\ &= 270 \text{ (或 } 2 \times 3^3 \times 5 \text{)} \end{aligned}$$

(4) 2、3、4

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 2 & 3 & 4 \\ \hline & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

$$\begin{aligned} [2, 3, 4] &= 2 \times 3 \times 2 \\ &= 12 \text{ (或 } 2^2 \times 3 \text{)} \end{aligned}$$

(5) 12、15、18

$$\begin{array}{r|rrr} 3 & 12 & 15 & 18 \\ 2 & 4 & 5 & 6 \\ \hline & 2 & 5 & 3 \end{array}$$

$$\begin{aligned} [12, 15, 18] &= 3 \times 2 \times 2 \times 5 \times 3 \\ &= 180 \text{ (或 } 2^2 \times 3^2 \times 5 \text{)} \end{aligned}$$

(6) 35、20、28

$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 35 & 20 & 28 \\ 2 & 35 & 10 & 14 \\ 5 & 35 & 5 & 7 \\ 7 & 7 & 1 & 7 \\ \hline & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} [35, 20, 28] &= 2 \times 2 \times 5 \times 7 \\ &= 140 \\ &\text{(或 } 2^2 \times 5 \times 7 \text{)} \end{aligned}$$

課 P120 例 1、P127~128 例 4~5

③ 求下列各組數的最大公因數與最小公倍數：(以標準分解式表示)

$$(1) 2^3 \times 3^2 \times 7^4, 2^2 \times 5^3 \times 7^2$$

每題 8 分，共 16 分

每題 4 分，共 8 分

$$(2^3 \times 3^2 \times 7^4, 2^2 \times 5^3 \times 7^2) = 2^2 \times 7^2$$

$$[2^3 \times 3^2 \times 7^4, 2^2 \times 5^3 \times 7^2] = 2^3 \times 3^2 \times 5^3 \times 7^4$$

$$(2) 2^2 \times 3^4 \times 7 \times 11, 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 11, 2^3 \times 3^5 \times 5^3 \times 11$$

$$(2^2 \times 3^4 \times 7 \times 11, 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 11, 2^3 \times 3^5 \times 5^3 \times 11) = 2^2 \times 3^3 \times 11$$

$$[2^2 \times 3^4 \times 7 \times 11, 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 11, 2^3 \times 3^5 \times 5^3 \times 11] = 2^4 \times 3^5 \times 5^3 \times 7 \times 11$$

④ 有 132 個蘋果和 156 個梨子，想要將這兩種水果分堆，每堆都要有蘋果和梨子，而且每堆同一種類的水果都要一樣多，那麼最多可分成多少堆？每堆各有蘋果和梨子多少個？ 12 分 6 分

課 P121~122 例 2~3

$$\begin{array}{r|l} 2 & 132 \quad 156 \\ \hline 2 & 66 \quad 78 \\ \hline 3 & 33 \quad 39 \\ \hline & 11 \quad 13 \end{array}$$

$$(132, 156) = 2 \times 2 \times 3 = 12$$

答：最多分成 12 堆，每堆有 11 個蘋果，13 個梨子。

精熟題

① (1) 求 $(24, [12, 18])$ 。

$$[12, 18] = 36$$

$$(24, [12, 18]) = (24, 36) = 12$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 12 \ 18} \\ 3 \overline{) 6 \ 9} \\ \hline 2 \ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 24 \ 36} \\ 2 \overline{) 12 \ 18} \\ 3 \overline{) 6 \ 9} \\ \hline 2 \ 3 \end{array}$$

(2) 求 $[(75, 125), 15]$ **每題 5 分，共 10 分**

$$(75, 125) = 25$$

$$[(75, 125), 15] = [25, 15] = 5$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 75 \ 125} \\ 5 \overline{) 15 \ 25} \\ \hline 3 \ 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 25 \ 15} \\ \hline 5 \ 3 \end{array}$$

② 有一個三角形的公園，三邊長分別為 150 公尺、180 公尺、240 公尺，想要沿著公園的周圍種樹綠化環境，相鄰兩棵樹之間的距離要相等，且三角形的頂點處也要種樹，則：

(1) 相鄰兩棵樹之間的距離最大可能是多少公尺？ **5 分**

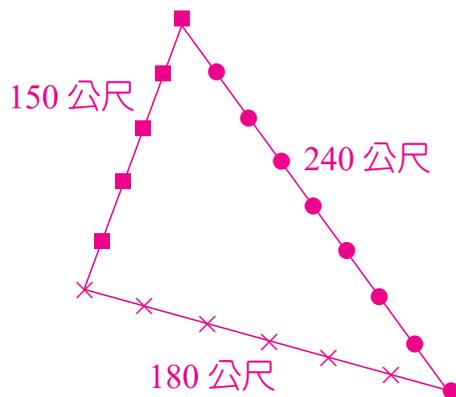
(2) 此時總共要種多少棵樹？ **5 分**

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 150 \ 180 \ 240} \\ 3 \overline{) 75 \ 90 \ 120} \\ 5 \overline{) 25 \ 30 \ 40} \\ \hline 5 \ 6 \ 8 \end{array}$$

$$(150, 180, 240) = 2 \times 3 \times 5 = 30$$

(2) $(150 + 180 + 240) \div 30 = 19$

答：(1) 30 公尺 (2) 19 棵。



③ 甲、乙、丙三人同時、同地、同方向出發，繞一周長為 300 公尺的操場慢跑，已知甲、乙、丙三人繞操場一圈所需的時間分別為 5 分鐘、6 分鐘與 10 分鐘，則他們出發多少分鐘後才會第一次在出發點會合？ **6 分**

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 5 \ 6 \ 10} \\ 5 \overline{) 5 \ 3 \ 5} \\ \hline 1 \ 3 \ 1 \end{array}$$

$$[5, 6, 10] = 2 \times 5 \times 3 = 30$$

答：30 分鐘。